

ANÁLISE PIEZOELÁSTICA DE DUTOS SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA USANDO UM ELEMENTO FINITO DE CASCA CILÍNDRICA

Angelo. V. Mendonça^b, Raimundo.A.Menezes Júnior^a

^a*Programa de Pós-graduação de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil.*

^b*Laboratório de Modelos Físicos Qualitativos e Computacionais, Universidade Federal de Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil*

Palavras-Chave: Cascas, MEF, Membrana, Placas

Abstract: Neste trabalho é feita uma descrição da formulação de um elemento finito de cascas cilíndricas, originalmente habilitado para materiais homogêneos isotrópicos, para lidar com dutos/painéis cilíndricos apoiados em base elástica e feitos de materiais compósitos laminados que podem ter propriedades piezoelétricas. Esse elemento finito de casca cilíndrica possui quatro nós funcionais com cinco graus de liberdade por nó e tem como principal característica, representar superfícies cilíndricas com aproximação geométrica exata. Convém notar que o enfoque deste trabalho é essencialmente matemático, onde são deduzidas as formas explícitas da matrizes de rigidez elástica, piezoelétrica e di-elétrica, ficando os resultados numéricos a serem apresentados em um futuro próximo.

1 INTRODUÇÃO

Componentes estruturais denominados de cascas são aqueles formados por lâminas onde geralmente as superfícies médias não são planas, que em muitos casos tanto os problemas de flexão quanto os de membrana são simultaneamente ativados. Dada a essa característica, é freqüente encontrar na literatura a designação de casca plana quando um componente estrutural de superfícies planas co-mobilizar ambos efeitos. Outras classificações podem ainda ser atribuídas à grande família das cascas dependendo do enfoque selecionado, tais como: modo de geração (translação e revolução), índice de esbeltez (delgada, espessa), relação raio/vão circunferencial (profunda, abatida), perfis de curvaturas (cilíndrica, esféricas, cônicas, etc), propriedades do material (repetição posicional: homogêneo, laminado, e outros; níveis de simetria: isotrópico, ortótropos e outros; comportamento: elástico, plástico e outros). Apesar da grande diversidade da população das cascas, um fator dominante que torna sua representação matemática menos trivial é decorrente principalmente da complexidade de sua natureza geométrica.

Na literatura podem ser encontradas equações governantes para muitos tipos de cascas de materiais homogêneos (Soebel, 1981; Ugural, 2009; Flugge, 1973) onde soluções analíticas estão disponíveis para poucos e específicos casos. Alternativamente às restrições das formas analíticas, surgem os métodos numéricos, que majoritariamente nos problemas de cascas são construídos segundo a filosofia do Método dos Elementos Finitos (MEF). Apesar do grande esforço da comunidade do MEF em atacar os problemas de cascas, ainda existem muitas lacunas para serem preenchidas, principalmente quando o objetivo é incorporar a representação não-plana das superfícies médias. Algumas tentativas foram feitas para esse fim, onde alguns aspectos (interpolação, discretização, convergência e esforço computacional) são ressaltados em problemas elásticos de cascas de materiais homogêneos. Essas discussões podem ser encontradas, por exemplo, em (Hrennikof e Tezcan, 1966), (Fulton, 1966), (Cantin e Clough, 1968), (Cowper et al., 1979) e outros. Em outra frente, alguns pesquisadores partiram para adoção de um campo de deformação ao invés do modo tradicional de deslocamento (Sabir, 1984), (Djoudi e Bahai, 2003, 2004a,b) apresentaram um elemento finito para casca cilíndrica composta por materiais isotrópicos baseado no método de deformações assumidas (Assumed Strain Model) combinado com a teoria de casca cilíndrica abatida incorporando o modelo de (Donnel, 1933, 1938). Esse elemento foi aplicado tanto para análise estática quanto para vibração de cascas cilíndricas.

Além de estruturas feitas de materiais homogêneos, os componentes envolvendo os compósitos laminados tem sido um outro tema que tem despertado grande interesse na engenharia moderna. Segundo (Reddy, 2004) algumas linhas de abordagem podem ser encontradas para o tratamento da mecânica de compósitos laminados, desde versões mais simplificadas (p.ex., Teorias de Camadas Simples Equivalentes) até modelos mais sofisticados (p.ex. Teoria da Elasticidade Tridimensional e Métodos de Modelos Múltiplos). De uma forma geral, todos eles apresentam vantagens e desvantagens a depender do nível de detalhamento do fenômeno de interesse, desde que satisfaçam aceitavelmente o comportamento físico “esperado” para o problema. Com intuito de tornar os equipamentos e mecanismos mais eficientes, materiais que exibem propriedades de multicampos tem sido cada vez mais utilizados nas soluções de problemas nas diversas áreas de tecnologia, tais como: controle de vibração, bio-engenharia, medicina, odontologia, etc. Um dos fenômenos que certos materiais multicampos podem exibir é a eletroelasticidade, que é caracterizada pelo acoplamento dos campos de natureza mecânica (p.ex. as tensões) com os da eletricidade (p.ex. campos elétricos). Um dos aspectos bem explorado da eletroelasticidade está associado à piezoelasticidade, que lida com a capacidade do material de transformar ações (pressões)

mecânicas em efeitos elétricos (forma direta), ou no sentido reverso (forma conversiva) em que mudanças de forma são produzidas pela ação de um campo elétrico. Na literatura existem diversos trabalhos sobre a aplicação da piezoelasticidade em problemas de vigas e placas, vide por exemplo (Maurini et al. 2004; Gopinathan et al., 2000), (Alzahrani e Alghamdi, 2003), (Mackerle, 2003; Benjeddou, 2000). No caso específico de cascas cilíndricas o número de contribuições é sensivelmente menor (Chang-Qing Chen et al., 1996; Heyliger, 1997; Jun-Qiang Zhu et al., 2003; Gupta, 2010; Sheng e Wang, 2009).

Neste trabalho a formulação do elemento finito de cascas cilíndricas CYS de (Djoudi e Bahai, 2003, 2004 a,b) é revisitada de modo a remover as análises restritas a materiais homogêneos elásticos isotrópicos. Com isso, o elemento CYS é reformulado e habilitado a lidar com dutos/painéis cilíndricos apoiados em base elástica e feitos de materiais compósitos laminados, que podem ter propriedades piezoelétricas. Convém enfatizar que apenas a descrição matemática do elemento é feita, ficando os resultados numéricos a serem apresentados em um futuro trabalho.

2 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção são discutidos as etapas requeridas para extensão do elemento finito de cascas cilíndricas. Inicialmente é descrito o problema da casca apoiada em base elástica. Em seguida, os procedimentos para a incorporação dos efeitos piezoelétricos na casca são detalhados.

2.1 Duto/painel laminado apoiado em base elástica

Conforme mencionado anteriormente, as teorias de cascas laminadas podem ser divididas em Teorias de Camadas Simples Equivalentes (TCSE), Teoria da Elasticidade Tridimensional e Métodos de Modelos Múltiplos. As duas últimas lidam com níveis de idealização mais robustos para os campos de tensões no interior e nas interfaces das camadas do Laminado. Já a família de teorias de camadas simples equivalentes despreza alguns aspectos dos campos de tensões e deformações, principalmente nas regiões de interface. As TCSE podem ainda ser sub-divididas em teorias de ordem zero (clássica), ordem um (inclusão da formação por cortante) e ordem superiores (segunda e terceira). De um modo geral, esses sub-casos da TCSE descrevem a cinemática da rotação da seção transversal e a inclinação da superfície média. Neste trabalho, a casca laminada será descrita pelo modelo clássico, cujas hipóteses são apresentadas a seguir:

- a) A espessura do laminado é muito pequena comparada com suas outras dimensões;
- b) As camadas do laminado estão perfeitamente aderidas;
- c) Linhas perpendiculares à superfície do laminado permanecem retas e perpendiculares à superfície após a deformação;
- d) O laminado e as lâminas são elástico-lineares;
- e) As tensões e deformações transversas (na direção da espessura) são desprezíveis;
- f) O laminado está sujeito apenas a pequenos deslocamentos.

Convém notar que as hipóteses da teoria clássica de cascas laminadas possibilitam uma geração de relações que têm forte ligação com a teoria clássica de casca de material homogêneo, requerendo na maioria dos casos, um ajuste conveniente das constantes mecânicas para a representação das relações constitutivas do laminado. Assim, os procedimentos para adequação de um elemento finito de casca cilíndrica (originalmente habilitado para materiais homogêneos, isotrópicos e elastolineares) para representar cascas cilíndricas de compósitos laminados elastolineares apoiadas em fundações elásticas de Pasternak.

Djoudi e Bahai (2003, 2004a,b) utilizaram como ponto de partida para descrição de seu elemento finito (aqui chamado de CYS) foi adoção da teoria de cascas cilíndricas abatidas de Donnel (1938) para descrição das equações governantes (cinemática e equilíbrio) do painel cilíndrico, cujas principais hipóteses são:

- a) Lâmina com única curvatura finita;
- b) Regime de pequenos deslocamentos, rotações e deformações;
- c) Conservação da planicidade das seções transversais em ambas configurações indeformada e deformada;
- d) Conservação da ortogonalidade entre a seção transversal e sua normal durante o processo de deformação;
- e) Material homogêneo, isótropo, elasto-linear;
- f) O esforço cortante na direção radial é desprezado ($Q_r = 0$);
- g) A contribuição dos deslocamentos no plano médio (u e v) na deformação de flexão é desprezada.
- h) Vínculos rígidos

Convém notar que as hipóteses (e, f) são as restrições de Donnel para representação da casca cilíndrica abatida. Além disso, no elemento CYS deduzido por (Djoudi e Bahai, 2003) foram impostas completamente as hipóteses d e h.

No presente artigo, o material poderá também ser um material compósito laminado (portanto, não homogêneo) e ainda apoiado sobre vínculos elásticos idealizados como uma base elástica de Pasternak, vide Figura 1.

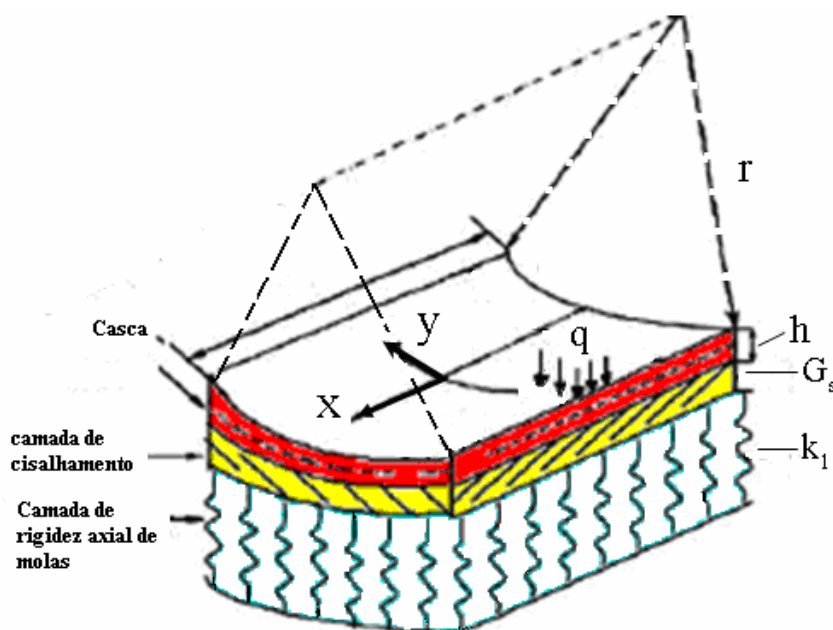


Figura 1: Painel cilíndrico sobre base elástica

Assim, levando-se em conta o modelo de Donnel com a relaxação parcial das hipóteses g e h para a estrutura e o modelo discreto de Pasternak para o solo, o funcional de energia pode ser escrito no sistema de coordenadas cilíndricas ($x, y = \phi r, z$) como:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\psi\}^T [D] \{\psi\} dA + \int_A \{\delta\}^T [D_s] \{\delta\} dA \quad (1)$$

onde o vetor dos deslocamentos é $\{\delta\}^T = \{u \quad v \quad w \quad \partial w/\partial x \quad \partial w/\partial y\}$ e a matriz constitutiva da base elástica $[D_s]$ fica:

$$[D_s] = \begin{bmatrix} [0^*] & [0] \\ [0]^T & [D_{sf}] \end{bmatrix}, \quad [D_{sf}] = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & G_s & 0 \\ 0 & 0 & G_s \end{bmatrix}$$

Sendo as matrizes nulas, $[0^*]$ quadrada de ordem 2 e $[0]$ retangular de dimensão 2×3 . k_s, G_s são os parâmetros de rigidez da fundação de Pasternak. Já o vetor das curvaturas $\{\psi\}^T = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad X_x \quad X_y \quad X_{xy}\}$ é dado por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w}{r}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad X_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad X_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad X_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

sendo u, v e w são os deslocamentos axial, circunferencial e radial; r é o raio da casca. Já a matriz constitutiva D nas direções (x,y,z) para o compósito laminado da casca na Eq. (1), fica:

$$[D] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [C] \end{bmatrix} \quad (2.a)$$

Onde as sub-matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ são dadas por:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & V_{66} \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [Q^k] = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}$$

e

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k - h_{k-1}) Q_{ij}^k, \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_{ij}^k, \quad C_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_{ij}^k \quad (2.b)$$

onde h_k e Q_{ij}^k são a espessura e as componentes das propriedades mecânicas da k -ésima lâmina do compósito no sistema x,y , que podem ser obtidas a partir da transformação do sistema principal de ortotropia \bar{x}, \bar{y} , pela relação:

$$Q_{11}^k = \bar{Q}_{11}^k \cos^4 \theta_k + 2(\bar{Q}_{12}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \bar{Q}_{22}^k \sin^4 \theta_k$$

$$Q_{12}^k = (\bar{Q}_{11}^k + \bar{Q}_{22}^k - 4\bar{Q}_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \bar{Q}_{12}^k (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k)$$

$$Q_{22}^k = \bar{Q}_{11}^k \sin^4 \theta_k + 2(\bar{Q}_{12}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \bar{Q}_{22}^k \cos^4 \theta_k$$

$$Q_{16}^k = (\bar{Q}_{11}^k - \bar{Q}_{12}^k - 2\bar{Q}_{66}^k) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (\bar{Q}_{12}^k - \bar{Q}_{22}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k$$

$$Q_{26}^k = (\bar{Q}_{11}^k - \bar{Q}_{12}^k - 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (\bar{Q}_{12}^k - \bar{Q}_{22}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k$$

$$Q_{66}^k = (\bar{Q}_{11}^k + \bar{Q}_{22}^k - 2\bar{Q}_{12}^k - 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \bar{Q}_{66}^k (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k)$$

com:

$$\bar{Q}_{11}^k = \frac{\bar{E}_1^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k}, \bar{Q}_{12}^k = \frac{\bar{\nu}_{12}^k \bar{E}_2^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k} = \frac{\bar{\nu}_{21}^k \bar{E}_2^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k}, \bar{Q}_{22}^k = \frac{\bar{E}_2^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k}, \bar{Q}_{66}^k = \bar{G}_{12}^k$$

onde as propriedades da lâmina k-ésima são: $(\bar{E}_1^k, \bar{E}_2^k)$, os módulos de elasticidade longitudinal segundo as direções principais 1 e 2 de ortotropia; $(\bar{G}_{12}^k, \bar{\nu}_{12}^k)$, o módulo de elasticidade transversal entre as direções 1 e 2 e o coeficiente de Poisson; θ_k , o ângulo entre os eixos x e \bar{x} , vide Figura 2.

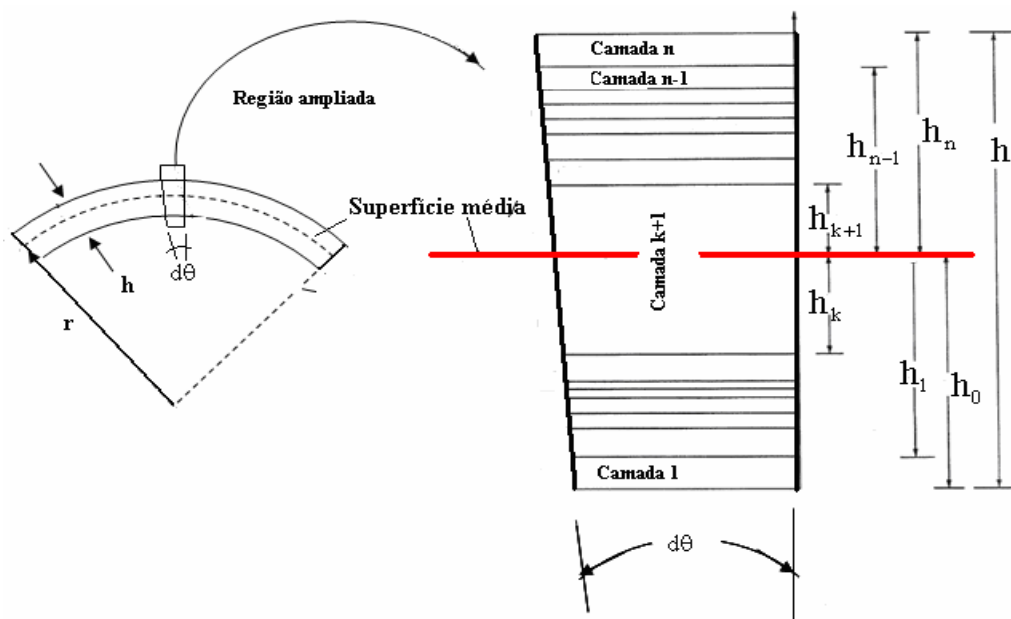


Figura 2: Detalhes geométricos das camadas no laminado

Neste trabalho são adotadas as mesmas interpolações para os campos de deslocamentos e deformações utilizadas por (Djoudi e Bahai, 2003) (no elemento finito de casca cilíndrica (CYS) para materiais homogêneos e isotrópicos). Esse elemento possui quatro nós com 5 graus de liberdade (mecânicos) por nó, sendo três translações (u, v, w) e duas rotações ($\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$), vide Figura 3a. (Convém notar que os graus de liberdade dos nós j e l não foram indicados para não saturar a figura), por isso as funções de forma possuem 20 constantes independentes.

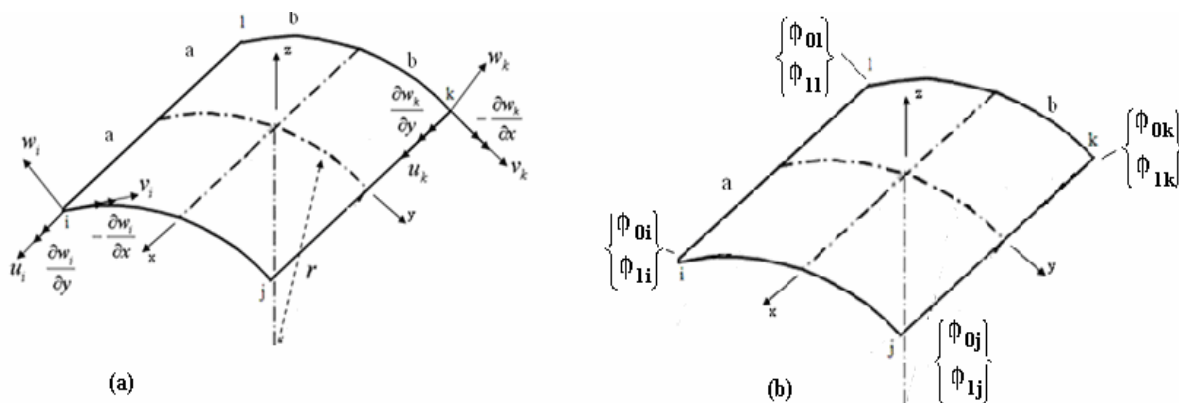


Figura 3: Graus de Liberdade da casca: a) elásticos, b) elétricos

Assim, as deformações ficam:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_7 + a_8 y \\ \varepsilon_y &= a_9 + a_{10} x - 1/r(a_{12} x^2 / 2 + a_{13} x^3 / 6 + a_{14} y x^2 / 2 + a_{15} y x^3 / 6) \\ \gamma_{xy} &= a_{11} - (a_{10} y) \\ X_x &= a_{12} + a_{13} x + a_{14} y + a_{15} y x \\ X_y &= a_{16} + a_{17} x + a_{18} y + a_{19} x y \\ X_{xy} &= a_{20} + (2a_{14} x + a_{15} x^2 + 2a_{17} y + a_{19} y^2) \end{aligned} \quad (3 \text{ a,b,c,d,e,f})$$

Já os deslocamentos e as rotações:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} &= [G_{11}(x, y)]\{\hat{a}\} + [G_{12}(x, y)]\{\hat{\alpha}\} \\ \begin{Bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{Bmatrix} &= [G_{21}(x, y)]\{\hat{a}\} + [G_{22}(x, y)]\{\hat{\alpha}\} \end{aligned} \quad (4a)$$

com:

$$\begin{aligned} \{\hat{a}\}^T &= \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{10}\}, \quad \{\hat{\alpha}\}^T = \{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{20}\}, \\ [G_{11}(x, y)] &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{y^2}{2r} & 0 & 1 & 0 & y & x & x \cdot y & 0 & -y \\ -\frac{y}{r} & -x \cdot \frac{y}{r} & -\frac{y^2}{2r} & 0 & 1 & -x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & x \cdot y \\ 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [G_{12}(x, y)] &= \begin{pmatrix} \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y^4}{24r} & 0 & -\frac{y^5}{120r} & -\frac{y^3}{12r} \\ \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y^3}{6r} & \frac{y^3 x}{6r} & \frac{y^4}{24r} & \frac{y^4}{24r} & x \cdot \frac{y^2}{4r} \\ 1 & -x \cdot \frac{y}{2} & -\frac{y^3}{6} & -x^2 \cdot \frac{y}{2} & -x^3 \cdot \frac{y}{6} & -\frac{y^2}{2} & -x \cdot \frac{y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & -\frac{x \cdot y^3}{6} & -x \cdot \frac{y}{2} \end{pmatrix}, \\ [G_{21}(x, y)] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [G_{22}(x, y)] &= \begin{pmatrix} 0 & -x & -\frac{x^2}{2} & -x \cdot y & -\frac{(x^2 \cdot y)}{2} & 0 & -\frac{y^2}{2} & 0 & -\frac{y^3}{6} & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -y & -x \cdot y & -\frac{y^2}{2} & -\frac{(x \cdot y^2)}{2} & -\frac{x}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Os deslocamentos da casca na forma matricial fica:

$$\{\delta\}^T = \left\{ u \quad v \quad w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\} = [G_u] \{a_i\} \quad (5 a)$$

onde:

$$[G_u] = \begin{bmatrix} G_{11}(x, y) & G_{12}(x, y) \\ G_{21}(x, y) & G_{22}(x, y) \end{bmatrix}$$

Quando as coordenadas de cada nó são substituídas na Eq. (5 a) então:

$$\{\delta_e\} = [C_d] \{a_i\} \quad (5 b)$$

onde:

$$\{\delta_e\}^T = \left\{ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad \frac{\partial w_j}{\partial y} \quad u_k \quad v_k \quad w_k \quad \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad \frac{\partial w_k}{\partial y} \quad u_l \quad v_l \quad w_l \quad \frac{\partial w_l}{\partial x} \quad \frac{\partial w_l}{\partial y} \right\}$$

As constantes (a_i) podem ser obtidas de:

$$\{a_i\} = [C_d]^{-1} \{\delta_e\} \quad (5 c)$$

A partir das equações (5 b) e (5 c) os deslocamentos e rotações de interesse podem ser escritos em função dos graus de liberdade do elemento resultando em:

$$\{\delta\} = [G_u] \cdot [C_d]^{-1} \{\delta_e\} \quad (5 d)$$

O vetor das deformações e curvaturas $[\psi]$ pode ser escrito em função dos graus de liberdade pela aplicação das relações Eq. (1) de uma forma apropriada nas linhas do vetor $\{\delta\}$ dado em 5d, resultando em:

$$\{\psi\} = [B_u] \{a_i\} \quad (6 a)$$

$$\{\psi\} = [B_u] [C_d]^{-1} \{\delta_e\} \quad (6 b)$$

Introduzindo-se a Eq. (8b) e a Eq. (7d) na Eq. (7e), a energia potencial fica:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_{uu}] \{\delta_e\} + \{\delta_e\}^T [\hat{K}_{uu}] \{\delta_e\} \quad (6 c)$$

onde as matrizes de rigidez da casca e da base elástica ficam:

$$[K_{uu}] = \int_A [C_d^{-1}]^T [B_u]^T [D] [B_u] [C_d^{-1}] dA \quad (7)$$

$$[\hat{K}_{uu}] = \int_A [C_d^{-1}]^T [G_u]^T [D_s] [G_u] [C_d^{-1}] dA \quad (8)$$

O cálculo das integrais da Eq. (7) e da Eq.(8) resulta em:

$$[K_{uu}] = [C_d^{-1}]^T \left\{ \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [B_u]^T [D] [B_u] dx dy \right\} [C_d^{-1}] = [C_d^{-1}]^T [Q] [C_d^{-1}] \quad (9)$$

$$[\hat{K}_{uu}] = [C_d^{-1}]^T \left\{ \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [G_u]^T [D_s] [G_u] dx dy \right\} [C_d^{-1}] = [C_d^{-1}]^T [Q_s] [C_d^{-1}] \quad (10)$$

Os valores explícitos da matriz Q na Eq. (9) podem ser calculados computando as contribuições dos efeitos de membrana e de flexão conforme discutido a seguir:

$$[Q] = \int_{-a-b}^a \int_b^b [B_m]^T [B_b]^T \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [C] \end{bmatrix} [B_m] dx dy \quad (11)$$

As matrizes B_m e B_b na Eq. (11) são obtidas a partir da Eq. (3), isto é:

$$[\psi_m] = [B_m] \{\bar{a}\}, [\psi_b] = [B_b] \{\bar{a}\}$$

com:

$$[B_m] = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2/2r & -x^3/6r & -yx^2/2r & -yx^3/6r \\ 0 & 0 & 0 & -y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{a}\}^T = \{a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15}\}$$

$$\{\bar{a}\}^T = \{a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \quad a_{16} \quad a_{17} \quad a_{18} \quad a_{19} \quad a_{20}\}$$

Após a integração na Eq.(11), seguida da superposição dos termos dos efeitos de membrana e de flexão, os elementos não-nulos das matrizes $[Q]$ e $[Q_s]$ são apresentados no Apêndice I.

O sistema algébrico do problema da casca cilíndrica pode ser obtido pelo acúmulo das contribuições de todos elementos finitos, resultando em::

$$[K_{uu}] \{U\} = \{F_u\} \quad (12)$$

Onde $\{U\}, \{F_u\}$ são os vetores de deslocamento e forças da estrutura, que reúne as contribuições de todos elementos finitos de cascas cilíndricas.

2.2 Efeito piezoelétrico no duto/painel laminado

A piezoeletricidade linear é regida pelas seguintes hipóteses:

- O campo elétrico é quase-estático e varia linearmente na direção da espessura da Lâmina;
- As equações da elasticidade linear estão acopladas com as equações de balanço de carga da eletrostática por intermédio de constantes piezoelétrica;
- Gradiente de polarização é zero, de forma que forças volumétricas elétricas estão ausentes;
- As equações constitutivas são a única fonte das interações eletromecânicas;
- Efeitos magnéticos são assumidos desprezíveis quando comparados com os efeitos elétricos;
- Variações devido a campos térmicos são admitidas desprezíveis.

As relações constitutivas da piezoeletricidade linear na k -ésima lâmina do compósito laminado, envolvendo as formas direta e reversa (conversiva), em coordenadas globais são dadas por:

$$\{\sigma^k\} = [C^k]\{\varepsilon^k\} - [d^k]\{E^k\} \quad (13)$$

$$\{D^k\} = [d^k]^T \{\varepsilon^k\} + [\kappa^k]\{E^k\} \quad (14)$$

Onde $\{\sigma^k\}$, $\{\varepsilon^k\}$, $\{E^k\}$ e $\{D^k\}$ são componentes de tensão, deformação, campo elétrico e deslocamento elétrico. Já $[C^k]$, $[d^k]$, $[\kappa^k]$ são as matrizes elástica, piezoeétrica e dielétricas.

O campo elétrico pode ser escrito em função do gradiente do potencial elétrico:

$$\{E^k\} = -\nabla\{\phi^k\} \quad (15)$$

Já a energia livre de Helmholtz (entalpia elétrica) pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\psi\}^T [D] \{\psi\} dA + \int_A \{\delta\}^T [D_s] \{\delta\} dA - \int_A \{\delta\}^T [f] \{\phi\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\phi\}^T [g] \{\phi\} dA \quad (16)$$

Onde

$$[f] = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [b] & [c] \end{bmatrix} \text{ e } [g] = \begin{bmatrix} [p] & [q] \\ [q] & [r] \end{bmatrix}$$

Com

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{31} \\ 0 & 0 & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{36} \end{bmatrix}, [b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{31} \\ 0 & 0 & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{36} \end{bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{31} \\ 0 & 0 & c_{32} \\ 0 & 0 & c_{36} \end{bmatrix}, [d^k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31}^k \\ 0 & 0 & d_{32}^k \\ 0 & 0 & d_{36}^k \end{bmatrix}$$

$$[p] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{66} \end{bmatrix}, [q] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 \\ q_{12} & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{66} \end{bmatrix}, [r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r_{66} \end{bmatrix}, [\kappa^k] = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^k & \kappa_{12}^k & 0 \\ \kappa_{12}^k & \kappa_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{66}^k \end{bmatrix} \quad (17)$$

e

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k - h_{k-1}) d_{ij}^k, \quad b_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k^2 - h_{k-1}^2) d_{ij}^k, \quad c_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k^3 - h_{k-1}^3) d_{ij}^k$$

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k - h_{k-1}) \kappa_{ij}^k, \quad q_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \kappa_{ij}^k, \quad r_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_{\text{camadas}}} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \kappa_{ij}^k \quad (17.b)$$

onde h_k e Q_{ij}^k são a espessura e as componentes das propriedades mecânicas da k -ésima lâmina do compósito no sistema x,y , que podem ser obtidas a partir da transformação do sistema principal de ortotropia \bar{x}, \bar{y} , pelas relações:

$$d_{31}^k = \bar{d}_{31}^k \cos^2 \theta_k + \bar{d}_{32}^k \sin^2 \theta_k, \quad d_{32}^k = \bar{d}_{32}^k \cos^2 \theta_k + \bar{d}_{31}^k \sin^2 \theta_k, \quad d_{36}^k = (\bar{d}_{31}^k - \bar{d}_{32}^k) \sin \theta_k \cos \theta_k,$$

$$d_{24}^k = \bar{d}_{24}^k \cos^2 \theta_k$$

$$\kappa_{11}^k = \bar{\kappa}_{11}^k \cos^2 \theta_k + \bar{\kappa}_{22}^k \sin^2 \theta_k, \kappa_{22}^k = \bar{\kappa}_{22}^k \cos^2 \theta_k + \bar{\kappa}_{11}^k \sin^2 \theta_k, \kappa_{12}^k = (\bar{\kappa}_{11}^k - \bar{\kappa}_{22}^k) \sin \theta_k \cos \theta_k$$

onde as propriedades da lâmina k-ésima são: $(\bar{d}_{ij}^k, \bar{\kappa}_{ij}^k)$, constantes piezoelétricas e di-elétricas segundo as direções principais 1 e 2 de ortotropia.

Admitindo-se uma interpolação linear nas três direções (radial, circunferencial e longitudinal) para o potencial elétrico, é gerado os graus de liberdade elétricos associados ao valor médio ϕ_0 e ao gradiente ϕ_1 do potencial elétrico, vide Figura 2b . Assim, interpolação do potencial elétrico é dada por:

$$\phi(x, y, z) = [L]\{\phi_e\} \tag{17 c}$$

Onde:

$$[L] = \{N_1 \quad zN_1 \quad N_2 \quad zN_2 \quad N_3 \quad zN_3 \quad N_4 \quad zN_4\}$$

$$\{\phi_e\}^T = \{\phi_{0i} \quad \phi_{1i} \quad \phi_{0j} \quad \phi_{1j} \quad \phi_{0k} \quad \phi_{1k} \quad \phi_{0l} \quad \phi_{1l}\}$$

$$N_1 = (1 + x/a)(1 + y/b)/4, \quad N_2 = (1 - x/a)(1 + y/b)/4,$$

$$N_3 = (1 - x/a)(1 - y/b)/4, \quad N_4 = (1 + x/a)(1 - y/b)/4$$

Introduzindo-se Eq. (6b), Eq. (17) na Eq. (16), a energia potencial discretizada fica:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_{uu}] \{\delta_e\} + \{\delta_e\}^T [\hat{K}_{uu}] \{\delta_e\} + \{\delta_e\}^T [K_{u\phi}] \{\phi_e\} + \frac{1}{2} \{\phi_e\}^T [K_{\phi\phi}] \{\phi_e\} \tag{18}$$

Onde $[K_{uu}]$ e $[\hat{K}_{uu}]$ já foram discutidas na seção 2.1. As demais matrizes na Eq. (18) podem ser escritas como:

$$[K_{u\phi}] = \int_A [C_d^{-1}]^T [B_u]^T [d_{u\phi}] [L] dA \tag{19}$$

$$[K_{\phi\phi}] = \int_A [L]^T [\kappa_{\phi\phi}] [L] dA \tag{20}$$

De uma forma mais específica, o cálculo das integrais na Eq. (19) e Eq.(20) pode ser efetuado como:

$$[K_{u\phi}] = [C_d^{-1}]^T \left\{ \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [[B_m]^T [B_b]^T \begin{bmatrix} [d_m] & [0] \\ [0] & [d_b] \end{bmatrix} [L] dx dy \right\} = [C_d^{-1}]^T [Q_{u\phi}] \tag{21}$$

$$[K_{\phi\phi}] = \left\{ \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [L]^T [\kappa_{\phi\phi}] [L] dx dy \right\} = [Q_{\phi\phi}] \tag{22}$$

Após o cálculo das integrais na Eq. (21) e Eq.(22), os valores explícitos das matrizes $[Q_{u\phi}]$ e $[Q_{\phi\phi}]$ podem ser obtidos e estão mostrados no Apêndice II.

O sistema algébrico do problema da casca piezoelétrica apoiada em base elástica fica:

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_\phi \end{Bmatrix} \tag{23}$$

3 CONCLUSÕES

Neste artigo foram deduzidas as formas explícitas das matrizes de rigidez elástica, piezoelétrica e di-elétrica para um elemento finito de casca cilíndrica. Para este fim, a formulação do elemento CYS, que é restrita a materiais homogêneos, isotrópicos e elásticos, foi revisitada e readequada para analisar cascas cilíndricas feitas de material multi-campo, que podem estar apoiadas em bases elásticas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Capes pelo suporte financeiro destinado a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Alzahrani, B.A., Alghamdi, A.A.A. Review of the mechanics of materials models for one-dimensional surface-bonded piezoelectric actuators. *Smart Mater. Structures*, 12: N1–N4, 2003.
- Benjeddou, A. Advances in piezoelectric Finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers and Structures*, 76: 347–363, 2000.
- Cantin G, Clough R.W. A curved cylindrical shell Finite element, *AIAA J.*, 6:1057–1062, 1968.
- Cowper G.R, Lindberg G.M. Olsen M.D. A shallow shell finite element of triangular shape, *Int. J. Solids Struct.*, 6:1133–1156, 1979.
- Chang-Qing Chen, Ya-Peng Shen and Xiao-Ming Wang, Exact solution of orthotropic cylindrical shell with piezoelectric layers under cylindrical bending. *International Journal of Solid Structures*: 33, 4481–4494, 1996.
- Djoudi, M.S., Bahai, H. A cylindrical strain-based shell element for vibration analysis of shell structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:1947–1961, 2004a.
- Djoudi, M.S., Bahai, H. Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with openings. *Thin-Walled Structures*, 42:575–588, 2004b.
- Djoudi, M.S., Bahai, H., A shallow shell finite element for the linear and non-linear analysis of cylindrical shells. *Engineering Structures*, 25: 769–778, 2003.
- Donnell, L. H. Stability of Thin Walled Tubes Under Torsion. NACA Rep.479, 1933.
- Donnell, L. H. A discussion of thin shell theory. Proceedings of the Fifth International Congress of Applied Mechanics, 1938.
- Fafart M; Dhatt G, Batoz J. L. A new descrit Kirchhoff plate/Shell element with procedure. *Computers and Structures*, 31:591–606, 1989.
- Flügge, W. Stress in shells. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- Fulton R.E, Epink R.T, Walz J.E. The accuracy of finite element method in continuum problems, Proceedings of the Fifth US National Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, p. 272., 1966.
- Gupta, K.M. An orthotropic adaptive shallow cylindrical shell on elastic foundation. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 2(1), 2010
- Gopinathan, S.V., Varadan, V.V., Varadan, V.K. A review and critique of theories for piezoelectric laminates. *Smart Mater. Struct.*, 9: 24–48, 2000
- Heyliger Paul. “A note on the static behavior of simply-supported laminated piezoelectric Cylinders. *International Journal of Solid Structures*, 34:3781–3794, 1997.

- Hrennikof . A, Tezcan S.S. Analysis of cylindrical shells by the finite element method, Symposium of Problems of Interdependence of Design and Construction of Large Span Shells for Industrial and Civic Buildings, Leningrad,1966.
- Jun-Qiang Zhu, Changqing Chen and Ya – Peng Shen. Three-dimensional analysis of the dynamic stability of piezoelectric circular cylindrical shells. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22:401-411,2003.
- Maurini, C..., Pouget, J., dell’Isola, F. On a model of layered piezoelectric beams including transverse stress effect. *International Journal of Solids and Structures*, 41:4473–4502,2004.
- Mackerle, J. Smart materials and structures—a finite element approach—an addendum: a bibliography (1997–2002). *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng*, 11:707–744,2003
- Sabir, A. Strain-based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders. *Nuclear engineering and design*, 76:111-120,1984.
- Sheng, G.G. , Wang, X . Active control of functionally graded laminated cylindrical shells, *Composite Structures*, v. 90, 448–457. theory. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53-92,2009.
- Reddy, J.N. Mechanics of laminated composite plate and shells. Second Edition. CRC Press, 2004.
- Soebel, W. Vibrations of Shells and Plates, Marcel Dekker, New York, 1981.
- Ugural, A. Stress in beams, plates, and shells. Third edition, CRC Press, New York,2009.

Apêndice I

Nesta seção são apresentados os resultados da dedução dos valores não-nulos das matrizes $[Q]$ e $[Q]_s$ que contribuem para a matriz de rigidez dos efeitos elásticos da casca e da base elástica.

$$\begin{aligned}
 Q(7,7) &= 4A_{11}ab, \quad Q(7,9) = 4A_{12}ab, \quad Q(7,11) = 4A_{16}ab, \\
 Q(7,12) &= -(2/3)A_{12}a^3b/r - 4B_{11}ab, \quad Q(7,15) = -4B_{16}a^3b/3, \\
 Q(7,16) &= -4B_{12}ab, \quad Q(7,19) = -4B_{16}ab^3/3, \quad Q(7,20) = -4B_{16}ab \\
 Q(8,8) &= 4A_{11}ab^3/3, \quad Q(8,10) = -2A_{16}ab^3/3 \quad Q(8,14) = -(2/9)A_{12}a^3b^3/r - 4B_{11}ab^3/3, \\
 Q(8,17) &= -8B_{16}ab^3/3, \quad Q(8,18) = -4B_{12}ab^3/3 \\
 Q(9,9) &= 4A_{22}ab, \quad Q(9,11) = 4A_{26}ab, \quad Q(9,12) = -(2/3)A_{22}a^3b/r - 4B_{12}ab, \\
 Q(9,15) &= -4B_{26}a^3b/3, \\
 Q(9,16) &= -4B_{22}ab, \quad Q(9,19) = -4B_{26}ab^3/3, \quad Q(9,20) = -4B_{26}ab \\
 Q(10,10) &= (4/3)A_{22}a^3b/3 + 4A_{66}ab^3/3 + 4B_{12}ab^3/3, \\
 Q(10,13) &= -(2/15)A_{22}a^5b/r - 4B_{11}a^3b/3, \\
 Q(10,14) &= -8B_{26}a^3b/3 + 2B_{16}ab^3/3 + A_{26}a^3b^3/(9r), \quad Q(10,17) = -4B_{22}a^3b/3 + 4B_{66}ab^3/3 \\
 Q(10,18) &= 2B_{26}ab^3/3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(11,11) &= 4A_{66}ab, \quad Q(11,12) = -2A_{26}a^3b/(3r) - 4B_{16}ab, \\
Q(11,15) &= -4B_{66}a^3b/3, \quad Q(11,16) = -4B_{26}ab, \quad Q(11,19) = -4B_{66}ab^3/3, \quad Q(11,20) = -4B_{66}ab \\
Q(12,12) &= 4C_{11}ab + A_{22}a^5b/(5r^2) + 4B_{12}a^5b/(3r), \quad Q(12,15) = 4C_{16}a^3b/3 + 2B_{26}a^5b/(5r) \\
Q(12,16) &= 4C_{12}ab + 2B_{22}a^3b/(3r), \quad Q(12,19) = 2B_{26}a^3b/(9r) + 4C_{16}ab^3/3, \\
Q(12,20) &= 2B_{26}a^3b/(3r), \\
Q(13,13) &= (4/3)C_{11}a^3b + A_{22}a^7b/(63r^2) + 4B_{12}a^5b/(15r), \\
Q(13,14) &= 4C_{16}a^3b/3 + 4B_{26}a^5b/(15r), \quad Q(13,17) = (4/3)C_{12}a^3b + 2B_{22}a^5b/(15r), \\
Q(14,14) &= (4/3)C_{11}ab^3 + (16/3)C_{66}a^3b + A_{22}a^5b^3/(15r^2) + 4B_{12}a^3b^3/(9r), \\
Q(14,17) &= (8/3)ab(C_{16}b^2 + C_{26}a^2) + 4B_{26}a^3b^3/(9r), \\
Q(14,18) &= (4/3)C_{12}ab^3 + 2B_{22}a^3b^3/(9r), \\
Q(15,15) &= (4/9)C_{11}a^3b^3 + (4/5)C_{66}a^5b + A_{22}a^7b^3/(189r^2) + 4B_{12}a^5b^3/(45r), \\
Q(15,16) &= 4C_{26}a^3b/3, \quad Q(15,19) = (4/9)C_{12}a^3b^3 + (4/9)C_{66}a^3b^3 + 2B_{22}a^5b^3/(45r), \\
Q(15,20) &= (4/3)C_{66}a^3b, \\
Q(16,16) &= 4C_{22}ab, \quad Q(16,19) = 4C_{26}ab^3/3, \quad Q(16,20) = 4C_{26}ab, \\
Q(17,17) &= (16/3)C_{66}ab^3 + (4/3)C_{22}a^3b, \quad Q(17,18) = (8/3)C_{26}ab^3, \\
Q(18,18) &= (4/3)C_{22}ab^3, \\
Q(19,19) &= (4/9)C_{22}a^3b^3 + (4/5)C_{66}ab^5, \quad Q(19,20) = (4/3)C_{66}ab^3, \\
Q(20,20) &= 4C_{66}ab, \\
Q_s(12,12) &= a^3b(3k_s a^2 + 20G_s)/15, \quad Q_s(12,16) = k_s a^3b^3/9, \\
Q_s(13,13) &= a^5b(5k_s a^2 + 63G_s)/315, \quad Q_s(13,17) = a^3b^3(k_s a^2 + 5G_s)/45, \\
Q_s(14,14) &= k_s a^5b^3/15 + G_s a^5b/5 + 4G_s a^3b^3/9, \quad Q_s(14,18) = a^3b^3(k_s b^2 + 5G_s)/45, \\
Q_s(15,15) &= a^5b(5k_s a^2 b^2 + 15G_s * a^2 + 63G_s * b^2)/945, \\
Q_s(15,19) &= a^3b^3(k_s a^2 b^2 + 5G_s * a^2 + 5G_s * b^2)/225, \\
Q_s(15,20) &= a^3b(k_s a^2 b^2 + 3G_s * a^2 + 5G_s * b^2)/45, \quad Q_s(16,16) = ab^3(3k_s b^2 + 20G_s)/15, \\
Q_s(17,17) &= k_s a^3b^3/15 + G_s ab^5/5 + 4G_s a^3b^3/9, \quad Q_s(18,18) = ab^5(5k_s b^2 + 63G_s)/315, \\
Q_s(19,19) &= ab^5(5k_s a^2 b^2 + 63G_s a^2 + 15G_s b^2)/945, \\
Q_s(19,20) &= ab^3(k_s a^2 b^2 + 5G_s a^2 + 3G_s b^2)/45, \quad Q_s(20,20) = k_s a^3b^3/9 + G_s a^3b/3 + G_s ab^3/3
\end{aligned}$$

Onde coeficientes A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} foram definidos na Eq. (17.b). Os valores de a e b estão associados aos semi-comprimentos longitudinal e circunferencial do elemento. k_s, G_s são os parâmetros de rigidez da fundação de Pasternak.

Apêndice II

Nesta seção são apresentados os resultados da dedução dos valores não-nulos das matrizes $[Q_{u\phi}]$ e $[Q_{\phi\phi}]$ que contribuem para as matrizes de rigidez piezoelétrica e di-elétrica da casca

$$Q_{u\phi}(7,2) = Q_{u\phi}(7,4) = Q_{u\phi}(7,6) = Q_{u\phi}(7,8) = b_{31}ab$$

$$Q_{u\phi}(8,2) = Q_{u\phi}(8,4) = -Q_{u\phi}(8,6) = -Q_{u\phi}(8,8) = b_{31}ab^2/3$$

$$Q_{u\phi}(9,2) = Q_{u\phi}(9,4) = Q_{u\phi}(9,6) = Q_{u\phi}(9,8) = b_{32}ab$$

$$Q_{u\phi}(10,2) = (2ab_{32} - bb_{36})ab/6, \quad Q_{u\phi}(10,4) = -(2ab_{32} + bb_{36})ab/6$$

$$Q_{u\phi}(10,6) = -Q_{u\phi}(10,2), \quad Q_{u\phi}(10,8) = -Q_{u\phi}(10,4)$$

$$Q_{u\phi}(11,2) = Q_{u\phi}(11,4) = Q_{u\phi}(11,6) = Q_{u\phi}(11,8) = b_{36}ab$$

$$Q_{u\phi}(12,2) = Q_{u\phi}(12,4) = Q_{u\phi}(12,6) = Q_{u\phi}(12,8) = -b_{32}a^3b/(6r) - c_{31}ab$$

$$Q_{u\phi}(13,2) = -Q_{u\phi}(13,4) = -Q_{u\phi}(13,6) = Q_{u\phi}(13,8) = -b_{32}a^4b/(30r) - c_{31}a^2b/3$$

$$Q_{u\phi}(14,2) = -Q_{u\phi}(14,6) = -b_{32}a^3b^3/(18r) - (2c_{36}a + c_{31}b)ab/3$$

$$Q_{u\phi}(14,4) = -Q_{u\phi}(14,8) = -b_{32}a^3b^3/(18r) + (2c_{36}a - c_{31}b)ab/3$$

$$Q_{u\phi}(15,2) = Q_{u\phi}(15,6) = -b_{32}a^4b^3/(90r) - (3c_{36}a + c_{31}b)a^2b/9$$

$$Q_{u\phi}(15,4) = Q_{u\phi}(15,8) = b_{32}a^4b^3/(90r) - (3c_{36}a - c_{31}b)a^2b/9$$

$$Q_{u\phi}(16,2) = Q_{u\phi}(16,4) = Q_{u\phi}(16,6) = -c_{32}ab, \quad Q_{u\phi}(16,8) = -2c_{32}ab$$

$$Q_{u\phi}(17,2) = -Q_{u\phi}(17,6) = -(c_{32}a + 2c_{36}b)ab/3,$$

$$Q_{u\phi}(17,4) = -Q_{u\phi}(17,8) = (c_{32}a - 2c_{36}b)ab/3$$

$$Q_{u\phi}(18,2) = Q_{u\phi}(18,4) = -Q_{u\phi}(18,6) = -Q_{u\phi}(18,8) = -c_{32}ab^2/3$$

$$Q_{u\phi}(19,2) = -Q_{u\phi}(19,6) = -(3c_{36}b + c_{32}a)a^2b/9$$

$$Q_{u\phi}(19,4) = -Q_{u\phi}(19,8) = (-3c_{36}b + c_{32}a)a^2b/9$$

$$Q_{u\phi}(20,2) = Q_{u\phi}(20,4) = Q_{u\phi}(20,6) = Q_{u\phi}(20,8) = -c_{36}ab$$

$$Q_{\phi\phi}(1,1) = -Q_{\phi\phi}(1,5) = Q_{\phi\phi}(5,5) = (2a^2p_{22} + 3abp_{11} + 2b^2p_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(1,2) = (2a^2 * q_{22} + 3abq_{12} + 2b^2 * q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(1,4) = (a^2q_{22} - 2b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(1,6) = -(a^2q_{22} + 3abq_{12} + b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(1,8) = (-2a^2q_{22} + b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(1,3) = (a^2q_{22} - 2b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(1,7) = (-2a^2q_{22} + b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(3,4) = (2a^2q_{22} - 3abq_{12} + 2b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(3,6) = (-a^2q_{22} + b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(3,8) = (-a^2q_{22} + abq_{12} + b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(5,6) = (2a^2q_{22} + 3abq_{12} + 2b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(5,8) = (a^2q_{22} - 2b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(7,8) = (2a^2q_{22} - 3abq_{12} + 2b^2q_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(3,3) = Q_{\phi\phi}(7,7) = (2a^2p_{22} - 3abp_{12} + 2b^2p_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(3,5) = (-a^2p_{22} + b^2p_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(3,7) = (-2a^2p_{22} + abp_{12} + b^2p_{11})/(6ab)$$

$$Q_{\phi\phi}(2,2) = (2a^2r_{22} + 3abr_{12} + 2b^2r_{11})/(6ab) + 4ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(2,4) = (a^2r_{22} - 2b^2r_{11})/(6ab) + 2ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(2,8) = (-2a^2r_{22} + 2b^2r_{11})/(6ab) + 4ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(4,4) = (2a^2r_{22} - 3abr_{12} + 2b^2r_{11})/(6ab) + 4ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(4,6) = (-a^2r_{22} + b^2r_{11})/(6ab) + 2ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(4,8) = (-a^2r_{22} + abr_{12} + b^2r_{11})/(6ab) + ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(6,6) = (2a^2r_{22} + 3abr_{12} + 2b^2r_{11})/(6ab) + 4ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(6,8) = (a^2r_{22} - 2b^2r_{11})/(6ab) + 2ab/9$$

$$Q_{\phi\phi}(8,8) = (2a^2r_{22} - 3abr_{12} + 2b^2r_{11})/(6ab) + 4ab/9$$

Onde coeficientes q_{ij}, p_{ij}, r_{ij} foram definidos na Eq. (17.b).