

## DETERMINAÇÃO DE MODOS NÃO-LINEARES DE VIBRAÇÃO ATRAVÉS DE SEÇÕES DE POINCARÉ

Diego Orlando<sup>a</sup>, Paulo B. Gonçalves<sup>b</sup>, Giuseppe Rega<sup>c</sup> e Stefano Lenci<sup>d</sup>

<sup>a</sup>*Tecgraf - Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, [dorlando@tecgraf.puc-rio.br](mailto:dorlando@tecgraf.puc-rio.br)*

<sup>b</sup>*Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasi, [paulo@puc-rio.br](mailto:paulo@puc-rio.br)*

<sup>c</sup>*Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Sapineza Università di Roma, 00197, Roma, Italia, [giuseppe.rega@uniroma1.it](mailto:giuseppe.rega@uniroma1.it)*

<sup>d</sup>*Dipartimento di Architettura, Costruzioni e Strutture, Università Politecnica delle Marche, 60131, Ancona, Italia, [lenci@mta01.univpm.it](mailto:lenci@mta01.univpm.it)*

**Palavras-chave:** Modos não-lineares de vibração, seções de Poincaré, acoplamento modal.

**Resumo.** O objetivo deste trabalho é identificar os modos não-lineares de vibração através das seções de Poincaré em sistemas estruturais que apresentam o fenômeno de acoplamento entre os modos de flambagem. Uma característica usual de estruturas com acoplamento modal é a existência de diversas simetrias. Estas simetrias levam não só à coincidência de cargas críticas, mas também à coincidência de frequências naturais, levando a ressonâncias internas, e à existência de mais modos de vibração que o número de graus de liberdade, os chamados modos não-lineares de vibração. O conceito original de modos não-lineares é considerado como uma extensão dos modos lineares, e tem se tornado uma ferramenta útil na análise de vibrações não-lineares. Conforme o conceito original, os modos não-lineares são movimentos síncronos que apresentam uma relação bem definida entre as coordenadas generalizadas, isto é, todas as coordenadas generalizadas executam movimentos de mesmo período, passando pela posição de equilíbrio e alcançando seus deslocamentos máximos simultaneamente. O conceito original de modos não-lineares foi modificado nas últimas décadas e hoje se define um modo não-linear como um movimento em vibração livre que se realiza em uma variedade bidimensional invariante inserida no espaço de fase do sistema. Como as variedades são invariantes, isso significa que, se as condições iniciais estão em uma dessas variedades, o movimento correspondente permanece nesta variedade. A vantagem dessa definição é que ela incorpora a definição original como um caso particular e é apropriada para sistemas conservativos e não-conservativos. Uma forma eficiente de se determinar numericamente a existência dos modos não-lineares são as seções de Poincaré. Aplicando as técnicas de aproximação das seções de Poincaré, pode-se determinar analiticamente o fluxo global do sistema dinâmico suficientemente próximo ao modo normal, e assim obter-se uma descrição completa e mais detalhada dos modos não-lineares e de sua estabilidade. O presente trabalho revela que é possível identificar todos os modos não-lineares de vibração através das seções de Poincaré. A metodologia computacional empregada para a determinação das seções de Poincaré é de baixo custo computacional e pode ser estendida para outros sistemas estruturais discretos.

## 1 INTRODUÇÃO

A busca por estruturas mais econômicas tem levado a sistemas estruturais cada vez mais leves e, conseqüentemente, a elementos estruturais mais esbeltos. Quando se aumenta a esbeltez de um dado elemento estrutural, o seu mecanismo de colapso pode sofrer significativas mudanças qualitativas. Por exemplo, à medida que uma coluna se torna mais esbelta, em vez da ruína ocorrer por se atingir à capacidade de carga da seção, esta pode ocorrer por perda de estabilidade e conseqüente aparecimento de grandes deflexões. Assim, para se projetar uma estrutura esbelta, deve-se usar o chamado critério de estabilidade.

Em elementos estruturais esbeltos, a não-linearidade geométrica é muito importante e dá origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas lineares. Estes fenômenos incluem a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos de máximo e mínimo ao longo do caminho não-linear de equilíbrio (pontos limite) onde a estrutura pode exibir saltos dinâmicos.

A compreensão do fenômeno de flambagem em sistemas estruturais passa pela determinação da carga de flambagem (carga crítica e modo crítico), da solução pré-flambagem (solução fundamental) e das soluções pós-flambagem (soluções pós-críticas e soluções secundárias), Croll e Walker (1972).

A pedra fundamental da análise estrutural moderna pós-flambagem é o trabalho de Koiter (1967), onde se mostra a influência de imperfeições geométricas iniciais no comportamento pós-flambagem de sistemas estruturais, na capacidade de carga da estrutura e na reposta estrutural não-linear. A teoria inicial pós-flambagem de Koiter foi posteriormente detalhada e aplicada por, entre outros, Chilver (1972), Croll e Walker (1972) e Thompson e Hunt (1973) na Inglaterra e Budiansky (1974) e Hutchinson (1974) nos Estados Unidos. Estes trabalhos são à base da moderna teoria de estabilidade estrutural (El Naschie, 1990; Bazant e Cedolin, 1991). O principal mérito desta teoria consiste em explicar como a análise pós-flambagem pode ajudar no entendimento do comportamento não-linear de estruturas suscetíveis a flambagem.

Isto é particularmente importante na análise de sistemas sujeitos a bifurcação simétrica instável e assimétrica. Nestes sistemas, para cargas inferiores à carga teórica de flambagem tem-se, supostamente, que o sistema está em uma configuração segura, já que o equilíbrio, segundo uma análise local da estabilidade, é estável. Contudo isso não é completamente verdade. O sistema pode flambar para níveis de carga muito inferiores à carga crítica devido ao efeito simultâneo de imperfeições iniciais e perturbações dinâmicas. Para níveis de carregamento inferiores à carga crítica tais sistemas exibem mais de um ponto de equilíbrio, sendo a posição de equilíbrio estável pré-flambagem rodeada por pontos de sela, pontos de equilíbrio instável, que definem a fronteira do vale potencial pré-flambagem. Assim se as perturbações ultrapassarem a fronteira do vale pré-flambagem, a resposta pode divergir para uma nova posição de equilíbrio ou para infinito. Neste caso a estrutura perde a estabilidade para cargas inferiores à carga crítica da estrutura. Esta região segura decresce com o aumento da carga estática e se torna nula no ponto crítico, assim a carga crítica é apenas um limite superior da capacidade de carga da estrutura. As imperfeições diminuem a carga teórica de flambagem e ao mesmo tempo mudam a topologia da energia potencial do sistema, diminuindo a região segura e mudando conseqüentemente seu comportamento dinâmico não-linear e sua estabilidade global (Gonçalves et al., 2007). Estruturas sujeitas a bifurcação simétrica instável ou assimétrica são conhecidas como estruturas sensíveis a imperfeições.

O entendimento do comportamento global de sistemas estruturais com vários graus de liberdade com comportamento pós-crítico instável é particularmente importante, pois tais

sistemas podem ainda apresentar acoplamento modal, ou seja, a interação de diferentes modos com cargas de flambagem muito próximas ou iguais, levando ao surgimento de novos e inesperados caminhos de equilíbrio.

Existem muitas estruturas para as quais a diferença entre as cargas críticas associadas a diferentes modos de flambagem é muito pequena ou nula. Tais estruturas apresentam frequentemente o fenômeno de acoplamento modal ou interação modal. Essencialmente, o que acontece é que duas soluções pós-críticas distintas, cada uma delas associada a um modo de flambagem, emergem de dois pontos críticos que são muito próximos ou coincidentes. Em virtude da não-linearidade, podem surgir novas soluções pós-críticas associadas a soluções acopladas com comportamento muitas vezes distinto do comportamento associado às soluções desacopladas (Augusti, 1964; Chilver e Johns, 1969; Croll e Walker, 1972; Thompson e Hunt, 1984; Bazant e Cedolin, 1991), mudando substancialmente o comportamento da estrutura.

O acoplamento modal é um fenômeno de grande importância na análise da estabilidade de estruturas, particularmente no estudo da estabilidade de placas, cascas, perfis de chapa dobrada a frio e alguns pórticos, como mostram os trabalhos de Bazant e Cedolin (1991), Brubak e Hellesland (2007), Chen e Yu (2006), Dinis et al. (2007), Kiymaz (2005), Kolakowski (2007), Quin et al. (2007) e Tvergaard (1973), dentre outros. Um caso extremo é a casca cilíndrica sob compressão axial, que pode exibir para certas geometrias um número infinito de cargas de flambagem coincidentes (Brush e Almroth, 1975; El Naschie, 1990; Pignataro et al., 1991; Thompson e Hunt, 1984).

Em alguns casos, a solução segura pré-flambagem pode ser circundada por vários pontos de sela, conduzindo a várias bifurcações locais e globais e, conseqüentemente, a uma topologia complexa no espaço de fase. O comportamento deste tipo de estrutura pode tornar-se ainda mais complexo se houver frequências naturais coincidentes ou quase coincidentes, levando o sistema a uma possível ressonância interna (Del Prado, 1999; e Gonçalves e Del Prado, 2005).

Muitas das soluções apresentadas na literatura, em virtude da solução modal adotada, necessitam considerar um número elevado de modos para se obter a convergência do caminho pós-crítico (Yamaki, 1984). Entretanto, vários estudos nas últimas décadas revelam que, desde que sejam retidos os modos corretos que expressam o necessário acoplamento modal e a conseqüente quebra de simetria, podem-se construir modelos simplificados com um número razoavelmente pequeno de graus de liberdade que sejam capazes de descrever qualitativamente e quantitativamente o comportamento não-linear de sistemas estruturais. Contribuições neste sentido foram apresentadas por Batista (1979), Antonini (1981), Cowell e Hunt (1985), Hunt et al. (1986), Gonçalves (1987), Santee (1988) e Del Prado (2001).

Na literatura pode-se destacar o modelo clássico de Augusti (1964), por representar uma grande classe de problemas estruturais com interação modal. O estudo detalhado deste modelo pode ser encontrado em Croll e Walker (1972), Bazant e Cedolin (1991), Del Prado (1999) e Raftoyiannis e Kounadis (2000), dentre outros. O modelo de Augusti apresenta duas cargas críticas iguais associadas a dois modos de flambagem distintos. Quando considerados desacoplados, esses modos levam a um comportamento pós-crítico estável (bifurcação simétrica estável). Porém, quando se considera o acoplamento entre os dois modos, as soluções pós-críticas desacopladas tornam-se instáveis e surgem novas soluções pós-críticas instáveis que passam a delimitar as oscilações da estrutura no vale pré-flambagem.

Embora existam muitos trabalhos publicados sobre acoplamento modal na presença de cargas estáticas, sua influência no comportamento dinâmico tem sido objeto de poucos estudos, sendo esta uma área que precisa ser mais pesquisada devido à sua importância na engenharia estrutural. A análise da instabilidade dinâmica, apesar de sua grande importância

técnica, tem recebido pouca atenção na literatura. Na verdade pouco se conhece ainda hoje sobre o comportamento não-linear e perda de estabilidade de estruturas sob cargas dinâmicas.

No âmbito da dinâmica não-linear de sistemas com interação modal e sujeitos a bifurcações instáveis, a região segura da solução fundamental é delimitada pelas órbitas dos pontos de sela das soluções pós-flambagem e corresponde ao vale potencial pré-flambagem. O objetivo do projeto estrutural é preservar a integridade da configuração pré-flambagem. Porém, muitas vezes, a identificação desta região segura não é trivial, particularmente quando se tem a presença de imperfeições geométricas e perturbações dinâmicas. Assim, para quantificar a integridade dinâmica destes sistemas, é necessária uma análise paramétrica da evolução destas regiões seguras (bacias seguras de atração) no espaço de fase (Lansbury e Thompson, 1992; Rega e Lenci, 2005; Soliman e Gonçalves, 2003). Para sistemas conservativos, a análise da região segura é realizada usando-se as ferramentas e conceitos da mecânica Hamiltoniana (Arnold, 1989; Greenwood, 2003; Meirovitch, 2003).

Uma característica usual de estruturas com acoplamento modal é a existência de diversas simetrias (Hunt et al., 1986). Estas simetrias levam não só à coincidência de cargas críticas, mas também à coincidência de frequências naturais, levando a ressonâncias internas, e à existência de mais modos de vibração que o número de graus de liberdade, os chamados modos não-lineares de vibração. O conceito de modos não-lineares, apresentado inicialmente por Rosenberg (1961, 1962, 1966), é considerado como uma extensão dos modos lineares, e tem se tornado uma ferramenta útil na análise de vibrações não-lineares. De acordo com Rosenberg, os modos não-lineares são movimentos síncronos que apresentam uma relação bem definida entre as coordenadas generalizadas, isto é, todas as coordenadas generalizadas executam movimentos de mesmo período, passando pela posição de equilíbrio e alcançando seus deslocamentos máximos simultaneamente. O conceito original de modos não-lineares apresentado por Rosenberg foi modificado por Shaw e Pierre (1991) que definiram um modo não-linear como um movimento em vibração livre que se realiza em uma variedade bidimensional invariante inserida no espaço de fase do sistema. Como as variedades são invariantes, isso significa que, se as condições iniciais estão em uma dessas variedades, o movimento correspondente permanece nesta variedade. A vantagem dessa definição é que ela incorpora a definição de Rosenberg como um caso particular e é apropriada para sistemas conservativos e não-conservativos. Vakakis tem também contribuído bastante para o entendimento dos modos não-lineares e sua aplicação em engenharia (Vakakis, 1991; Vakakis, 1997). Outras contribuições importantes incluem os trabalhos de Nayfeh (1995), Manevitch (2001) e Adrianov (2008). No Brasil, devem-se destacar os trabalhos de Mazzilli e colaboradores na determinação de modos não-lineares, usando o método dos elementos finitos (Mazzilli e Baracho Neto, 2002).

O objetivo do presente trabalho é mostrar que é possível identificar todos os modos não-lineares de vibração através das seções de Poincaré. Explicitando que a metodologia computacional empregada para a determinação das seções de Poincaré é de baixo custo computacional e pode ser estendida para outros sistemas estruturais discretos.

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A Figura 1(a) ilustra o modelo de Augusti. O modelo é um pêndulo espacial invertido composto de uma barra rígida de comprimento  $l$ , com uma massa  $m$  acoplada na extremidade superior e rotulada na base, com os deslocamentos laterais restritos por duas molas lineares rotacionais,  $k_1$  e  $k_2$ , que se encontram inicialmente em dois planos perpendiculares e giram com a própria barra. Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  medem as deformações das

molares rotacionais e foram escolhidos como os dois graus de liberdade do modelo (Figura 1(b)).

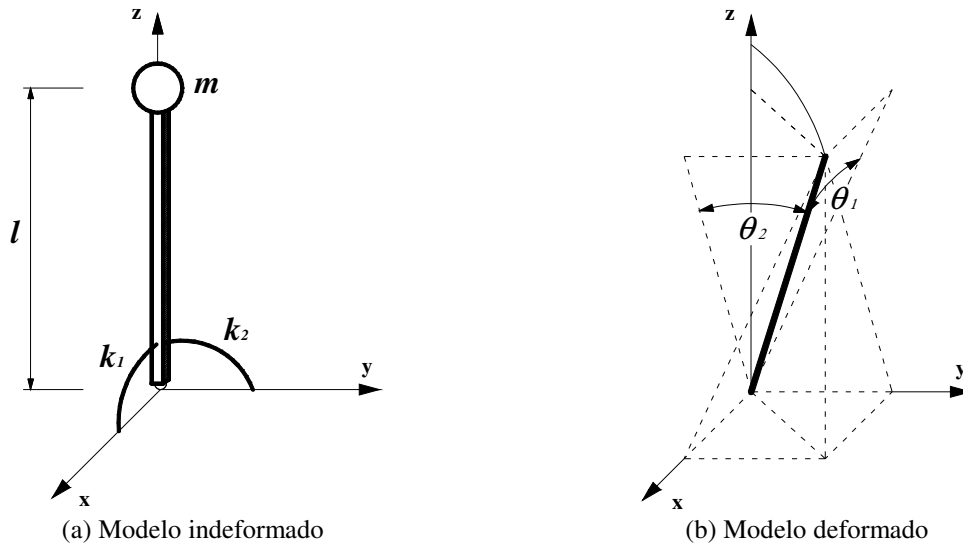


Figura 1: Modelo de Augusti

A energia potencial total do sistema é dada por:

$$\bar{V} = \frac{V}{ml^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_2^2 - \omega_p^2 (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}) \quad (1)$$

onde  $P = mg$ ,  $\lambda = P/Pcr$ ,  $\omega_p^2 = g/l$  (frequência natural de um pêndulo simples),  $k/ml^2 = \omega_p^2/\lambda$ ,  $k_1 = k_2 = k$  e  $Pcr_1 = Pcr_2 = Pcr = k/l$ .

Já a energia cinética é dada por:

$$\bar{T} = \frac{T}{ml^2} = \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2)^2}{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 1} \right) \quad (2)$$

A mecânica Lagrangiana descreve o movimento de um sistema mecânico por meio de sua configuração no espaço. Na mecânica, a função:

$$L(\theta_i, \dot{\theta}_i) = \bar{T} - \bar{V} = \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2)^2}{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 1} \right) - \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_2^2 + \omega_p^2 (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2})$$

é conhecida como a função de Lagrange ou Lagrangiano, onde  $\theta_i$  são as coordenadas generalizadas,  $\dot{\theta}_i$  as velocidades generalizadas,  $\partial L/\partial \theta_i = \dot{p}_i$  as forças generalizadas e  $\partial L/\partial \dot{\theta}_i = p_i$  as quantidades de movimento generalizadas.

As equações de movimento do sistema são obtidas, usando o princípio de Hamilton, onde a evolução de  $\theta_i$  com o tempo é relacionada às equações de movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(\bar{T})}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial(\bar{T})}{\partial \theta_i} + \frac{\partial(\bar{V})}{\partial \theta_i} = 0 \quad (4)$$

Para o modelo de Augusti as equações de movimento em termos das coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_1(-\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^4 \theta_2) \\ & + \ddot{\theta}_2(-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1^2(-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^4 \theta_2 \\ & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2) + \dot{\theta}_2^2(\cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 \\ & - \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 + 2 \cos^3 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cos^4 \theta_2 \sin \theta_1) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2(2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 - 2 \cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2)) \\ & + \left( \alpha \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_1 - \phi_1) - \omega_p^2 \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} \right) (1 - 2 \cos^2 \theta_1 \\ & - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_2(-\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^4 \theta_2) \\ & + \ddot{\theta}_1(-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_2^2(-\cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ & + \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1^2(\cos \theta_2 \sin \theta_2 - 2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ & - \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2(2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^4 \theta_2)) \\ & + \left( \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_2 - \phi_2) - \omega_p^2 \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} \right) (1 - 2 \cos^2 \theta_1 \\ & - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

O sistema de equações de movimento de Lagrange (5-6) é equivalente ao sistema de  $2n$  equações de primeira ordem, conhecidas como equações de Hamilton, a saber:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano, que, com base na dupla transformação de Legendre, pode ser escrito como

$$H = p_1 \dot{\theta}_1 + p_2 \dot{\theta}_2 - L \quad (8)$$

Assim, para o modelo de Augusti, obtém-se:

$$\begin{aligned}
H = & p_1 \left( p_2 - p_1 \frac{\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) + p_2 \left( p_1 - p_2 \frac{\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \left( p_2 - p_1 \frac{\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \left( p_1 - p_2 \frac{\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right)^2 \cos^2 \theta_2 \right. \\
& + \left[ \left( p_2 - p_1 \frac{\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) \cos \theta_1 \text{sen } \theta_1 \right. \\
& \left. \left. + \left( p_1 - p_2 \frac{\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) \cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 \right]^2 / (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 1) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_1 - \phi_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_2 - \phi_2)^2 \\
& - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \text{sen}^2 \phi_1 - \text{sen}^2 \phi_2} - \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2} \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Esta expressão mostra a equivalência das equações de Lagrange e Hamilton (Arnold, 1989). Para um sistema mecânico onde o Lagrangiano é dado pela equação (3), e  $T$  é uma função quadrática das velocidades generalizadas, o Hamiltoniano,  $H$ , é a energia total do sistema, isto é,  $H = 2\bar{T} - (\bar{T} - \bar{V}) = \bar{T} + \bar{V}$ .

Se o sistema mecânico é um sistema conservativo, isto é, se todas as forças generalizadas são obtidas pela derivação de uma função potencial que é uma função das coordenadas generalizadas e não apenas uma função explícita do tempo, então a energia total do sistema é constante.

### 3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Considerando  $k_1 = k_2 = k$ , o modelo de Augusti apresenta duas cargas de flambagem coincidentes,  $Pcr_1 = Pcr_2 = Pcr = k/l$ . O comportamento não-linear pós-flambagem neste caso é descrito pelas equações não-lineares acopladas:

$$\theta_1 - \lambda \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} = 0 \tag{10}$$

$$\theta_2 - \lambda \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} = 0 \tag{11}$$

A Figura 2 mostra o caminho fundamental ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), que é estável até a carga crítica estática ( $\lambda_{cr} = 1.0$ ) e os quatro possíveis caminhos pós-flambagem: dois caminhos instáveis ascendentes, que correspondem às duas soluções desacopladas (com  $\theta_1$  ou  $\theta_2$  sendo zero) e dois caminhos ortogonais a  $45^\circ$  instáveis descendentes, que são as soluções do sistema acoplado (10-11). A interação dos modos de flambagem leva ao aumento da sensibilidade a imperfeições. Se, por exemplo,  $k_1$  fosse muito maior que  $k_2$ , somente um caminho estável ascendente pós-flambagem emergiria para  $Pcr_1 = k_1/l$ , e problema seria insensível a imperfeições. É importante observar que a interação entre os modos de flambagem  $\theta_1$  e  $\theta_2$

produzem caminhos instáveis descendentes e sensibilidade a imperfeições, contudo um modo sozinho não produz sensibilidade a imperfeições.

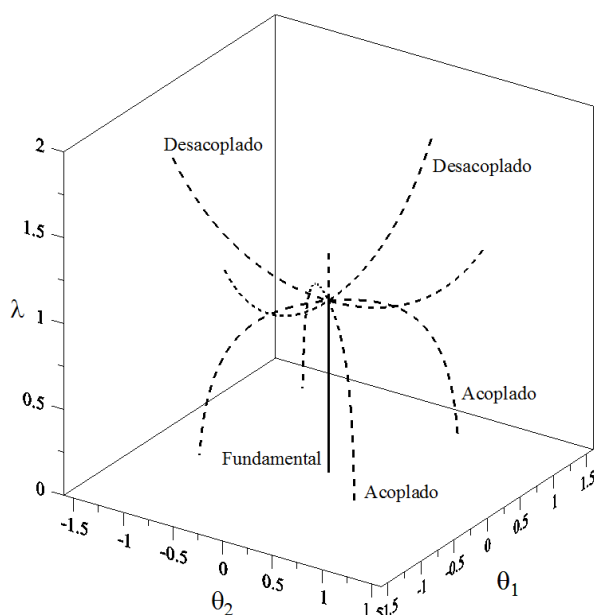


Figura 2: Caminhos pós-flambagem.

Então, como ilustrado na Figura 3, onde a superfície de energia potencial é projetada no plano  $\theta_1 \times \theta_2$  para  $\lambda = 0.9$ , para qualquer valor de  $\lambda$  entre zero e um existe uma solução estável, a solução pré-flambagem, cercada por quatro selas de mesmo nível de energia.

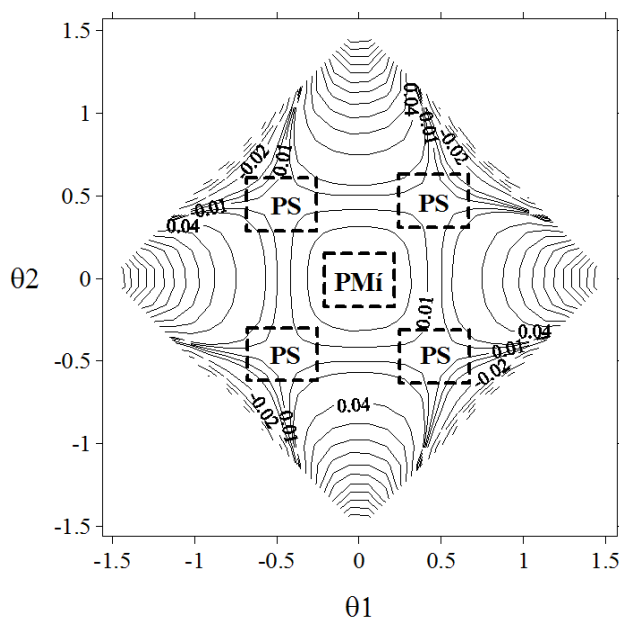


Figura 3: Curvas de igual energia potencial para  $\lambda = 0.9$ . PS: Selas. PMi: Posição estável correspondente a um mínimo local (configuração pré-flambagem).

Grande parte do comportamento global e dinâmica de um sistema estrutural pode ser compreendida pela estrutura topológica de suas funções de energia total e potencial. Contudo,



em um sistema dinâmico conservativo  $n$ -dimensional ( $n > 2$ ), é difícil fazer uma análise direta da estrutura geométrica do espaço de fase e dos limites da bacia  $n$ -dimensional. As bacias seguras são objetos de mesma dimensão do espaço de fase, em nosso caso quatro dimensões. Portanto, não pode ser totalmente visualizadas aqui. Informações úteis podem, no entanto, ser derivadas de observações em seções de 2- e 3-dimensões e pela geometria das variedades invariantes estáveis e instáveis que emergem das selas.

As quatro órbitas heteroclínicas que conectam as quatro selas simétricas, Figura 3, separam as condições iniciais que levam o sistema a oscilar no entorno da configuração de equilíbrio pré-flambagem daquelas que divergem para o infinito. O conhecimento destas fronteiras ajuda o projetista a separar o espaço de fase no domínio seguro e no domínio inseguro.

Então, as quatro órbitas heteroclínicas levam a um hipervolume que delimita as condições iniciais levando a soluções limitadas no entorno da solução trivial pré-flambagem, isto é, o interior desta região é preenchido por uma família contínua de trajetórias estáveis. A equação desta superfície pode ser obtida pelo princípio de conservação de energia, igualando a soma das expressões (1) e (2) ao valor da energia total de uma das selas, isto é:

$$T(\theta_i, \dot{\theta}_i) + V(\theta_i) = C_{sela} \tag{12}$$

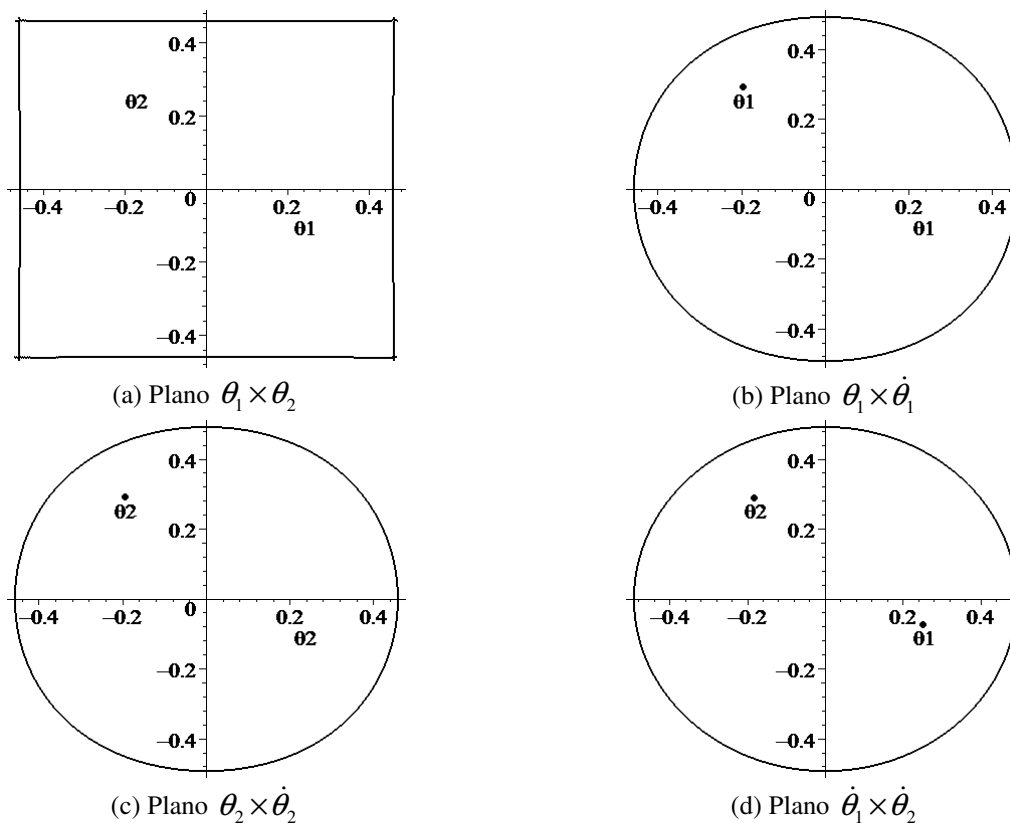


Figura 4: Quatro seções 2D da região pré-flambagem segura.  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Quatro seções em 2D desta região 4D são mostradas na Figura 4 para um dado valor da frequência natural do pêndulo  $\omega_p$ . Esta região 4D é definida como a bacia segura da configuração pré-flambagem. Este hipervolume seguro decresce rapidamente em todos os planos quando a carga estática aumenta e desaparece no ponto crítico. Como os sistemas estruturais são geralmente levemente amortecidos, a resposta da estrutura real vai somente se

distanciar um pouco do caso conservativo. Uma análise desta região fornece informações sobre os deslocamentos e velocidades máximas admissíveis. Elas também podem ajudar no controle de vibrações, pois dão o limite superior das perturbações admissíveis. A Figura 5 mostra quatro projeções das variedades invariantes estáveis e instáveis das quatro pontos de selas que circundam e delimitam a região pré-flambagem segura. Dois pares de órbitas heteroclínicas, cada par conectando duas selas opostas em  $\pm 45^\circ$ , são observadas.

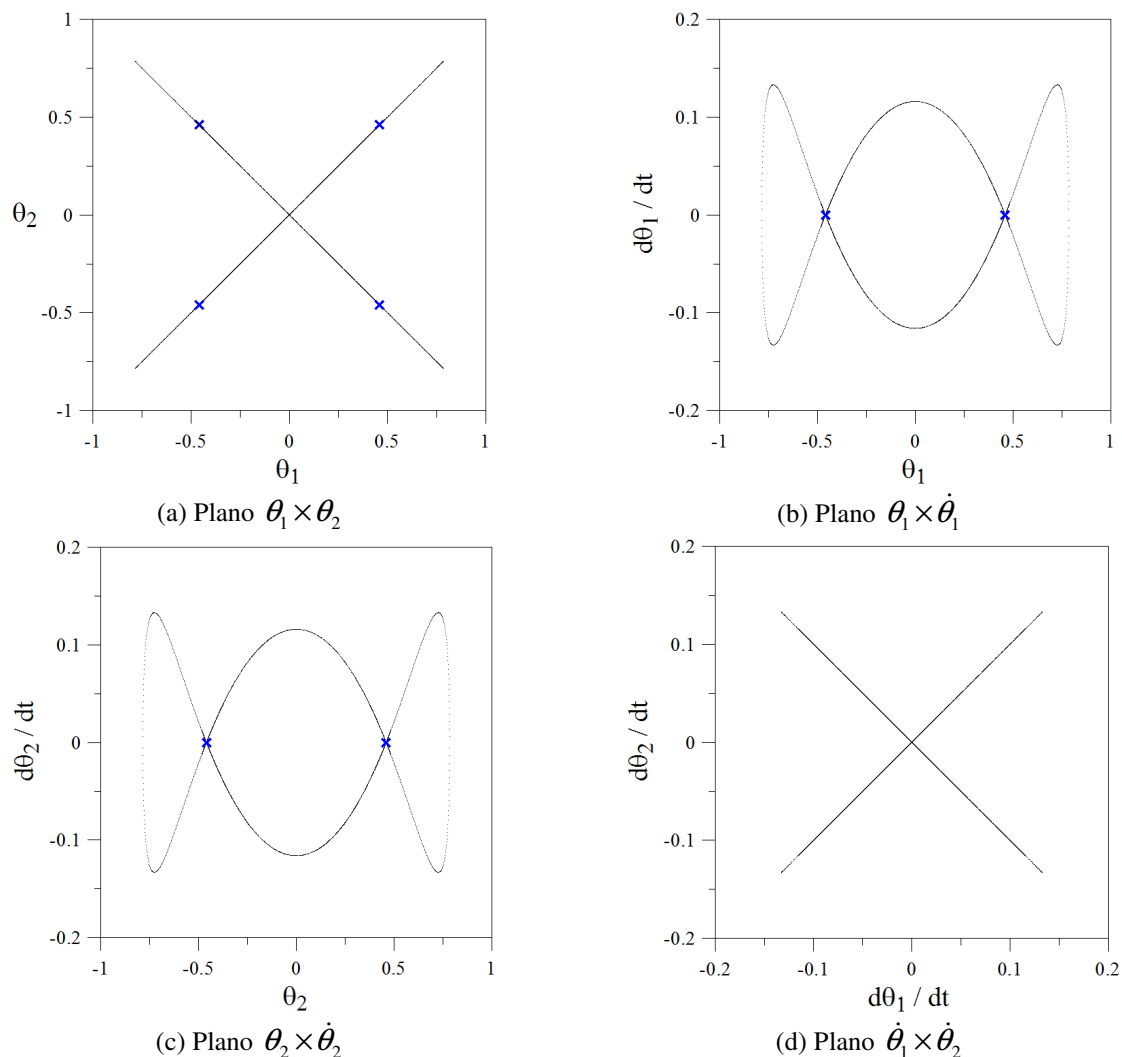


Figura 5: Variedades estáveis e instáveis das quatro selas que circundam a região pré-flambagem segura.

$$\lambda = 0.9 \text{ e } \omega_p = 1.0/s.$$

#### 4 ANÁLISE EM VIBRAÇÃO LIVRE

Considerando  $k_1 = k_2 = k$ , o modelo de Augusti apresenta duas frequências naturais iguais. Linearizando as equações de movimento (5) e (6), as frequências naturais do modelo são:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_p \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \quad (13)$$

#### 4.1 Modos não-lineares de vibração

O teorema da superposição é a pedra fundamental da teoria de sistemas lineares (Boivin et al., 1995). Este teorema permite a análise modal em sistemas dinâmicos lineares com base no conceito de modos lineares de vibração. Em contrapartida, é precisamente esta forma de recombinação das coordenadas modais que falta para os sistemas dinâmicos não-lineares. Conseqüentemente, uma superposição das repostas modais individuais não pode ser feita para um sistema estrutural não-linear.

Em sistemas lineares, pelo princípio de superposição, um modelo dinâmico em larga escala pode ser reduzido a um modelo de menor dimensão, representado pelos modos de vibração dominantes, utilizando as ferramentas usuais da análise modal, pois os modos são dinamicamente independentes. Porém, para sistemas não-lineares, estas ferramentas não são diretamente aplicáveis e deve-se usar outra forma para compreender e analisar a dinâmica dos sistemas não-lineares.

O conceito apresentado por Rosenberg (1961) de modos não-lineares é considerado como uma extensão dos modos lineares, e tem se tornado uma ferramenta útil na análise de vibrações não-lineares. De acordo com Rosenberg, os modos não-lineares são movimentos síncronos que apresentam uma relação bem definida entre as coordenadas generalizadas, isto é, todas as coordenadas generalizadas executam movimentos de mesmo período, passando pela posição de equilíbrio e alcançando seus deslocamentos máximos simultaneamente. Esses conceitos são formalizados segundo as definições:

Definição 1 (Rosenberg 1962, 1966)

*Um sistema conservativo autônomo discreto de  $n$  graus de liberdade descrito por um conjunto de equações na forma*

$$\ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

*onde  $x_i$  representa os deslocamentos medidos a partir de um estado de equilíbrio, e as funções não-lineares  $f_i$  são as forças que agem sobre o sistema, está oscilando em um modo, se ele está vibrando em uníssono, ou seja:*

*1) O movimento de todas as coordenadas é periódico e de mesmo período, isto é:*

$$x_i(t) = x_i(t+T), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

*onde o período  $T$  é uma constante;*

*2) Existe um tempo  $t = t_0$  em que todas as massas passam pela posição de equilíbrio, ou seja:*

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

*3) Todas as coordenadas alcançam seus valores extremos no mesmo instante de tempo, ou seja, existe um tempo  $t = t_1 \neq t_0$  no qual todas as velocidades tornam-se nulas, isto é:*

$$\dot{x}_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

*4) Para um  $r \in [1, 2, \dots, n]$  fixo, em qualquer instante de tempo as coordenadas do sistema devem ser relacionadas por equações funcionais da forma:*

$$x_i = P_i(x_r), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad i \neq r \quad (18)$$

*onde  $P_i$  é chamado de função modal para o modo não-linear  $r$ .*

Sendo assim, em um modo, as oscilações de todas as coordenadas podem ser parametrizadas por uma única coordenada, já que, segundo o conceito de Rosenberg (1962), (a) todas elas executam movimentos periódicos (não necessariamente harmônico) com o mesmo período; (b) todas elas passam por suas posições de equilíbrio estático ao mesmo tempo, e (c) todas elas atingem seus deslocamentos máximos ao mesmo tempo. Assim, a possibilidade de definir as posições de todas as massas por meio de qualquer uma delas permite uma redução de ordem muito eficiente para o problema como um todo.

O modo linear pode ser, por essa definição, visto como um caso particular do modo não-linear, onde as funções modais na expressão (18) são funções lineares.

Rosenberg também define dois tipos de modos não-lineares, similar e não-similar:

Definição 2 (Rosenberg 1962, 1966)

*Se as linhas modais correspondentes ao modo não-linear forem retas tem-se que o modo é similar. No caso geral onde as linhas modais são curvas, o modo é não-similar.*

Portanto, quando um sistema se movimenta em um modo similar, esse movimento ocorre ao longo de uma linha reta passando pela posição de equilíbrio no espaço  $n$ -dimensional do sistema, ao passo que o movimento não-similar ocorre ao longo de uma curva no mesmo espaço.

O movimento do modo similar que ocorre em um sistema em vibração livre pode ser matematicamente reescrito como:

$$x_i = c_{ir} x_r, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq r; \quad c_{rr} = 1 \quad (19)$$

sendo que essas relações lineares devem ser satisfeitas pelas coordenadas  $x_i$  para todos os tempos, onde  $c_{ir}$  são  $n-1$  quantidades escalares desconhecidas. Tem-se, ainda que as equações (19) caracterizam um autovetor que define a forma planar das variedades (manifold) invariantes. O modo linear é um caso particular de modo similar.

Esse conceito original de modos não-lineares foi modificado nos últimos anos. Shaw e Pierre (1991) propuseram uma definição dos modos não-lineares, na qual não somente os deslocamentos generalizados, mas também as velocidades devem ser consideradas. De acordo com eles um modo não-linear é um movimento em vibração livre que se realiza em uma variedade bidimensional invariante inserida no espaço de fase do sistema. Como as variedades são invariantes, isso significa que, se as condições iniciais estão em uma dessas variedades, o movimento correspondente permanece nesta variedade. A vantagem dessa definição é que ela incorpora a definição de Rosenberg como um caso particular e é apropriada para sistemas conservativos e não-conservativos. Formalmente estes conceitos podem ser expressos por:

Definição 3 (Shaw e Pierre, 1994)

*Uma variedade invariante de um sistema dinâmico é um subconjunto  $S$  do espaço de fase, tal que se um conjunto de condições iniciais for dado em  $S$ , a solução permanece em  $S$  ao longo de todo o tempo.*

De acordo com a definição 3, a variedade invariante de um modo não-linear é uma superfície bidimensional no espaço de fase do sistema. Esta variedade deve conter o ponto de equilíbrio e ser tangente ao correspondente auto-espaço do sistema linearizado (Jiang et al., 2005). Nessa formulação um par de coordenadas, deslocamento-velocidade, é escolhido como coordenadas governantes, caracterizando o movimento modal não-linear individual que ocorre em tal variedade. Assim todos os graus de liberdade restantes são descritos como coordenadas dependentes, compostas da mesma forma por pares de coordenadas, deslocamento-velocidade. Estes conceitos podem ser reescritos formalmente pela definição:

Definição 4 (Shaw e Pierre, 1994, e Shaw et al., 1999)

*Um modo para um sistema não-linear é um movimento que ocorre em uma variedade bidimensional invariante no espaço de fase do sistema. Esta variedade passa através do ponto de equilíbrio estável de interesse e, nesse ponto, é tangente ao auto-espaço bidimensional do sistema linearizado. Nesta variedade, o sistema dinâmico é governado por uma equação de movimento envolvendo um par de variáveis de estado, ou seja, comporta-se como um sistema de um grau de liberdade.*

Uma forma eficiente de se determinar numericamente a existência dos modos não-lineares são os mapas de Poincaré. Segundo Vakakis (1991), a aplicação dos mapas de Poincaré para o estudo da dinâmica não amortecida de sistemas discretos foi apresentada inicialmente por Month (1979, 1980). Nessas referências, técnicas de aproximação dos mapas de Poincaré são apresentadas. Aplicando tais técnicas, pode-se determinar analiticamente o fluxo global do sistema dinâmico suficientemente próximo ao modo, e assim obter-se uma descrição completa e mais detalhada dos modos não-lineares e de sua estabilidade.

Os resultados nas seções anteriores mostram que a energia potencial não-linear do modelo aqui analisado é altamente distorcida quando comparada com a do sistema linearizado. Assim o nível de energia, associado a um dado conjunto de condições iniciais tem uma notável influência nas vibrações do sistema perturbado. Na expressão (12) pode-se observar que no ponto de equilíbrio estável a energia total é nula. Quando o nível de energia aumenta e aproxima-se do relativo aos pontos de sela associados à fronteira de escape, a complexidade da vibração livre do sistema aumenta consideravelmente.

Fixando a energia total do sistema, pode-se restringir o fluxo do sistema dinâmico a uma fronteira tridimensional isoenergética. Isso é obtido quando se fixa  $H = h$ , expressão (12), onde  $h$  é um nível de energia adotado. Se a fronteira tridimensional isoenergético, é cortada por um plano bidimensional (2D) e se o fluxo é transversal a este plano (Guckenheimer e Holmes, 1984; Vakakis, 1991), a seção transversal resultante  $\Sigma$  é bidimensional e define o mapa de Poincaré.

Para compreender o comportamento do sistema, foram escolhidos dois planos para representar os mapas de Poincaré, a saber:  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$  e  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$ . Para obter tais mapas de Poincaré tem-se que os respectivos planos de corte e as respectivas seções de Poincaré,  $\Sigma$ , são definidas por:

$$\Pi = \{\theta_2 = 0\} \rightarrow \Sigma = \{\theta_2 = 0, \dot{\theta}_2 > 0\} \cap \{H = h\} \quad (20)$$

$$\Pi = \{\theta_1 = 0\} \rightarrow \Sigma = \{\theta_1 = 0, \dot{\theta}_1 > 0\} \cap \{H = h\} \quad (21)$$

A restrição quanto ao sinal da velocidade,  $\dot{\theta}_2$  em (20) e  $\dot{\theta}_1$  em (21), se deve ao fato de que o mapa de Poincaré deve preservar a sua orientação (Guckenheimer e Holmes, 1984; Vakakis, 1991).

## 4.2 Resultados da análise numérica

Usando as expressões (1), (2) e (12), para avaliar  $H = h$ , tem-se que as condições iniciais de  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_1$ , correspondentes aos pares iniciais  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  e  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ , são dadas, respectivamente, por:

$$\dot{\theta}_2 = \pm \left( -\dot{\theta}_1^2 - \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_1^2 + 2\omega_p^2(1 - \cos \theta_1) + 2h \right)^{1/2} \quad (22)$$

$$\dot{\theta}_1 = \pm \left( -\dot{\theta}_2^2 - \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_2^2 + 2\omega_p^2(1 - \cos \theta_2) + 2h \right)^{1/2} \quad (23)$$

onde somente as velocidades positivas são consideradas.

A região ocupada pela seção de Poincaré nos planos em estudo ( $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$  e  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$ ) é definida pelo conjunto de pontos para os quais  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_1$  sejam positivos. Os limites destas regiões são obtidos pela condição de que os radicandos de (22) e de (23) sejam nulos, o que leva a:

$$h = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_1^2 - \omega_p^2(1 - \cos \theta_1) \quad (24)$$

$$h = \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_2^2 - \omega_p^2(1 - \cos \theta_2) \quad (25)$$

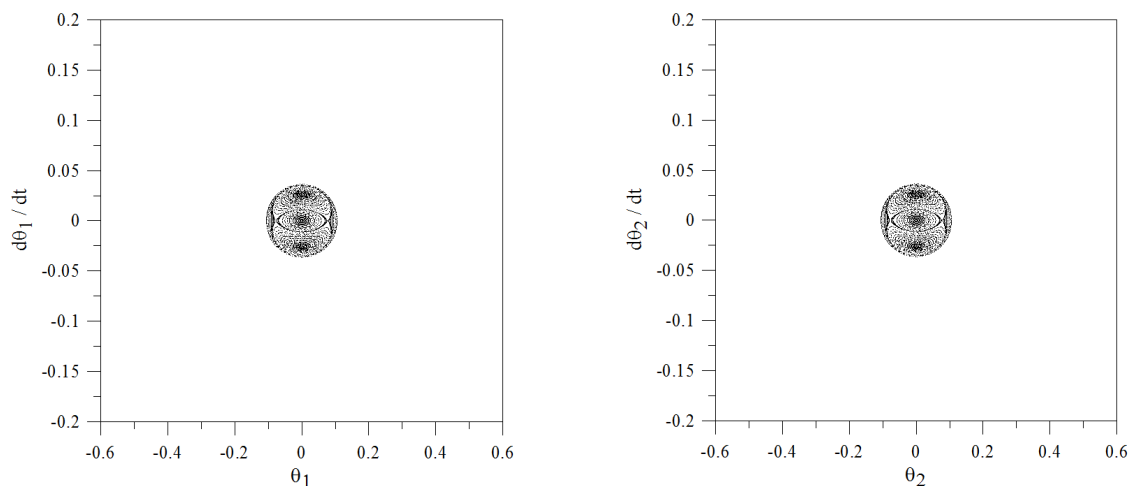
A dinâmica dentro destas regiões é obtida pela integração das equações (5) e (6) para as condições iniciais de  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  que satisfaçam as restrições em  $\theta_2$  e  $\dot{\theta}_2$ , e para as condições iniciais de  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  que satisfaçam as restrições em  $\theta_1$  e  $\dot{\theta}_1$ .

A vibração livre de um sistema correspondente a um modo é um movimento periódico e, portanto, a seção de Poincaré de um modo é um único ponto e sua estabilidade pode ser determinada examinando-se as trajetórias correspondentes às condições iniciais na vizinhança do ponto. Se o ponto correspondente a um modo aparece como um centro, rodeado de curvas fechadas, o modo é orbitalmente estável. Ao contrário, se o ponto aparenta ser uma sela, então o modo é orbitalmente instável. Uma curva fechada representa a interseção de um toro invariante com a seção de Poincaré.

Na Figura 6 apresentam-se as seções de Poincaré para um nível de energia igual a 5% da energia dos pontos de sela (baixo), 50% da energia dos pontos de sela (médio) e para o nível de energia dos pontos de sela (alto, valor extremo), considerando  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

É interessante observar como a região onde a dinâmica está confinada, Figura 6, coincide com as seções bidimensionais da região segura pré-flambagem, Figura 4. Para maiores magnitudes de  $h$ , a resposta associada a qualquer conjunto não trivial de condições iniciais diverge para o infinito.

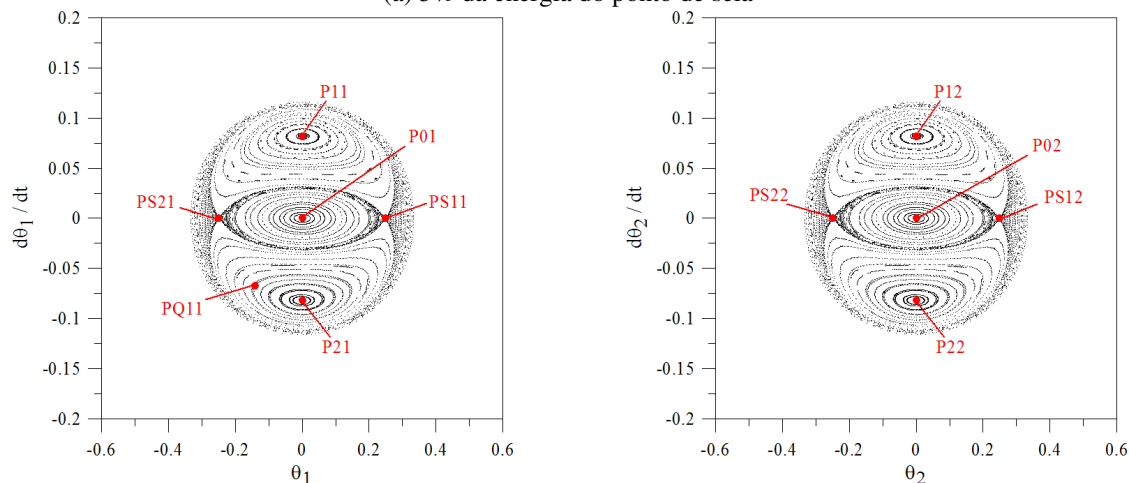
Quando o nível de energia é nulo as seções de Poincaré nos planos  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$  e  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$  se reduzem a um ponto. O ponto (0.0, 0.0) na seção de Poincaré  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$  representa o modo de vibração linear desacoplado no plano  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$  e o ponto (0.0, 0.0) na seção de Poincaré  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$  representa o modo de vibração linear desacoplado no plano  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$ .



(a.1) Plano  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$

(a.2) Plano  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$

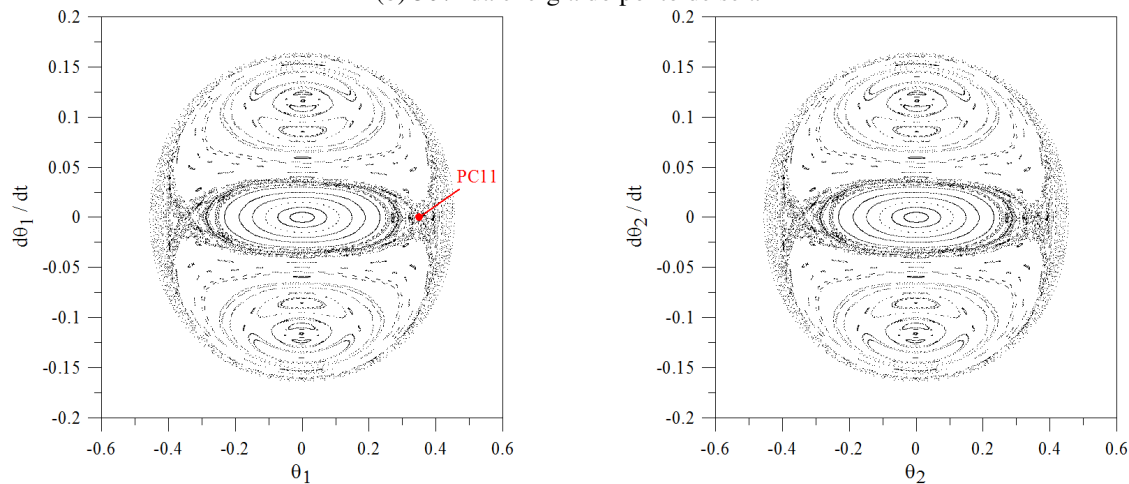
(a) 5% da energia do ponto de sela



(b.1) Plano  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$

(b.2) Plano  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$

(b) 50% da energia do ponto de sela



(c.1) Plano  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$

(c.2) Plano  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$

(c) Energia do ponto de sela

Figura 6: Seções de Poincaré.  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Para níveis de energia baixos e médios verifica-se a existência de movimentos quase-periódicos representados pelas curvas fechadas em torno da origem, pontos P01 ( $\theta_1 = \dot{\theta}_1 = 0.0$ ) e P02 ( $\theta_2 = \dot{\theta}_2 = 0.0$ ), respectivamente Figuras 6(a) e 6(b), que, correspondem aos modos de vibração não-lineares desacoplados, respectivamente, no plano  $\theta_2 \times \dot{\theta}_2$ , Figura 7(a), e no plano  $\theta_1 \times \dot{\theta}_1$ , Figura 7(b), que emergem naturalmente dos modos lineares.

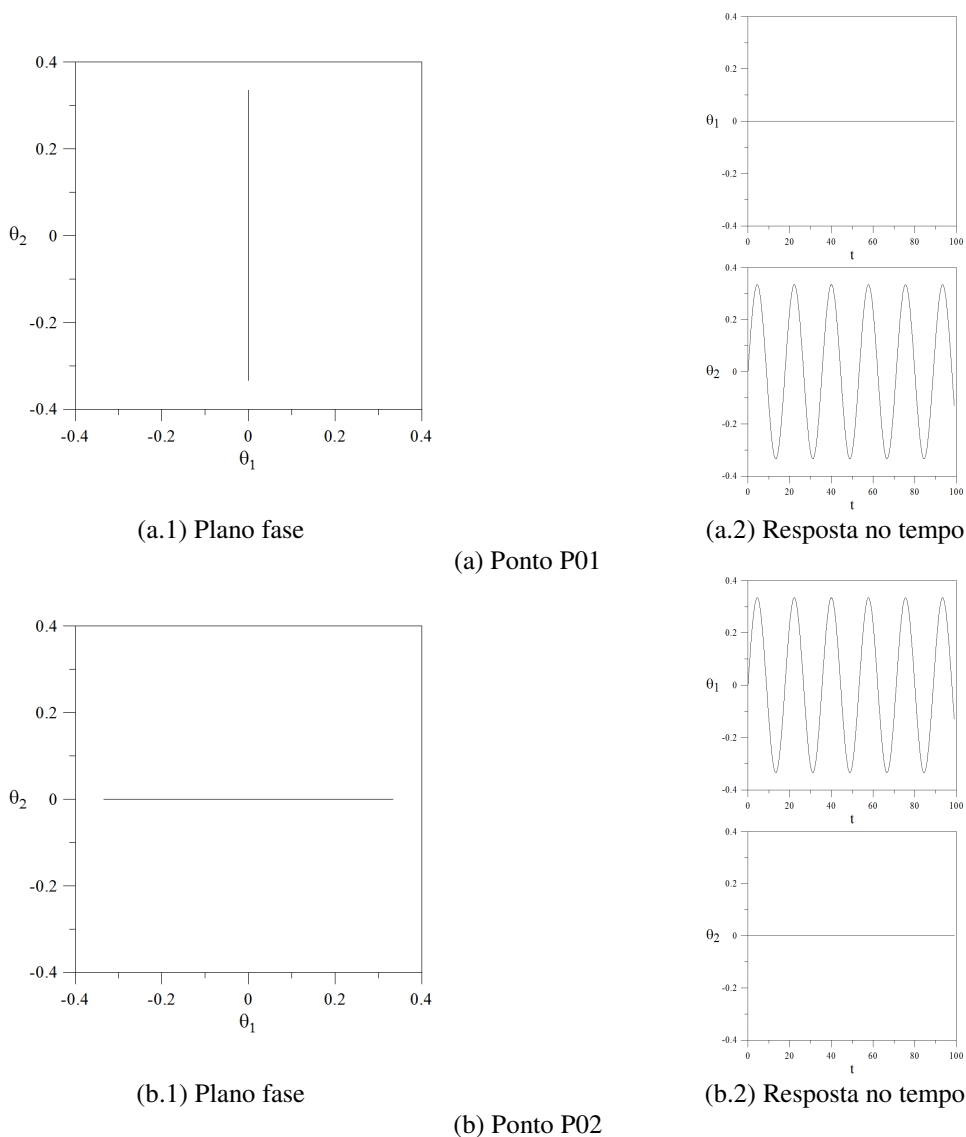


Figura 7: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P01 e P02.  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Contudo, verifica-se para níveis baixos e médios de energia o surgimento de duas selas e dois novos centros, que correspondem a quatro novos modos de vibração, dois instáveis e dois estáveis. Os dois modos estáveis (pontos P11 e P21 – Figura 6(b.1), e pontos P12 e P22 – Figura 6(b.2)) correspondem aos modos não-lineares que surgem do acoplamento modal, com o sistema vibrando com  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em fase (P11 e P12) e com  $\theta_1$  e  $\theta_2$  fora de fase (pontos P21 e P22), como se pode verificar na Figura 8. Já as selas (pontos PS11 e PS21 – Figura 6(b.1), e PS12 e PS22 – Figura 6(b.2)) representam os dois modos acoplados de vibração instáveis que



dividem os centros presentes nas seções de Poincaré. A nomenclatura  $P_{ij}$  denota o ponto  $i$  da seção em  $\theta_j$ . Em virtude da simetria do modelo de Augusti, os modos não-lineares aparecem sempre aos pares e representam o mesmo tipo de oscilação.

O terceiro nível de energia corresponde ao nível de energia dos quatro pontos de sela, Figura 4, e é o maior nível de energia com significado para análise da estabilidade. Na Figura 6(c) uma grande complexidade dinâmica é observada no interior dessas regiões, com um conjunto difuso de pontos que indicam uma dinâmica caótica.

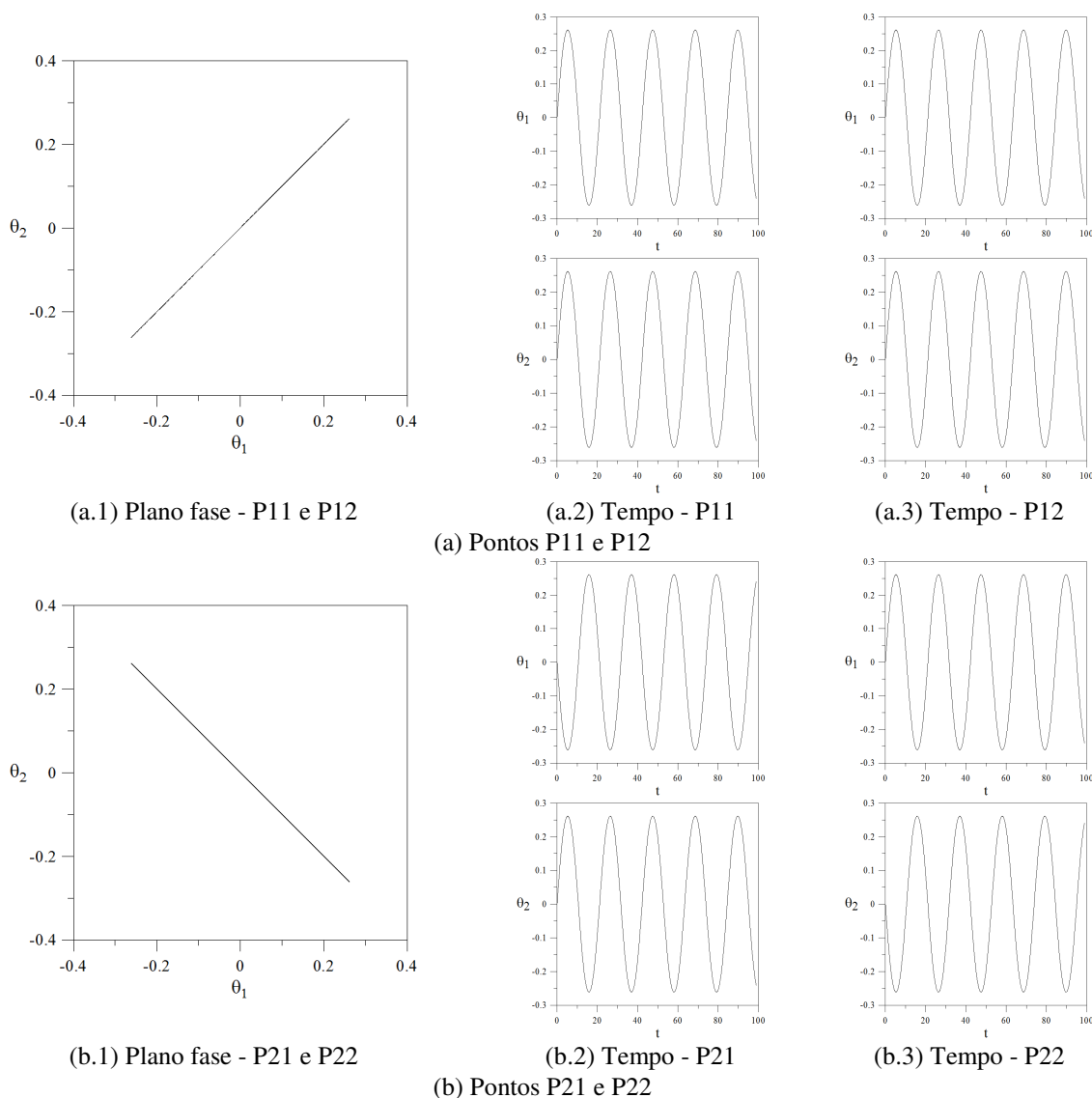


Figura 8: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P11, P21, P12 e P22.  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Na Figura 9 mostra-se o comportamento das seções de Poincaré para alguns pontos específicos, a saber: PS11, PQ11 e PC11. Como mencionado anteriormente o ponto PS11 representa um ponto de sela e sua seção de Poincaré é exatamente a fronteira que delimita as soluções estáveis. O ponto PQ11 representa o comportamento de um movimento quase-periódico em torno de um ponto fixo que corresponde a um modo de vibração e, por fim, o ponto PC11 mostra o comportamento para um ponto pertencente a uma região de caos. Como

observado na literatura sobre sistemas dinâmicos Hamiltonianos (Vakakis, 1991), o caos surge inicialmente na vizinhança de um ponto de sela e, aos poucos, vai preenchendo todo o espaço de fase à medida que cresce o nível de energia.

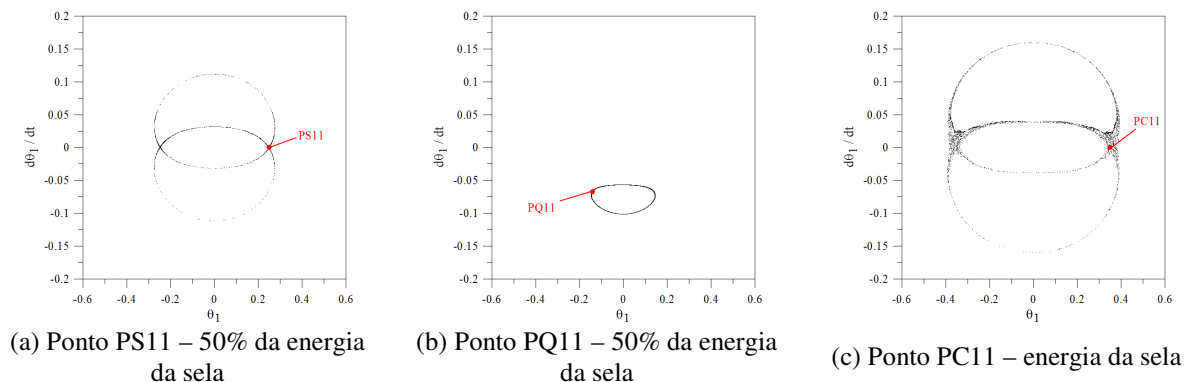


Figura 9: Seções de Poincaré dos pontos PS11, PQ11 e PC11.  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Os modos não-lineares, decorrentes dos pontos P11 (P12 é igual) e P21 (P22 é igual), que surgem devido ao acoplamento modal do sistema são similares, pois, como se verifica na Figura 8, tais modos apresentam uma relação linear entre as coordenadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . É importante observar que estes dois modos não-lineares estáveis estão contidos nos planos das variedades dos pontos de sela, Figuras 4 (a) e 5(a).

Nesse contexto, verifica-se que o modelo de Augusti pode ser desacoplado em um dos planos das variedades dos pontos de sela, ou seja, pode-se representar o modelo através de um modelo reduzido com um grau de liberdade. Mas, para isso, faz-se necessário obter-se a função linear que representa o modo similar, expressão (19). Percebe-se que os pontos de sela que possuem os deslocamentos com sinais iguais localizam-se em uma diagonal a  $45^\circ$  do eixo  $\theta_1$  e que aqueles que possuem sinais opostos ficam sobre a diagonal de  $-45^\circ$  do eixo  $\theta_1$ . A partir dessa observação, pode-se aplicar uma mudança de coordenadas que permite obter as equações de movimento desacopladas, nos eixos auxiliares  $u$  e  $v$ , ou seja, as equações nos planos das variedades dos pontos de sela, como mostra a Figura 10.

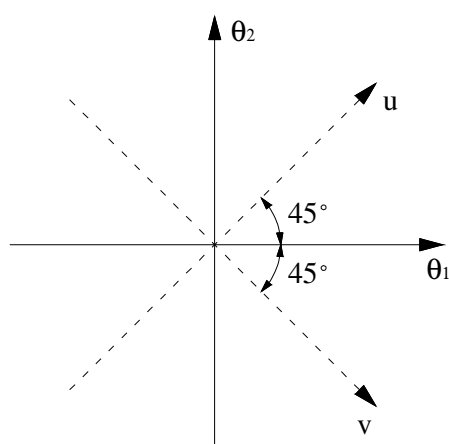


Figura 10: Coordenadas auxiliares.

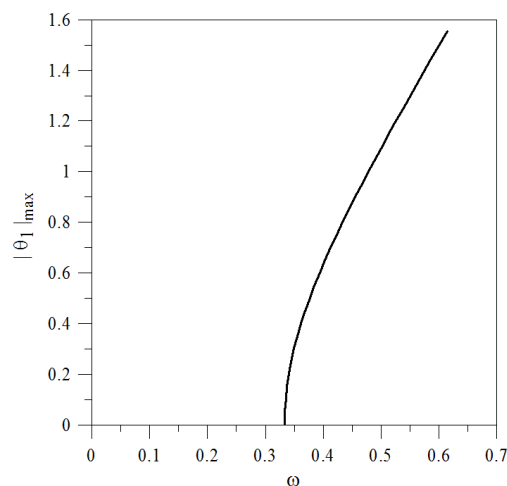
Observando a Figura 10, pode-se deduzir que as funções lineares que representam os modos similares são:

$$\theta_1 = \frac{u}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}, \theta_2 = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}, \text{ considerando } v = \dot{v} = 0. \quad (26)$$

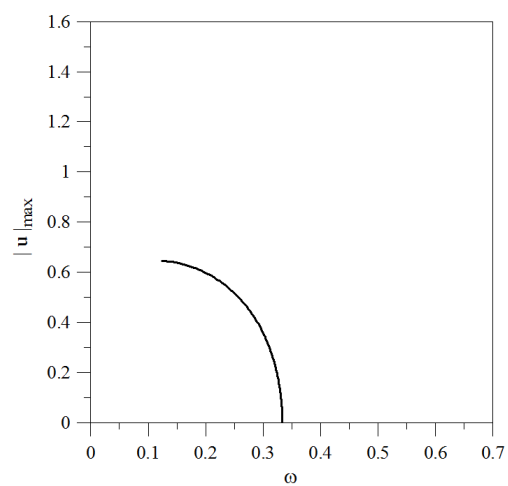
$$\theta_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{v}}{\sqrt{2}}, \theta_2 = \frac{-v}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_2 = \frac{-\dot{v}}{\sqrt{2}}, \text{ considerando } u = \dot{u} = 0. \quad (27)$$

sendo que as expressões (26) fornecem a equação de movimento desacoplada no plano  $u \times \dot{u}$  e as expressões (27) fornecem a equação de movimento desacoplada no plano  $v \times \dot{v}$ .

Na Figura 11 apresentam-se as relações frequência-amplitude para o modelo de Augusti. A Figura 11(a) mostra a relação não-linear, frequência-amplitude, que representa o comportamento dos modos não-lineares desacoplados estáveis que surgem dos modos lineares (frequência linear) e tornam-se não-lineares pelo movimento do sistema, sendo que tais modos apresentam um comportamento *hardening*, ou seja, com ganho de rigidez. O comportamento de  $\theta_2$  é igual ao de  $\theta_1$ . Já a Figura 11(b) apresenta a relação não-linear que representa o comportamento dos modos não-lineares similares estáveis que surgem devido ao acoplamento modal do sistema, onde se observa um comportamento *softening*, ou seja, com perda de rigidez. O comportamento de  $v$  é igual ao de  $u$ . Para o modelo tem-se ressonância interna 1:1, sendo neste exemplo  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ . Todas as curvas têm início neste valor.



(a) Modo não-linear estável desacoplado para o modelo com 2GL



(b) Modo não-linear similar estável acoplado para o modelo com 1GL

Figura 11: Relações frequência-amplitude.  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Mostra-se na Figura 12 as relações frequência-amplitude geradas pelos pontos de sela (PS11, PS21, PS12 e PS22). Observa-se que os pontos de sela são movimentos periódicos resultantes do acoplamento de dois modos de vibração, decorrente da ressonância interna do sistema. Neste caso, como mostram Jiang et al. (2005), o comportamento é bem mais complexo. Neste caso, a dedução da variedade invariante que contém este movimento deve ser obtida usando-se como sementes tantos pares de coordenadas deslocamento-velocidade quantos forem os modos envolvidos na vibração (*multi-mode invariant manifold*). No presente caso, onde se observa a interação de dois modos, têm-se dois pares de coordenadas e a variedade invariante tem quatro dimensões. Neste caso cada coordenada pode apresentar uma relação frequência-amplitude diferente, bem como diferentes frequências de vibração. Essas relações foram obtidas através da determinação direta da relação frequência-amplitude pela

reposta no tempo, tendo como condições iniciais as coordenadas dos pontos de sela da seção de Poincaré para níveis crescentes de energia. Como foram determinados poucos pontos as curvas dos modos instáveis são aproximadas. Estas relações poderiam também ser obtidas através do chamado *shooting method*, juntamente com técnicas de continuação (Silva, 2008).

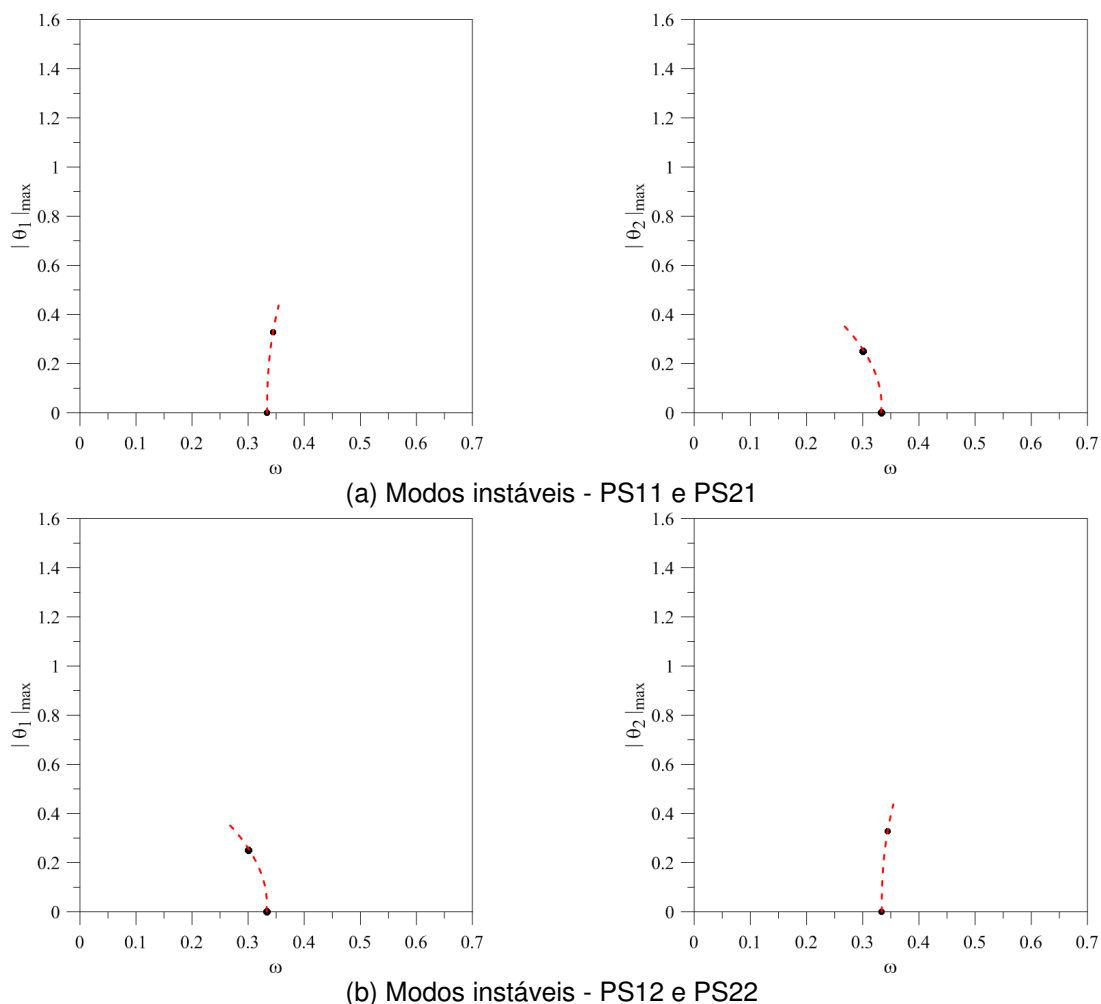


Figura 12: Relações freqüência-amplitude dos modos acoplados instáveis dos pontos de sela PS11, PS21, PS12 e PS22.  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

## 5 CONCLUSÕES

No modelo de Augusti, em função do acoplamento modal, gerado por cargas de flambagem iguais ou próximas, existe a possibilidade de perda de estabilidade para cargas inferiores à carga crítica de flambagem, desde que as perturbações excedam os limites da região em torno da configuração fundamental, cuja fronteira é limitada pelos pontos de sela associados às soluções pós-críticas instáveis. Esta região, que constitui a bacia de atração da solução fundamental de equilíbrio e delimita a magnitude das oscilações, decresce à medida que o carregamento estático cresce, tornando-se zero no ponto de bifurcação (carga crítica). Assim, à medida que cresce o carregamento, reduz-se substancialmente o conjunto de possíveis condições iniciais que levam a estrutura a retornar, após a perturbação, à configuração fundamental de equilíbrio cuja estabilidade e integridade se deseja preservar.

As simetrias inerentes à estrutura, juntamente com o acoplamento modal, dão origem a um

número de modos não-lineares superior ao número de graus de liberdade. Particular atenção deve-se dar à identificação de todos os modos não-lineares, tanto estáveis quanto instáveis, e à relação frequência-amplitude associada a cada modo. Esta análise permite compreender como tais modos controlam, limitam e explicam a dinâmica dos modelos sob vibração forçada. Em especial, a determinação dos modos não-lineares permite reduzir em certos casos o modelo a um oscilador não-linear desacoplado com um grau de liberdade, facilitando a análise. Portanto, a análise não-linear desta classe de estruturas deve obrigatoriamente incluir a determinação e características dos modos não-lineares e a identificação das variedades invariantes dos pontos de sela associados à região segura.

## 6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao suporte financeiro das agências de pesquisa CAPES, CNPq e FAPERJ-CNE.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2.ed. Springer, New York, USA, 1989.
- Andrianov, I. V. Asymptotical construction of nonlinear normal modes for continuous system. *Nonlinear Dynamics*, 51:99-109, 2008.
- Antonini, R.C. *Influência da Interação entre Modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas*. Dissertação de Mestrado – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1981.
- Augusti, G. Stabilità di Strutture Elastiche Elementari in Presenza di Grandi Spostamenti. *Atti. Acad. Sci. Fis. Mat.*, Napoli, 4(5), 1964.
- Batista, R.C. *Lower Bound Estimates for Cylindrical Shell Buckling*. PhD Tesis, University College, Londres, 1979.
- Bazant, Z.P., Cedolin, L. *Stability of Structures*. Oxford Press, Oxford, 1991.
- Boivin, N., Pierre, C.; Shaw, S. W. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 182: 336-341, 1995.
- Brubak, L., Hellesland, J. Semi-Analytical Post buckling and Strength Analysis of Arbitrarily Stiffened Plates in Local and Global Bending. *Thin-Walled Structures*, 45:620-633, 2007.
- Brush, D.O., Alamoorthy, B.O. *Buckling of Bars, Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- Budiansky, B. Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures. *Advances in Applied Mechanics*, 14, Academic Press, 1974.
- Chen, H., Yu, W. Post-Buckling and Mode Jumping Analysis of Composite Laminates Using an Asymptotically Correct, Geometrically Non-Linear Theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41:1143-1160, 2006.
- Chilver, A.H. *The Elastic Stability of Structures*. In: Leipholz, H.H. Ed. Stability, Chapter 3, Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, Canadá, 1972.
- Chilver, A.H., Johns, K.C. Coupled modes of buckling in some continuous systems. *Proc. IUTAM Symposium on Instability of Continuous Systems*, Herrenalb, Springer, 1969.
- Croll, J.G., Walker, A.C. *Elements of Structural Stability*. 1.ed. Macmillan, London, UK, 1972.
- Cowell, R.G., Hunt G.W. Comparative Modeling of Compound Bifurcation of an Axially-Loaded Cylinder. *EUROMECH 200*, Hungray, 35-51, 1985.
- Del Prado, Z.J.G.N. *Vibrações Não Lineares e Instabilidade Dinâmica de Estruturas Sujetas*

- a Interação Modal*. Proposta de Tese – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1999.
- Del Prado, Z.J.G.N. *Acoplamento e Interação Modal na Instabilidade Dinâmica de Cascas Cilíndricas*. Tese de Doutorado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2001.
- Dinis, P.B., Camotim D., Silvestre, N. FEM-Based Analysis of the Local-Plate/Distortional Mode Interaction in Cold-Formed Steel Lipped Channel Columns. *Computers & Structures*, 85:1461-1474, 2007.
- El Naschie, M.S. *Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: an Energy Approach*. McGraw Hill, London, 1990.
- Gonçalves, P.B. *Interação Dinâmica Não-Linear entre Fluido e Cascas Delgadas*. Tese de Doutorado – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1987.
- Gonçalves, P.B., Del prado, Z.J.G.N. Low-Dimensional Galerkin Models for Nonlinear Vibration and Instability Analysis of Cylindrical Shells. *Nonlinear Dynamics*, 41:129-145, 2005.
- Gonçalves, P.B., Silva, F.M.A. and Del Prado, Z. J. G. N. Global Stability Analysis of Parametrically Excited Cylindrical Shells through the Evolution of Basin Boundaries. *Nonlinear Dynamics*, 50:121-145, 2007.
- Greenwood, D.T. *Advanced Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- Guckenheimer, J., Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, USA, 1984.
- Hunt, G.W., Williams, K.A.J., Cowell, R.G. Hidden Symmetry Concepts in the Elastic Buckling of Axially-Loaded Cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, 22:1501-1515, 1986.
- Hutchinson, J.W. Plastic Buckling. *Advances in Applied Mechanics*, 14, Academic Press, 1974.
- Jiang, D., Pierre, C., Shaw, S. W. The Construction of Non-Linear Normal Modes for Systems with Internal Resonance. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 40:729-746, 2005.
- Kiyamaz, G. FE Based Mode Interaction Analysis of Thin-Walled Steel Box Columns Under Axial Compression. *Thin-Walled Structures*, 43:1051-1070, 2005.
- Koiter, W.T. On the Stability of Elastic Equilibrium. *Nasa Report no TT-F-10833* (Translation of: Over Stabiliteit van het Elastiche Evenwicht, Ph. D. Thesis, Delft, ND, 1945), 1967.
- Kolakowski. Some Aspects of Dynamic Interactive Buckling of Composite Columns. *Thin-Walled Structures*, In Press, Corrected Proof, 2007.
- Lansbury, A.N., Thompson, J.M.T., Basin, H.B. Basin Erosion in the Twin-Well Duffing Oscillator: two Distinct Bifurcation Scenarios. *In. J. Bifurcation and Chaos*, 2:505-532, 1992.
- Manevitch, L.I., Description of localized normal modes in the chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25:95-109, 2001.
- Mazzilli, C.E.N., Baracho NETO, O.G.P. Evaluation of Non-Linear Modes for Finite-Element Models. *Computers & Structures*, 80:957-965, 2002.
- Meirovitch, L. *Methods of Analytical Dynamics*. Dover, New York, USA, 2003.
- Month, L. *On Approximate First Integrals of Hamiltonian Systems with an Application to Nonlinear Normal Modes in a two DOF Nonlinear Oscillator*. Ph.D. Thesis, Cornell University, 1979.
- Nayfeh, A. H. On Direct Methods for Constructing Nonlinear Normal Modes of Continuous Systems. *Journal of Vibration and Control*, 1:389-430, 1995.
- Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A. *Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of*

- Elastic Structures*. Elsevier Science Publishing Company Inc., New York, 1991.
- Quin, D.D., Wilber, J.P., Clemons, C.B., Young, G.W., Buldum, A. Buckling Instabilities in Coupled Nano-Layers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42:681-689, 2007.
- Raftoyiannis, I.G., Kounadis, A.N. Dynamic Buckling of 2-DOF Systems with Mode Interaction Under Step Loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35:531-542, 2000.
- Rega, G., Lenci, S. Identifying, Evaluating and Controlling Dynamical Integrity Measures in Non-Linear Mechanical Oscillators. *Nonlinear Analysis*, 63:902-914, 2005.
- Rosenberg, R. M. On Normal Vibrations of a General Class of Nonlinear Dual-Mode Systems. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 28:275-283, 1961.
- Rosenberg, R. M. The Normal Modes of Nonlinear n-degrees-of-freedom Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 30:7-14, 1962.
- Rosenberg, R. M. On Nonlinear Vibrations of Systems with many degrees-of-freedom. *Adv. Appl. Mech.*, 9:155-242, 1966.
- Santee, D.M. *Estudo do Acoplamento Modal, da Quebra de Simetria e das Distribuições de Energia na Perda de Instabilidade de Cascas Cilíndricas Sob a Ação de Cargas Combinadas*. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1988.
- Shaw, S.W.; Pierre, C. Nonlinear Normal Modes and Invariant Manifold. *Journal of Sound and Vibration*, 150:170-173, 1991.
- Shaw, S.W., Pierre, C. Normal Modes of Vibration for Non-Linear Continuous Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169:319-347, 1994.
- Shaw, S. W., Pierre, C., Pesheck, E. Modal Analysis-Based Reduced-Order Models for Nonlinear Structures-An Invariant Manifold Approach. *The Shock and Vibration Digest*, 31:3-16, 1999.
- Silva, F.M.A. *Modelos de Dimensão Reduzida para Análise das Oscilações Não-Lineares e Estabilidade de Cascas Cilíndricas*. Tese de Doutorado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.
- Soliman, M.S., Gonçalves, P.B. Chaotic Behavior Resulting in Transient and Steady State Instabilities of Pressure-Loaded Shallow Spherical Shells. *Journal of Sound and Vibration*, 259:497-512, 2003.
- Thompson, J.M.T., Hunt, G.W. *A General Theory of Elastic Stability*. John Wiley and Sons, London, 1973.
- Tvergaard, V. Imperfection-Sensitivity of a Wide Integrally Stiffened Panel Under Compression. *Int. J. Solids Structures*, 9:177-192, 1973.
- Vakakis, A. F. *Analysis and Identification of linear and Nonlinear Normal Modes in Vibrating Systems*. Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, USA, 1991.
- Vakakis, A. F. Nonlinear Normal Modes (NNMs) and their Applications in Vibration Theory: an Overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11:3-22, 1997.
- Yamaki, N. *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*. Elsevier Science Publishers B. V., Netherlands, 1984.