

FRECUENCIAS NATURALES DE PLACAS ROMBOIDALES

P. M. Bellés^{1,2} y C. P. Filipich^{1,3} y J. L. Pombo^{1,4}

¹ Universidad Nacional de Sur, Departamento de Ingeniería. Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: pbelles@criba.edu.ar

² CIC, Provincia de Buenos Aires, Argentina.

³ Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional.

⁴ Laboratorio de Vibraciones Mecánicas, Universidad Nacional del Sur.
Avda. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina.

Palabras clave: frecuencias, placas, variacional, numérico, experimental.

Resumen. *Se obtienen las frecuencias naturales de placas delgadas de forma romboidal, empleando una solución generalizada. Para ello se desarrolla una aplicación del MEC (Método del Elemento Completo) con el fin de analizar las vibraciones transversales libres de placas cuadrangulares, considerando diversas combinaciones de bordes apoyados y empotrados.*

El MEC es un método variacional que consiste básicamente en la minimización de un funcional haciendo uso de secuencias apropiadas. La precisión de la solución puede ser arbitrariamente fijada en función de la cantidad de términos que se consideren en las secuencias minimizantes empleadas.

Se ha estudiado la placa de forma romboidal como caso particular del problema de vibración de placas cuadrangulares genéricas. La elección de esta geometría tiene la finalidad de comparar la solución del MEC con resultados reportados por otros autores, ya que en su forma cuadrangular genérica no se dispone de una solución clásica en la teoría de la elasticidad. En el presente trabajo se han obtenido los valores de frecuencias naturales obtenidas con el MEC, con el método de elementos finitos y experimentalmente. También se presentan las formas modales experimentales y numéricas. Se realizan comparaciones con resultados publicados por diversos autores para este tipo de placas.

1. INTRODUCCIÓN

El MEC es un método variacional directo que requiere proponer un funcional adecuado el cual será extremado mediante secuencias minimizantes apropiadas. Con el método empleado se obtienen soluciones analíticas teóricamente exactas y con precisión numérica especificada.

Han sido estudiados con el MEC diversos problemas con condiciones iniciales y de borde^{1,2,3,4}. Las series utilizadas son de convergencia uniforme, al menos para las funciones esenciales (son aquellas que involucran derivadas de orden $\leq (k-1)$, si $2k$ es el mayor orden de derivación de la ecuación diferencial). Los resultados pueden ser hallados con precisión fijada incrementando la cantidad de términos en las secuencias hasta que se alcanza una cantidad de dígitos establecida.

Las frecuencias de una placa delgada de forma romboidal con sus bordes empotrados fueron calculadas con el MEC y se compararon con los resultados experimentales obtenidos a partir de modelos de la placa construidos y ensayados en el Laboratorio de Vibraciones Mecánicas del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur. También se presentan los valores de las frecuencias y modos de vibración correspondientes, obtenidos con el Método de Elementos Finitos (MEF).

2. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

La aplicación del MEC se basa en la propuesta de series trigonométricas de convergencia uniforme en un dominio cartesiano ortogonal unitario. En este caso la placa tiene forma romboidal en el sistema original de coordenadas (x, y) de la Figura (1-a). Para efectuar la transformación se utiliza una variante de las coordenadas adimensionales naturales empleadas usualmente en el método de elementos finitos⁵. La diferencia en este caso consiste en que el origen de coordenadas se hace coincidir con un vértice del cuadrilátero y no con su centro geométrico como es habitual.

De este modo las nuevas variables espaciales $(X$ e $Y)$, adoptarán valores entre 0 y 1. Por lo tanto el dominio transformado será el cuadrado de lado unitario de la Figura (1-b), apropiado para efectuar las integraciones en dos dimensiones que resultan de la aplicación del MEC.

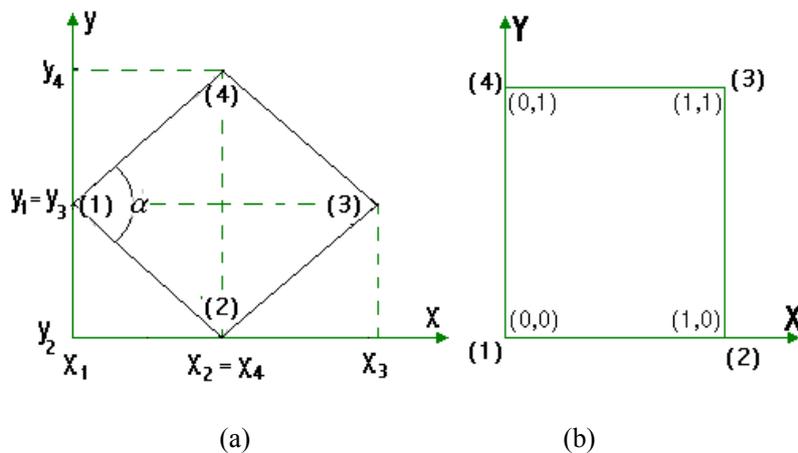


Figura 1: Sistemas de referencia original (a) y transformado (b)

Se efectúa la transformación biunívoca $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ empleando funciones de interpolación geométrica $N_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{y}_i \quad (1)$$

Las funciones de forma son polinómicas y bilineales en las variables \mathbf{X} e \mathbf{Y} . La función de forma correspondiente al vértice genérico “i” es:

$$N_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \beta_{i1} + \beta_{i2} \mathbf{X} + \beta_{i3} \mathbf{Y} + \beta_{i4} \mathbf{X}\mathbf{Y} \quad (2)$$

donde β_{ij} son constantes cuyos valores se determinan imponiendo las respectivas condiciones para las funciones de forma $N_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ en cada vértice de la placa ($i=1,2,3,4$), obteniéndose:

$$N_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 1 - \mathbf{X} - \mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{Y} = (1 - \mathbf{X})(1 - \mathbf{Y}) \quad (3)$$

$$N_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{X}(1 - \mathbf{Y}) \quad (4)$$

$$N_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}\mathbf{Y} \quad (5)$$

$$N_4(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(1 - \mathbf{X}) \quad (6)$$

Se verifica que para cualquier punto del dominio transformado, las funciones de forma halladas cumplen con la condición: $N_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + N_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + N_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + N_4(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 1$.

Desarrollando las sumas indicadas en (1), e introduciendo las (3, 4, 5 y 6), se puede escribir:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{x}_i = [(1 - \mathbf{X})(1 - \mathbf{Y})] \mathbf{x}_1 + [\mathbf{X}(1 - \mathbf{Y})] \mathbf{x}_2 + [\mathbf{X}\mathbf{Y}] \mathbf{x}_3 + [\mathbf{Y}(1 - \mathbf{X})] \mathbf{x}_4 \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{y}_i = [(1 - \mathbf{X})(1 - \mathbf{Y})] \mathbf{y}_1 + [\mathbf{X}(1 - \mathbf{Y})] \mathbf{y}_2 + [\mathbf{X}\mathbf{Y}] \mathbf{y}_3 + [\mathbf{Y}(1 - \mathbf{X})] \mathbf{y}_4$$

Sea A^* el área de la placa en el dominio de integración original (\mathbf{x}, \mathbf{y}) y A el área en el dominio transformado unitario, con ejes de referencia (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) . Se verifica:

$$\iint_{A^*} d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \iint_A |\mathbf{J}| d\mathbf{X} d\mathbf{Y} \quad (8)$$

donde $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz jacobiana o simplemente el jacobiano de la transformación y su forma es la siguiente:

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{Y}} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} = \{\mathbf{x}_i\}^T \underbrace{\left[\left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{X}} \right\} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{Y}} \right\}^T - \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{Y}} \right\} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{X}} \right\}^T \right]}_{\text{matriz } [N'N']} \{\mathbf{y}_i\} = \{\mathbf{x}_i\}^T [N'N'] \{\mathbf{y}_i\} \quad (9)$$

La matriz $[N'N']$ es cuadrada de orden 4. Se obtiene efectuando las operaciones matriciales indicadas en (9). En forma explícita se escribe:

$$|\mathbf{J}| = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1-Y & Y-X & X-1 \\ Y-1 & 0 & X & 1-X-Y \\ X-Y & -X & 0 & Y \\ 1-X & X+Y-1 & -Y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = ad - cb \quad (10)$$

Siendo:

$$a \equiv a(Y) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{X}} x_i = (Y-1)(x_1 - x_2) + Y(x_3 - x_4) \quad (11)$$

$$b \equiv b(Y) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{X}} y_i = (Y-1)(y_1 - y_2) + Y(y_3 - y_4) \quad (12)$$

$$c \equiv c(X) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{Y}} x_i = (X-1)(x_1 - x_2) + X(x_3 - x_4) \quad (13)$$

$$d \equiv d(X) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{Y}} y_i = (X-1)(y_1 - y_2) + X(y_3 - y_4) \quad (14)$$

3. FUNCIONAL MODIFICADO Y CONDICIÓN DE EXTREMO

El funcional adimensional correspondiente a las vibraciones libres de una placa apoyada o empotrada (que coincide con la energía total de la placa) es:

$$F(\mathbf{w}) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2} \right)^2 - \Omega^2 \mathbf{w}^2 \right] dx dy \quad (15)$$

donde $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y)$ es el desplazamiento transversal de la placa. Además, se define el siguiente parámetro adimensional de frecuencia:

$$\Omega \equiv \lambda^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega \quad (16)$$

donde ω es la frecuencia circular, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidez flexional, ρ la densidad del

material, ν es el coeficiente de Poisson, h el espesor y λ es la distancia entre dos lados opuestos de la placa.

La notación empleada para las derivadas es la siguiente:

$$\mathbf{w}_{xx} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2}; \mathbf{w}_{yy} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2}; \mathbf{w}_x \equiv \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X}; \bar{\mathbf{w}}_y \equiv \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial Y}; \mathbf{w}_{xx} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial X^2}; \mathbf{w}_{yy} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial Y^2}; \mathbf{w}_{xy} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial X \partial Y}$$

Si indicamos con $F(\mathbf{w}(X, Y))$ el funcional transformado, entonces se tiene:

$$F(\mathbf{w}) = \iint_{A^*} \left((\mathbf{w}_{xx} + \mathbf{w}_{yy})^2 - \Omega^2 \mathbf{w}^2 \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{w}) |J| dXdY \quad (17)$$

En la (17) debe expresarse $F(\mathbf{w})$ en términos del desplazamiento transversal (\mathbf{w}) y sus derivadas con respecto a las nuevas coordenadas ($\mathbf{w}_X, \mathbf{w}_Y, \mathbf{w}_{XX}, \mathbf{w}_{YY}, \mathbf{w}_{XY}$).

El procedimiento algebraico es sumamente extenso y se ha considerado conveniente no incluirlo. A continuación se presenta la expresión final obtenida para el funcional modificado:

$$F(X, Y) = \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{w}_{XY} V_1 + \mathbf{w}_X V_2 + \mathbf{w}_Y V_3 + \mathbf{w}_{YY} V_4 + \mathbf{w}_{XX} V_5)^2 |J| dXdY - \Omega^2 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{w}^2 |J| dXdY \quad (18)$$

Para simplificar la expresión del funcional se han introducido en la (20) los coeficientes V_1, \dots, V_5 . Dichos coeficientes, que son funciones de X e Y , son de la forma:

$$V_1 = 2bc(bd + ac); V_2 = 2(da_Y - cb_Y)(bd + ac)|J|; V_3 = 2(ab_Y - ba_Y)(bd + ac)|J|; \\ V_4 = (b^2 + a^2)|J|; V_5 = -(d^2 + c^2)|J| \quad (19)$$

donde a, b, c, d están dadas por (11) a (14). Además, los subíndices (a_Y, b_Y) indican las derivadas respectivas.

Se impone la condición de extremo mediante la minimización del funcional, o sea:

$$\delta F(\mathbf{w}) = 0 \quad (20)$$

Aplicando la condición a (20), se escribe:

$$2 \delta F(\mathbf{w}) = \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{w}_{XY} V_1 + \mathbf{w}_X V_2 + \mathbf{w}_Y V_3 - \mathbf{w}_{YY} V_4 + \mathbf{w}_{XX} V_5) \\ (\delta \mathbf{w}_{XY} V_1 + \delta \mathbf{w}_X V_2 + \delta \mathbf{w}_Y V_3 - \delta \mathbf{w}_{YY} V_4 + \delta \mathbf{w}_{XX} V_5) |J| dXdY - \Omega^2 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{w} \delta \mathbf{w} |J| dXdY = 0 \quad (21)$$

4. SECUENCIAS DEL MEC

Se introduce la secuencia extremante para el desplazamiento transversal de la placa. La serie propuesta es:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j + F(X, Y) \quad (22)$$

con $i = 1, 2, \dots, M$ y $j = 1, 2, \dots, N$. Se ha empleado la notación simplificada siguiente:

$$s_i \equiv \text{sen}(\alpha_i X); c_i \equiv \text{cos}(\alpha_i Y); s_j \equiv \text{sen}(\beta_j X); c_j \equiv \text{cos}(\beta_j Y) \quad \text{con} \quad \alpha_i \equiv i\pi; \beta_j \equiv j\pi$$

en la (22) $F(X, Y)$ es la función soporte que se escribe:

$$F(X, Y) \equiv \sum^N b_j s_j + \sum^M a_i s_i + X \left(a_0 + \sum^N A_{0j} s_j \right) + Y \left(b_0 + \sum^M A_{i0} s_i \right) + A_{00} XY + k$$

En nuestro caso, el subconjunto completo que satisface las condiciones de borde, conduce a la nulidad de la función soporte.

En este trabajo se adoptó el mismo número de términos para las series en ambas direcciones con lo cual no se pierde generalidad, logrando una significativa simplificación en las expresiones algebraicas.

Las derivadas de w con respecto a (X, Y) son:

$$w_X = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i A_{ij} c_i s_j \tag{23}$$

$$w_{XX} = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i^2 A_{ij} s_i s_j \tag{24}$$

$$w_{XY} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i \beta_j A_{ij} c_i c_j \tag{25}$$

$$w_Y = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \beta_j A_{ij} s_i c_j \tag{26}$$

$$w_{YY} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \beta_j^2 A_{ij} s_i s_j \tag{27}$$

Se observa que las expresiones (23) y (26) son de convergencia uniforme en tanto que el resto son convergentes en L_2 , pero satisfacen el requerimiento de los métodos directos como el empleado.

Introduciendo las ecuaciones (22) a (27) en (21), se obtiene una suma de 26 términos. A un término genérico $T_n(i,j,p,q)$ le corresponde una integral $I_n(i,j,p,q)$, y se escribe de la forma siguiente:

$$T_n = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \delta A_{ij} \left\{ \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} I_n \right\} \quad (n = 1, \dots, 26) \tag{28}$$

para que la condición (20) se satisfaga, debe cumplirse que

$$\sum_{n=1}^{26} T_n = 0 \tag{29}$$

Puesto que las variaciones δA_{ij} son independientes, debe verificarse para cada (i, j) que:

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} [(I_1 + I_2 + \dots + I_{25}) - \Omega^2 I_{26}] = 0 \quad (\forall i, j) \tag{30}$$

que pueden escribirse:

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} [\Phi_1 - \Omega^2 \Phi_2] = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} \Phi = 0 \quad (\forall i, j) \quad (31)$$

donde:

$$\Phi_1 = \Phi_1(i, j, p, q) \equiv I_1 + \dots + I_{25}; \Phi_2 = \Phi_2(i, j, p, q) \equiv I_{26}; \Phi(i, j, p, q) = \Phi_1 - \Omega^2 \Phi_2 \quad (32)$$

En definitiva, la condición de extremo para el funcional se expresa:

$$\left(\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} \Phi \right) = 0 \quad (\forall i, j) \quad (33)$$

Resulta un sistema de ecuaciones homogéneo que proviene de imponer la nulidad al determinante del sistema (33):

$$|\Phi_1 - \Omega^2 \Phi_2| = 0 \quad (34)$$

En el presente trabajo se ha obviado el desarrollo de las integrales que conducen a la obtención de las matrices Φ_1 y Φ_2

5. CONDICIONES DE BORDE

El paso siguiente consiste en aplicar las condiciones de borde (CB) de empotramiento en los cuatro bordes de la placa, como se indica en la Figura 2.

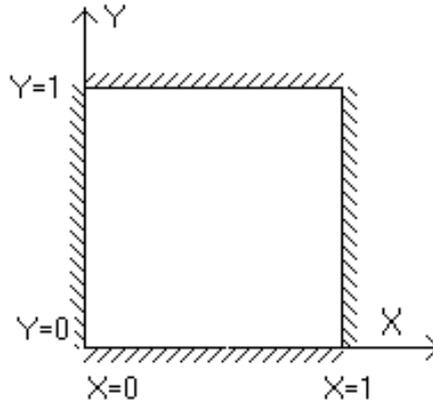


Figura 2: placa con bordes empotrados.

Las CB que deben aplicarse a la placa empotrada son ocho. Las cuatro que imponen desplazamiento nulo ($w = 0$) los bordes se cumplen automáticamente por las series adoptadas. Deben aplicarse las cuatro condiciones de giro nulo: $w_x = 0$ en $Y = 0, Y = 1$ y $w_y = 0$ en $X = 0, X = 1$. Dichas CB se expresan por medio del siguiente sistema de ecuaciones de $4M$ ecuaciones con M^2 incógnitas:

$$\begin{aligned}
 I) \quad & \sum_{i=1}^M \alpha_i A_{ij} = 0 \quad (j=1,2,\dots,M) \Rightarrow \alpha_1 A_{1j} + \alpha_2 A_{2j} + \dots + \alpha_M A_{Mj} = 0 \\
 II) \quad & \sum_{j=1}^M \alpha_j A_{ij} = 0 \quad (i=1,2,\dots,M) \Rightarrow \alpha_1 A_{i1} + \alpha_2 A_{i2} + \dots + \alpha_M A_{iM} = 0 \\
 III) \quad & \sum_{i=1}^M (-1)^i \alpha_i A_{ij} = 0 \quad (j=1,2,\dots,M) \Rightarrow -\alpha_1 A_{1j} + \alpha_2 A_{2j} + \dots + (-1)^M \alpha_M A_{Mj} = 0 \\
 IV) \quad & \sum_{j=1}^M (-1)^j \alpha_j A_{ij} = 0 \quad (i=1,2,\dots,M) \Rightarrow -\alpha_1 A_{i1} + \alpha_2 A_{i2} + \dots + (-1)^M \alpha_M A_{iM} = 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

Estas $4M$ ecuaciones, 4 de ellas son combinación lineal de las demás y por lo tanto hay $4M - 4$ ecuaciones independientes de las cuales se pueden despejar $4M - 4$ incógnitas.

En consecuencia, cuando se resuelve el problema de la placa empotrada en sus cuatro bordes, la aplicación de las restricciones produce una reducción del sistema homogéneo que resulta de aplicar la expresión (36).

Como es sabido, el estudio de las vibraciones naturales conduce a un problema de valores propios. En este caso, los autovalores son Ω_i , proporcionales a la frecuencias naturales. Dichos autovalores son obtenidos en el presente trabajo mediante la técnica de iteración inversa.

6. ENSAYO EXPERIMENTAL

6.1 Modelo

El modelo ensayado consiste en una placa de acero en forma de rombo con lado $L=0.35\text{m}$ de 0.91 mm de espesor. Las propiedades del material son: densidad= 7855 kg/m^3 , módulo de elasticidad= $1.9995\text{e}11\text{ N/m}^2$ y coeficiente de Poisson: 0.29 . El empotramiento de los bordes se materializó con dos marcos (inferior y superior) de gran rigidez que se fijaron entre sí mediante bulones. La geometría de la placa se define con las coordenadas de los vértices, como se indica en la Figura 1-a de la placa. Además: $\alpha = 75^\circ$, $L_1 = L \cos \alpha$, $L_2 = L \sin \alpha$.

Nudo	1	2	3	4
x	0	L1	2 L1	L1
y	L2	0	L2	2 L2

6.2 Mediciones y equipo

Es sabido que teóricamente no hay diferencia respecto a cuál es la magnitud física (aceleración, velocidad o desplazamiento) que se mida, ya que todas ellas están relacionadas con la frecuencia. En este caso se adoptaron los *desplazamientos* como señal vibratoria.

El movimiento de la placa es convertido en una señal eléctrica por el *transductor de desplazamientos*. Éste es un dispositivo que transforma los cambios de desplazamiento (parámetro mecánico) en cambios de voltaje/corriente (parámetro eléctrico). Se empleó un sensor de desplazamiento relativo sin contacto, que tiene un principio de operación basado en las corrientes parásitas. Las señales analógicas provenientes del sensor de proximidad son convertidas en señales digitales por medio de un convertidor. El sensor está constituido por una sonda o cabezal medidor, que es una bobina eléctrica encapsulada en un material estable (fibra de vidrio) y fijada a la carcasa. La sonda está unida mediante un cable a un “drive” que es un oscilador-demodulador que por un lado recibe la señal de alta frecuencia de la bobina, y por otro lado demodula la misma, entregando una señal proporcional a la distancia entre el cabezal y el cuerpo vibrante. Dicha señal luego se visualiza en la pantalla del osciloscopio y se realiza un análisis espectral de la misma.

El *osciloscopio* es un instrumento electrónico que registra los cambios de tensión producidos en circuitos eléctricos y electrónicos y los muestra en una pantalla de rayos catódicos.

La pantalla del osciloscopio posee divisiones horizontales y verticales que forman una retícula, dichas divisiones equivalen a intervalos fijos de tiempo (horizontales) y voltaje (vertical).

6.3 Desarrollo del experimento

Excitación transitoria: Para provocar la vibración libre de la placa el modelo es excitado mediante la aplicación de impactos de duración adecuada, obteniéndose como respuesta un movimiento vibratorio que es la combinación de las distintas frecuencias naturales. La separación de las frecuencias se efectúa mediante análisis espectral utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT). Este algoritmo está presente en todos los analizadores de proceso de señales y permite que los datos medidos en el dominio del tiempo, sean transformados al dominio de la frecuencia.

En la función de respuesta de frecuencia (FRF) que entrega la FFT, se observan picos en coincidencia con las frecuencias para las cuales la respuesta en el tiempo alcanza valores máximos.

Excitación permanente: Mediante un oscilador se genera una señal de frecuencia variable, la cual posteriormente es amplificada. Un parlante convierte las señales eléctricas provenientes del amplificador en movimientos vibratorios que excitan el aire circundante produciendo ondas sonoras de frecuencia idéntica a la de las señales eléctricas que recibe. Para obtener una excitación forzada en un determinado rango de frecuencias, el parlante se coloca muy cerca del modelo, de manera de lograr una amplitud suficiente para poder captar la respuesta dinámica con el sensor de proximidad.

Para la determinación de las líneas nodales se mantiene la excitación forzada en correspondencia con cada frecuencia y se desplaza el sensor de medición comparando su fase y amplitud con la de excitación, a través de la utilización de la técnica de las figuras de Lissajous en un osciloscopio. Dichas curvas, debidamente interpretadas, permiten conocer el desfase en grados existente entre dos señales distintas de la misma frecuencia.

El período de una señal se corresponde con una fase de 360°. El desfase indica el ángulo de atraso o adelanto que posee una señal con respecto a otra tomada de referencia, si ambas poseen el mismo período. Comparando las señales de excitación y las de respuesta, se observan cambios de fase de 180° entre las frecuencias anteriores y posteriores a la frecuencia natural.

7. RESULTADOS

En la Tabla 1 se muestran los valores de las frecuencias naturales (expresadas en Hertz) de la placa con bordes empotrados. Los resultados que se presentan fueron obtenidos con MEC, MEF y experimentalmente.

En la 2° columna se muestran los resultados obtenidos con el MEC utilizando 50 términos en las series. En la 3° se presentan los resultados experimentales y entre paréntesis la diferencia porcentual de éstos con el MEC. Se observa que la máxima diferencia es aproximadamente de 8%, por lo que los resultados experimentales obtenidos han sido considerados satisfactorios con la precisión asumida, sin analizar la naturaleza de los posibles errores.

En la 4° columna se muestran los valores correspondientes al modelo de elementos finitos utilizando el módulo de cálculo para análisis lineal de Algor⁶ y entre paréntesis la diferencia porcentual con el MEC. El modelo numérico consta de 2500 elementos tipo placa con la formulación de Veubecke. Se comprueba que utilizando solamente 50 términos en las series del MEC, la máxima diferencia con el MEF es inferior a 1% en la tercera frecuencia, mientras que en las restantes es apreciablemente menor.

Tabla 1. frecuencias en Hertz.

Modo	MEC	Experimental	MEF
1°	69.01957	63.87 (+8.06 %)	68.696 (+0.47 %)
2°	130.49840	130.8 (-0.23 %)	131.115 (-0.47 %)
3°	150.05409	148.4 (+1.11 %)	148.640 (+0.95 %)

Se calcularon también los coeficientes de frecuencia adimensionales de acuerdo a la expresión (16): $\Omega \equiv \lambda^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega$, y se analizó la convergencia para la frecuencia fundamental teniendo en cuenta el aumento del número de términos en las series del MEC desde 5 hasta 50. El coeficiente de frecuencia con 50 términos es $\Omega = 38.3868$ En la curva de convergencia, que se muestra en la Figura 3, se tomó como referencia el valor 38.2052 que es la frecuencia fundamental adimensional obtenida con el modelo de elementos finitos.

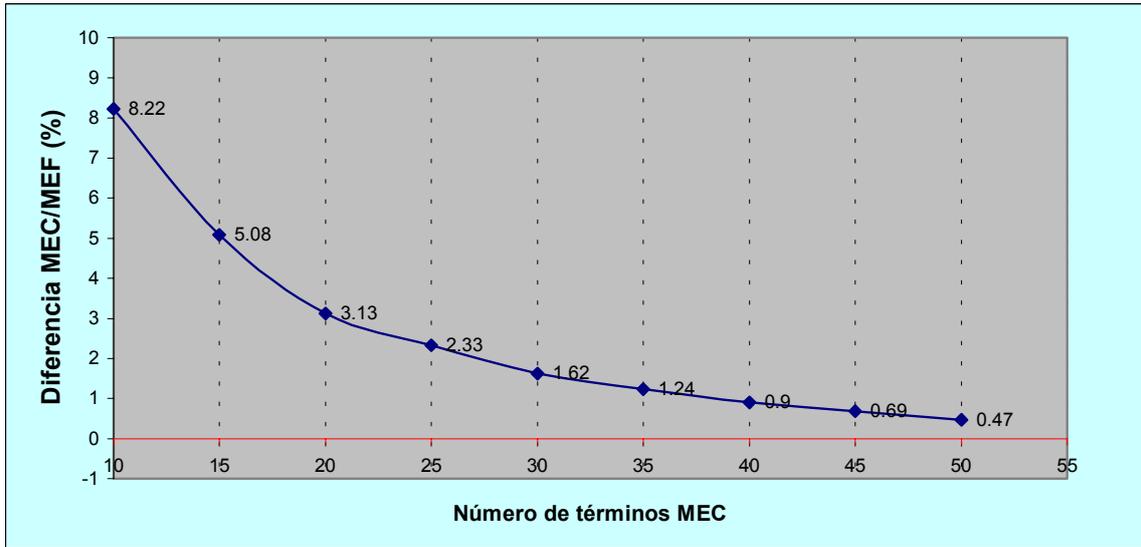


Figura 3. Frecuencia fundamental: curva de convergencia del MEC.

Por otra parte, Kuttler y Sigillito⁸ proporcionan cotas superiores e inferiores para las frecuencias de placas romboidales empotradas usando un método que usa funciones de prueba que no necesitan satisfacer condiciones de borde. En dicha referencia se dan los resultados para casos de simetría con número impar de ondas en ambas direcciones. Las cotas publicadas en la referencia⁸ son: 38.205 / 38.181 para la primera frecuencia. También en este caso la diferencia con el resultado del MEC con 50 términos es de 0.5%.

Las formas modales obtenidas experimentalmente para los tres primeros modos de vibración (Figura 5) se comparan con los resultados del MEF (Figura 4). En el laboratorio, las formas modales se reproducen esparciendo sobre la placa algún material formado por partículas sueltas y livianas (en este caso se utilizó azúcar). Se provoca la vibración en una frecuencia natural determinada (con aceleración mayor que 1G). Entonces las partículas son impulsadas alejándose de las zonas con mayores desplazamientos y acumulándose en las zonas donde éstos son menores. De esta forma se redistribuyen reproduciendo la forma modal que corresponde a esa frecuencia.



Figura 4. Método de elementos finitos: formas modales.



Figura 5. Ensayo experimental: formas modales.

8. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Como se ha dicho anteriormente, con el método empleado se obtienen soluciones analíticas teóricamente exactas. Esto significa que se fija la precisión deseada a través de un número de dígitos y se incrementa el número de términos de las sumas hasta lograrlo. Esto es posible dado que las series son convergentes, lo cual asegura la obtención de valores con la precisión requerida.

Con los equipos PC disponibles actualmente, la operación, transferencia y almacenamiento de datos constituyen un aspecto crítico cuando se aumenta la cantidad de términos que se consideran en las series del MEC. Sin embargo, se observa que las frecuencias calculadas utilizando solamente 50 términos, presentan una diferencia inferior al 1% con los resultados del MEF. El grado de precisión alcanzado con la aplicación del MEC se considera muy satisfactorio, teniendo en cuenta la complejidad del problema y las limitaciones planteadas como consecuencia de las grandes dimensiones de los sistemas de ecuaciones que se manejan y del gran volumen de transferencia de datos.

9. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la participación del Sr. Salvador La Malfa (CONICET, Instituto de Mecánica Aplicada-UNS) en los ensayos experimentales.

10. REFERENCIAS

- [1] C.P. Filipich, M.B. Rosales, "Beams and arcs exact frequencies via a generalized solution", *Journal of Sound and Vibration* **170**, 263-269, 1994.
- [2] M.B. Rosales, *Un método variacional no clásico y su aplicación a estática y dinámica de elementos estructurales*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, B.Blanca, 1997.

- [3] C.P. Filipich, M.B. Rosales, P.M.Bellés, "Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids", *Journal of Sound and Vibration* **212**, 599-610, 1998.
- [4] C.P. Filipich, M.B. Rosales, "Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate", *Journal of Sound and Vibration* **230**, 521-539, 2000.
- [5] E. Oñate Ibáñez de Navarra, *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España, 1992.
- [6] ALGOR12 Professional Mech/VE, Linear Stress and Dynamics Reference División. Pittsburg, Pennsylvania, EEUU. Algor Inc., 2000.
- [7] J. R. Kuttler and V. G. Sigillito, "Upper and lower bounds for frequencies of clamped rhombical plates", *Journal of Sound and Vibration*, **68**(4), 597-607 (1980).
- [8] P. S. Nair and S. Durvasula, "Vibration of skew plates", *Journal of Sound and Vibration*, **26**(1), 1-19 (1973).