

APLICACIÓN DEL CÁLCULO FRACCIONAL A LA PERDIDA DE ENERGIA EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS

Leidy Yoana Medina^a and Francisco Cabrera^b

^a*Departamento de Matemáticas, Grupo de Investigación Pangea, Universidad de Pamplona, Pamplona Km 1 Via pamplona, Colombia leidymedina12@gmail.com, <http://www.unipamplona.edu.co>*

^b*Departamento de Matemáticas, Grupo de Investigación Pangea, Universidad de Pamplona, Pamplona Km 1 Via pamplona, Colombia fcabrera61@yahoo.com.br, <http://www.unipamplona.edu.co>*

Keywords: Arbitrary order integration and differentiation, viscoelasticity, diffusive and propagation.

Abstract.

When there is an earthquake in a seismic active zone the energy that gets free spreads through the earth in shape of mechanical waves, this type of waves are called seismic waves. A similar phenomenon happens when an artificial disturbance is done to get subsoil seismic images in the oilfield's exploration.

To describe the propagation of these waves certain hypothesis are used in the wave's nature and also in the characteristic of the place where they propagate. One of the phenomenon's that should be taken into account in the study of the seismic wave's propagation is the attenuation. A way to diminish the energy propagation of a seismic wave is called anelastic. The attenuation is produced by the internal grain friction that composes the rock or for the fractures the rock has. The attenuation brings as consequence the change in the initial pulse and the scattering phenomenon, what means that the components of different frequency are propagation in a different velocity.

The attenuation process depends of the characteristics of the medium such as: porosity, density of the fractures, the kind of fluid fills the pores between others. Also, the attenuation of the seismic waves generally is represented to be inversely related with the quality factor which is denoted by Q .

Arbitrary order integration and differentiation or fractional calculus is a mathematic part that extends over the differential and integral calculus which is used to provide a better description of the material properties; it has been showed that fractional order models are more appropriate than integer order models to describe some materials properties.

This project will try to explain the energy lost of the wave propagation process in an anelastic medium. Using the interpolation between the heat or diffusion equation (the temporary derivative is 1) and the wave equation (the temporary derivative is 2) through the arbitrary order integration and differentiation (Fractional calculus), what means to take orders of the temporary derivative between 1 and 2 to provide a mixed behavior of the diffusive process to the propagative

1 INTRODUCCION

La idea de generalizar la noción de la derivada para valores no enteros, surgió con el nacimiento del propio cálculo. Los precusores del cálculo infinitesimal (Lebniz, L'Hopital, etc) motivados por la curiosidad de entender el significado de la derivada de orden fraccionario de una función para intentar explicar si tenía o no sentido la derivada de orden fraccionario; por ello se le asignó el nombre de cálculo fraccionario. Los problemas y áreas del conocimiento en los que se ha aplicado el cálculo fraccionario son numerosos, entre ellos, las ecuaciones diferenciales, la teoría de la probabilidad, la teoría de control, la teoría de la viscoelasticidad y la ecuación de onda-difusión que interpola el fenómeno difusivo y el fenómeno de propagación de una onda. En particular la viscoelasticidad es entendida como la combinación de un sólido elástico y un material (fluido) viscoso. Las ondas que se propagan en estos materiales pierden energía en forma de calor; la ecuación que modela este fenómeno es la ecuación de calor o de difusión, la cual tiene la derivada temporal de orden 1 y la ecuación que modela la propagación es la ecuación de onda cuya derivada temporal es 2 (Carcione, 2007). Es lógico intentar entender que sucede cuando el orden de la derivada temporal cambia paulatinamente desde 1 hasta 2. La aplicación de la derivada fraccionaria a la viscoelasticidad ha dado origen a lo que en la actualidad se conoce como reología fraccionaria (West. et al., 2003). Las ecuaciones constitutivas de los modelos reológicos, tradicionalmente son descritas por sistemas de ecuaciones diferenciales de orden 1 ó de orden 2. Estos modelos se aproximan a la realidad, sin embargo no explican satisfactoriamente la reología sobre todo de ciertos polímeros. Desde la década del 50 se viene estudiando los modelos reológicos cuyas ecuaciones son ecuaciones diferenciales fraccionarias.

2 DERIVADA FRACCIONARIA 3-ENFOQUES

2.1 Derivada de Grünwald-Letnikov

una función f es derivable en t si el limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1)$$

existe, en cuyo caso se denota por $\frac{df}{dt}$ ó $f'(t)$. utilizando inducción matemática se puede demostrar que la n ésima derivada de una función es:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n [-1]^r \binom{n}{r} f(t-rh) \right\}, \forall n > 0 \quad (2)$$

donde

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (3)$$

Este concepto se puede extender para valores negativos de n , valores reales e incluso valores complejos. Uno de los resultados que se puede obtener, es la generalización de la expresión (2). Considerando la siguiente expresión

$$f^{(p)}(t) = \left\{ \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \right\}, \forall n > 0 \quad (4)$$

Por conveniencia se utiliza la siguiente notación:

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+r-1)}{r!} \quad (5)$$

Si se reemplaza p por $-p$ es la expresión (3)

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \quad (6)$$

Si n es fijo entonces $f_h^{(-p)}(t)$ tiende a 0, cuando $h \rightarrow 0$, resultado que no es de interés. Para lograr un límite diferente de cero, se supone que $n \rightarrow \infty$, cuando $h \rightarrow 0$; es decir se toma $h = \frac{t-a}{n}$ donde a es una constante real, en este caso el valor de la expresión (6) puede tomar valor finito o infinito, si es finito, se denota por:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t), \quad \text{donde } nh = t - a \quad (7)$$

Tomando un valor arbitrario de p se llega a la siguiente expresión general:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (8)$$

la cual representa una p -integral. Finalmente se obtiene la generalización de las expresiones (2) y (8):

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (9)$$

la cual, cuando $p = n$ representa la derivada (2) y cuando $p = -n$ representa la p -integral. Para comprobar la existencia del límite (8) es de gran utilidad el **Teorema de Letnikov** (Podlubny, 1999), después de algunas operaciones se obtiene la primera expresión de la llamada Derivada de Grünwald-Letnikov:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \quad p > 0, \quad (10)$$

donde Γ representa la función Gamma (Función factorial generalizada). Partiendo de la expresión (2) se obtiene de la misma manera la segunda expresión de la Derivada de Grünwald-Letnikov para valores reales positivos de p .

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (11)$$

2.2 Derivada de Riemann-Liouville

Sea el operador integral

$$J_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (12)$$

$$D_0^{-\alpha} f(t) \longleftrightarrow J^\alpha f(t), \quad \alpha > 0 \quad (13)$$

Si $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ se obtiene la conocida fórmula de Cauchy:

$$J_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad t > 0 \quad (14)$$

Sean f y Φ_α dos funciones causales, es decir; $f(t) = \Phi_\alpha(t) = 0 \quad \forall t < 0$, donde

$$\Phi(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \quad (15)$$

con la anterior definición se puede verificar que,

$$J^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t) \quad (16)$$

Recordando que si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones causales se define la convolución entre ellas como:

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = g * f \quad (17)$$

Se puede demostrar que $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta} \quad \alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= \Phi_\alpha * \Phi_\beta * f(t) = (\Phi_\alpha * \Phi_\beta) * f(t) \\ &= \Phi_{\alpha+\beta} * f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Para las derivadas de orden positivo se cumple:

$$D^n J^n = I \Rightarrow D^n J^n(f(t)) = f(t) \quad (19)$$

el hecho de que $D^n J^n = I^1$ significa que D^n es el operador inverso de J^n . Se puede demostrar igualmente que $J^n D^n(f(t)) \neq f(t)$.

Tomando la expresión (14) entonces

$$\begin{aligned} J^n \{D^n f(t)\} &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} D^n f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \underbrace{\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_A \end{aligned}$$

Integrando por partes la expresión A se obtiene que:

$$J^n \{D^n f(t)\} = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0+) \frac{t^k}{k!} \quad (20)$$

La expresión (19) permite definir la derivada fraccionaria, $D^\alpha f = D^{\alpha+m-m} f = D^m D^{\alpha-m}(f)$

$$D^m D^{\alpha-m}(f) = D^m J^{m-\alpha}(f) = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m}, & \alpha = m \end{cases} \quad (21)$$

la cual se denomina la Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville.

¹es el operador identidad

2.3 Derivada de Caputo

Esta derivada se define a través de la Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

$$D_C^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t) \quad \text{donde} \quad m - 1 < \alpha < m$$

$$D_C^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m - 1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m}, & \alpha = m \end{cases} \quad (22)$$

Notese que

$$D^\alpha f(t) = D^m J^{m-\alpha} \neq J^{m-\alpha} D^m f(t) = D_C^\alpha f(t)$$

$$\frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{d^m}{dt^m} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau$$

$$D_C^\alpha f(t) = \left(D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (t) \quad (23)$$

Teniendo en cuenta que la derivada ordinaria (convencional) de una constante es cero, se espera que la derivada fraccionaria de una constante tambien sea cero; lo cual no sucede con algunas de las definiciones de derivada fraccionaria mencionadas anteriormente.

Por ejemplo la derivada fraccionaria de una constante con la definición de Riemann-Liouville ó con la definición de Grünwald-Letnikov es:

$$D_t^p(k) = \frac{k}{\Gamma(-p+1)} t^{-p}$$

y la derivada de Caputo de una constante es:

$$D_C^\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{0}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau = 0, \quad m - 1 < \alpha < m \quad (24)$$

3 VISCOELASTICIDAD Y ECUACIÓN DE ONDA FRACCIONARIA

Una **material elástico** es aquel que tiene la capacidad de recuperar su forma original una vez se deja de aplicar la fuerza que lo deformó (los materiales que no posean esta característica se denominan materiales anelásticos); en otras palabras, los materiales elásticos son aquellos que satisfacen la relación lineal entre los esfuerzos (σ) y las deformaciones (ϵ) (Ley de Hooke) (Carcione, 2007):

$$\sigma_{ij} = C \epsilon_{ij} \quad (25)$$

Estos materiales son descritos por una “unidad de elasticidad” representada por un resorte.

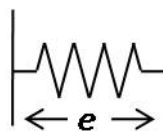


Figure 1: Unidad Elástica

Otros materiales son viscosos y no elásticos, a este tipo de materiales cuando se les aplica una fuerza, no se estiran, fluyen como un líquido; es decir hay una relación lineal entre los esfuerzos y la variación temporal de la deformación (Debnath, 2003). La importancia de estos materiales es que cuando la fuerza se retira o deja de actuar sobre el material, este no recupera su forma original, porque la fuerza ha sido “consumida” en el flujo de “fluidos”. La relación constitutiva en este caso es:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad \text{donde } \eta \text{ es la constante de viscosidad} \quad (26)$$

La propiedad de **viscosidad** es descrita por la “unidad de viscosidad” representada por un disipador.

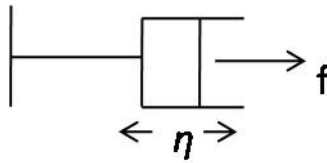


Figure 2: Unidad de Viscosidad

La visco-elasticidad es la combinación de un material elástico (sólido) y de un material viscoso (fluido), cuya representación es descrita por una unidad elástica y una unidad viscosa.

Algunos de los modelos visco-elásticos más representativos son: modelo de Maxwell, el modelo de Kelvin-Voight y el modelo de Zener, entre otros. (Carcione, 2007)

3.1 Modelo de Maxwell

Este modelo está formado por una unidad elástica y una unidad viscosa dispuesta en serie cuya representación gráfica es:

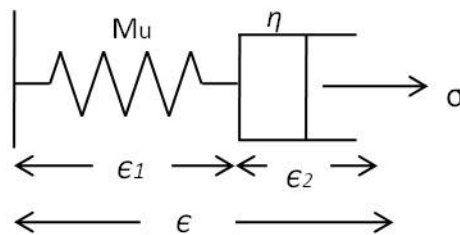


Figure 3: Modelo de Maxwell

Cuando se aplica un esfuerzo al sistema este produce una deformación ϵ_1 y ϵ_2 en el resorte y en el disipador respectivamente. Para el resorte se tiene un esfuerzo $\sigma = M_u \epsilon_1$, donde M_u es la constante de elasticidad y el esfuerzo correspondiente al disipador es $\sigma = \eta \partial_t \epsilon_2$

La deformación total correspondiente a este modelo es: $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$, reemplazando ϵ_1 y ϵ_2 se obtiene que la ecuación diferencial que representa este modelo es:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{M_u} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (27)$$

en el dominio de Fourier

$$\sigma(\omega) = M(\omega)\epsilon(\omega) \quad (28)$$

donde $M(\omega) = \frac{\omega\eta}{\omega^2\mathcal{T}^2 + 1}$ y $\mathcal{T} = \frac{\eta}{M_u}$ es el tiempo de relajación, luego

$$M(\omega) = M_1(\omega) + iM_2(\omega) \tag{29}$$

donde

$$M_1(\omega) = \frac{\omega^2\eta\mathcal{T}}{\omega^2\mathcal{T}^2 + 1}$$

$$M_2(\omega) = \frac{\omega\eta}{\omega^2\mathcal{T}^2 + 1}$$

en cuyo caso el M_1 significa o representa el almacenamiento de energía del sistema y M_2 representa las pérdidas de energías del sistema (Carcione, 2007).

3.2 Modelo de Kelvin-Voight

Este modelo está formado por una unidad elástica y una viscosa dispuestas en paralelo cuya representación gráfica es

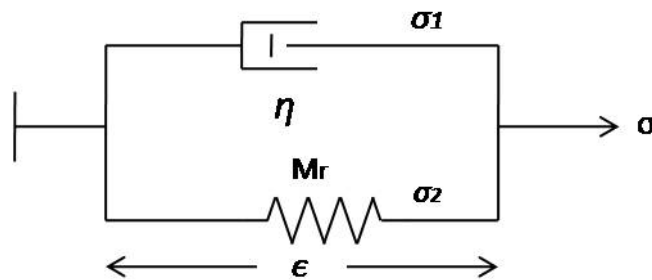


Figure 4: Modelo de Kelvin-Voight

El esfuerzo total del sistema es:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{30}$$

donde

$$\sigma_1 = M_r\epsilon,$$

$$\sigma_2 = \eta\partial_t\epsilon \tag{31}$$

Por lo tanto, el esfuerzo total aplicado es:

$$\sigma = M_r\epsilon + \eta\dot{\epsilon} = M_r + \eta\partial_t\epsilon \tag{32}$$

en el dominio de Fourier $\sigma(\omega) = (M_r + \eta\omega)\epsilon$

$$M_1 = M_r\epsilon$$

$$M_2 = \eta\omega\epsilon \tag{33}$$

donde M_1 y M_2 significa: el almacenamiento de energía y la pérdida de energía respectivamente.

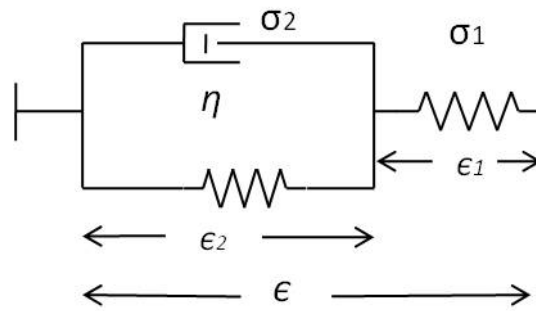


Figure 5: Modelo de Zener o estándar

3.3 Modelo de Zener

Este modelo está formado por el modelo de Voight dispuesta en serie con una unidad elástica en serie cuya representación gráfica es:

El esfuerzo total y la deformación total del sistema son:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2\end{aligned}\quad (34)$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma &= k_1 \epsilon_1 \\ \sigma_1 &= \eta \partial_t \epsilon_2 \\ \sigma_2 &= k_2 \epsilon_2\end{aligned}$$

en este caso la relación esfuerzo deformación es:

$$\sigma + \mathcal{T}_\sigma \partial_t \sigma = M_r (\epsilon + \mathcal{T}_\epsilon \partial_t \epsilon) \quad (35)$$

respectivamente donde

$$\begin{aligned}M_r &= \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \\ \mathcal{T}_\sigma &= \frac{\eta}{k_1 + k_2} \\ \mathcal{T}_\epsilon &= \frac{\eta}{k_2} \geq \mathcal{T}_\sigma\end{aligned}\quad (36)$$

en el cual \mathcal{T}_σ y \mathcal{T}_ϵ corresponden al tiempo de relajación.

3.4 Algunos modelos Fraccionarios

Los modelos matemáticos (de orden entero) que modelan la visco-elásticidad no son adecuados, pues se ha demostrado que los modelos de orden fraccionario son más apropiados que los modelos de orden entero para la descripción de propiedades de algunos materiales (Podlubny, 1999). El modelo fraccionario propuesto por Scott Blair (Blair, 1947) es de la forma:

$$\sigma(t) = E_0 D_t^\alpha \epsilon(t) \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1 \quad (37)$$

Caputo y Mainardi (Caputo and Mainardi, 1971) extendieron el modelo de Zener (de orden entero) al modelo fraccionario de la forma:

$$\sigma(t) + a \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = m \epsilon(t) + b \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1 \quad (38)$$

si $a = m = 0$ y $b = E$ entonces la ecuación (38) representa el modelo propuesto por Scott Blair. Si $a = 0$ entonces dicha ecuación representa el modelo fraccionario de Kelvin-Voighth:

$$\sigma(t) = m\epsilon(t) + b \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1 \quad (39)$$

y si $m = 0$ en (38) se obtiene el modelo fraccionario de Maxwell:

$$\sigma(t) + a \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = b \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1 \quad (40)$$

3.5 Ecuación Fraccionaria de Difusión-Onda

Dada la siguiente expresión

$$D_t^{2\alpha} u(x, t) = d \frac{d^2}{dx^2} u(x, t) \quad \text{donde } 1/2 \leq \alpha \leq 1 \quad (41)$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

$$\frac{d}{dt} u(x, 0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

si $\alpha = 1/2$ la ecuación (41) es la ecuación de calor (difusión) cuya solución es:

$$u_c(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} * \phi(x) \quad (42)$$

y si $\alpha = 1$ la ecuación (41) representa la ecuación de Onda, cuya solución es:

$$u_o(x, t) = \phi\left(x - \frac{t}{d}\right) \quad (43)$$

En este trabajo se propone una solución de (41) de la forma:

$$u_\alpha(x, t) = Au_o(x, t) + Bu_c(x, t) \quad (44)$$

donde $A, B \geq 0$ y $A + B = 1$.

La ecuación (44) representa una superposición de la solución de la ecuación de onda (u_o) y la solución de la ecuación de calor (u_c). Las constantes A y B significan el peso o la importancia de cada solución dependiendo del valor de α . Si se establece una relación lineal entre A y α : $A = 2\alpha + f$; si $\alpha = 1/2$, $A = 0$ y si $\alpha = 1$, $A = 1$, por lo tanto $A = 2\alpha - 1$.

En el siguiente experimento numérico se resuelve la ecuación (41) con condiciones iniciales específicas:

$$D_t^{2\alpha} u(x, t) = d \frac{d^2}{dx^2} u(x, t) \quad \text{donde } 1/2 \leq \alpha \leq 1 \quad (45)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) = e^{-ax^2}$$

$$\frac{d}{dt} u(x, 0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

En las figuras 6, 7 y 8 se muestra los resultados para diferentes valores de la derivada fraccionaria α , en diferentes tiempos.

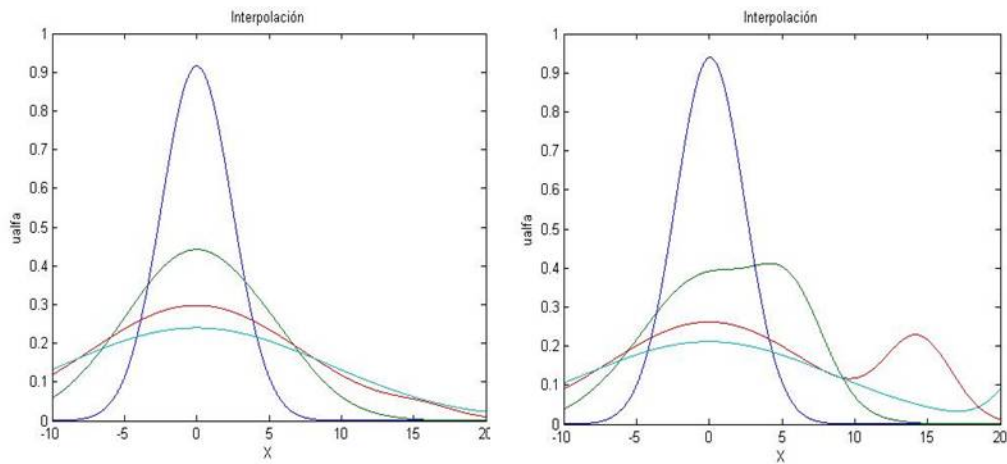


Figure 6: Solución numérica de la ecuación diferencial de onda-difusión. A la izquierda corresponde para un $\alpha = 0.51$. Derecha para $\alpha = 0.6$ azul $t = 0.1$, verde $t = 2$, rojo $t = 5$, celeste $t = 8$

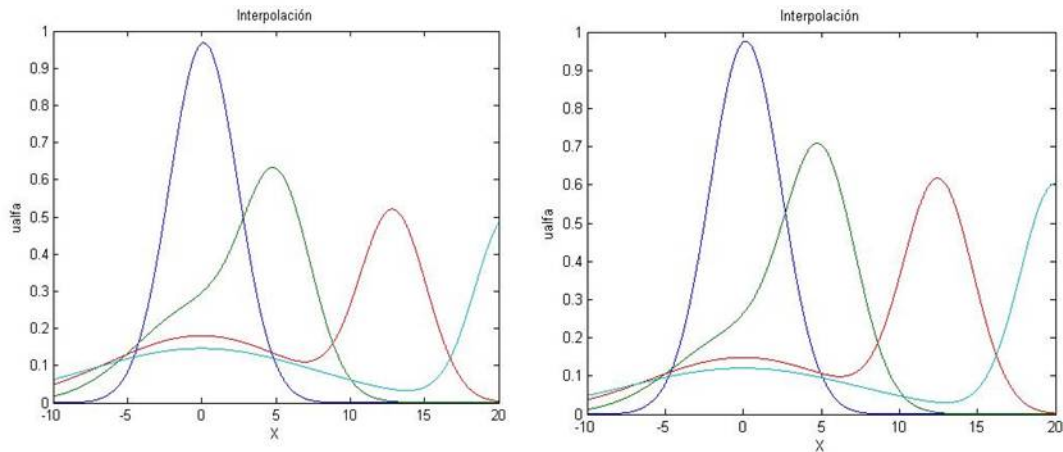


Figure 7: Solución numérica de la ecuación diferencial de onda-difusión. A la izquierda corresponde para un $\alpha = 0.75$. Derecha para $\alpha = 0.8$

De acuerdo a las figuras 6, 7 y 8, cuando el α incrementa su valor hacia 1, la solución de la ecuación (45) comienza a deformarse y a desplazarse lentamente, creando un “pico” cuya amplitud va aumentando a medida que el α aumenta, es decir se va transformando de un proceso difusivo a un proceso propagatorio.

Lo contrario sucede cuando el α disminuye desde 1 hacia 0.5, la onda viajera empieza a perder amplitud, se deforma y deja de desplazarse despues de un tiempo, es decir se transforma en un proceso difusivo.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la derivada fraccionaria desde tres enfoques diferentes (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo), y su aplicación a la viscoelásticidad y a la reología fraccionaria (ecuación de difusión-onda). Se estudió por medio de una "interpolación" entre la solución de la ecuación de onda y la solución de calor, el comportamiento mixto entre el proceso difusivo y el proceso propagatorio, para diferentes valores de la derivada temporal (entre 1 y 2) .

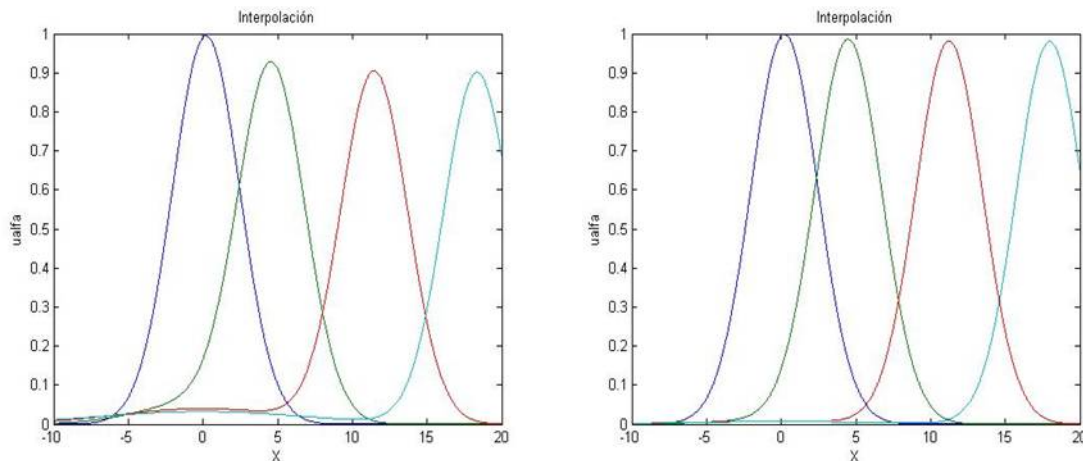


Figure 8: Solución numérica de la ecuación diferencial de onda-difusión. A la izquierda corresponde para un $\alpha = 0.9$. Derecha para $\alpha = 0.95$

REFERENCES

- Blair G.S. The role of psychophysics in rheology. *J. Colloid Science*, 2:21–32, 1947.
- Caputo M. and Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism, *pure appl. Geophys*, 91:137–147, 1971.
- Carcione J.M. *Wave fields in Real Media. Wave propagation in Anisotropic, Anelastic, porous and electromagnetic media*, volume 38. Elsevier, 2007.
- Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *Hindawi Publishing Corp*, 54:3413–3442, 2003.
- Podlubny I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*, volume 198. Mathematics in science and Engineering, Academic Press, San Diego, 1999.
- West. B.J., Bologna M., and Grigolini P. *Physics of Fractal Operators*, volume 1. Springer, 2003.