

UN ALGORITMO DE CONTACTO SUPERFICIE-SUPERFICIE APLICABLE A PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES

Federico J. Cavalieri , Víctor Fachinotti y Alberto Cardona

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
(CIMEC-INTEC). CONICET - Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina, fcavalieri@ceride.gov.ar <http://www.cimec.org.ar>*

Palabras Clave: contacto mecánico, mortar, segmento-segmento, métodos de los elementos finitos.

Resumen. El contacto mecánico se define como el estudio de las tensiones y deformaciones de sólidos que se tocan entre sí en uno o más puntos. Las aplicaciones del contacto mecánico en problemas de ingeniería son de lo más diversas, como ser el diseño de engranajes, estudios de efectos de desgaste y tribología, procesos de conformado o aplicaciones en bioingeniería, entre otras. En la actualidad, el método de los elementos finitos es la técnica de simulación numérica más popular para el análisis de procesos que involucran el contacto. La mayoría de los algoritmos utilizan aproximaciones del tipo nodo-superficie para describir la cinemática de los cuerpos. Sin embargo, este tipo de esquemas no son capaces de superar los denominados tests de la parcela. Los algoritmos superficie-superficie superan las dificultades asociadas a los esquemas nodo-segmento integrando las restricciones relacionadas al contacto considerando más información que la de un simple nodo. En este trabajo se propone un algoritmo superficie-superficie aplicable a problemas de elasticidad tridimensional. La definición de la superficie topológica de proyección, necesaria para la integración de las ecuaciones se realiza mediante una base local cartesiana definida para cada elemento en contacto. Los ejemplos numéricos desarrollados muestran que el algoritmo supera los test de la parcela con resultados de tensiones muy regulares en mallas arbitrarias.

1. INTRODUCCION

La simulación de componentes mecánicos y procesos que involucran el contacto entre cuerpos tiene gran aplicación en diferentes áreas de la ingeniería, pudiendo citarse el diseño de engranajes (Gamez-Montero et al., 2005), procesos de embutición (Flores, 2000), fatiga por contacto, entre otras. Para la descripción del desplazamiento relativo entre dos cuerpos en contacto mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF), una técnica ampliamente difundida es la del nodo-segmento, en la cual a un nodo de un cuerpo, denominado esclavo, se asocia una zona de un segmento o superficie del otro cuerpo denominado master. El principal inconveniente de la estrategia nodo-segmento es que no garantiza que una superficie transmita una presión de contacto uniforme a la otra superficie; en otras palabras, esta estrategia no supera los denominados tests de la parcela de contacto (Papadopoulos y Taylor, 1990). Las aproximaciones del tipo nodo-segmento con doble pasada verifican los test de la parcela, pero pueden bloquearse debido a las sobre restricciones introducidas en la formulación; adicionalmente, con superficies de contacto no suaves, generan saltos de la presión cuando los nodos *esclavos* se deslizan entre segmentos adyacentes. Tampoco cumplen con la condición de Babuska-Brezzi (Brezzi y Fortin, 1991), causando un mal condicionamiento de las matrices y pobre tasa de convergencia, típicas manifestaciones de la sobre restricción. A pesar de ello, estos métodos son a menudo elegidos para problemas de contacto entre cuerpos flexibles por su capacidad de verificar el test de la parcela en 2D y sólo en ciertas configuraciones de mallas tridimensionales para elementos de bajo orden. Sin embargo, para elementos de orden superior, no son capaces de superar los test de la parcela, (Oliveira et al., 2008). Los métodos nodo-segmento usan la colocación para integrar el trabajo virtual de contacto y no existe una representación explícita de la presión, a diferencia de los métodos segmento-segmento que integran el trabajo virtual de contacto usando una cuadratura numérica con alguna interpolación en la presión. La mayoría de los métodos segmento-segmento desarrollados utilizan algún tipo de superficie de contacto intermedia, o proyección de superficies. Estos fueron aplicados inicialmente a interfases de contacto planas para ejemplos 2D y luego ampliados a mallas 3D con superficies planas (Wohlmuth, 2001; Dohrmann et al., 2000; Kim et al., 2001). En el trabajo de Park y Felippa (2002) se propone una formulación con una superficie de contacto intermedia entre los cuerpos de contacto determinada por un conjunto de ecuaciones auxiliares tal que se satisfaga el equilibrio en dicha superficie. La ventaja de este método es que evita la integración de los campos de multiplicadores de Lagrange pero tiene como gran inconveniente la complejidad para ser extendido a problemas 3D. Las diferentes aproximaciones propuestas de métodos segmento-segmento difieren generalmente en la forma de interpolar la presión de contacto y en la manera en que se efectúa la proyección entre los elementos. Los primeros trabajos desarrollados utilizaron el método de penalidad como regularización del problema variacional y con aplicaciones sólo a problemas bidimensionales (Papadopoulos y Taylor, 1992; Simo et al., 1985; Papadopoulos y Taylor, 1990). Específicamente, el primer trabajo que ha utilizado los métodos mortar fue el propuesto por Bernardi et al. (2000), donde se muestra la estabilidad del método en relación a las condiciones de Babuska-Brezzi. A diferencia de los algoritmos nodo-segmento, los métodos mortar son únicamente de una pasada y verifican los test de la parcela debido a como están formulados. De esta manera, la propuesta de un esquema de doble pasada sería completamente innecesaria. En el trabajo de Puso y Laursen (2004), se presenta una versión del método mortar para problemas 3D con grandes deformaciones. El método propuesto utiliza un esquema de penalidad, aplicable a elementos de orden superior, como ser los cuadráticos, y es de simple pasada. La proyección de las superficies de los elementos en contacto se realiza sobre una su-

perficie plana; en cambio, en la propuesta de [Puso \(2004\)](#), la proyección se lleva a cabo sobre una malla intermedia suave definida por un parche con funciones de forma de Hermite que garantiza continuidad C1 sólo cuando la malla es regular. Los métodos mortar han continuado su desarrollo extendiéndolos a aplicaciones con fricción ([Puso et al., 2008](#); [Fischer y Wriggers, 2006](#); [Yang y Laursen, 2008](#)), o en problemas de auto contacto, como el que presenta [Yang y Laursen \(2008\)](#).

En este trabajo, siguiendo algunas de las ideas presentadas por [Puso y Laursen \(2004\)](#), se propone un algoritmo de contacto mortar con una regularización del tipo penalidad, aplicable a problemas tridimensionales en donde la superficie topológica de proyección se realiza mediante una base local cartesiana definida para cada elemento no-mortar en contacto. El algoritmo fue implementado en el código de elementos finitos [OOfelie \(2010\)](#). Los ejemplos numéricos propuestos muestran que el algoritmo supera los test de la parcela con resultados de tensiones muy regulares en mallas arbitrarias.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El movimiento de los cuerpos \mathcal{B}^α , $\alpha = 1, 2$ es expresado por el mapeo $\chi^\alpha : \bar{\Omega}_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, y la posición actual de las partículas materiales es calculada por $\mathbf{x}^\alpha = \chi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$. A diferencia de los desarrollos anteriores, en el contacto tipo mortar la porción de frontera en contacto Γ_c está dada por una intersección de las superficies Γ_c^α , esto es $\Gamma_c = \Gamma_c^1 \cap \Gamma_c^2$, ver Fig. 1. La convención adoptada en este trabajo para la definición de las superficies mortar y no mortar es la siguiente: Γ_c^1 denota la superficie no-mortar o esclava tal que $\Gamma_c \equiv \Gamma_c^1$, en tanto que Γ_c^2 es la superficie mortar o *master*. La estrategia utilizada para discretizar el dominio es por medio del

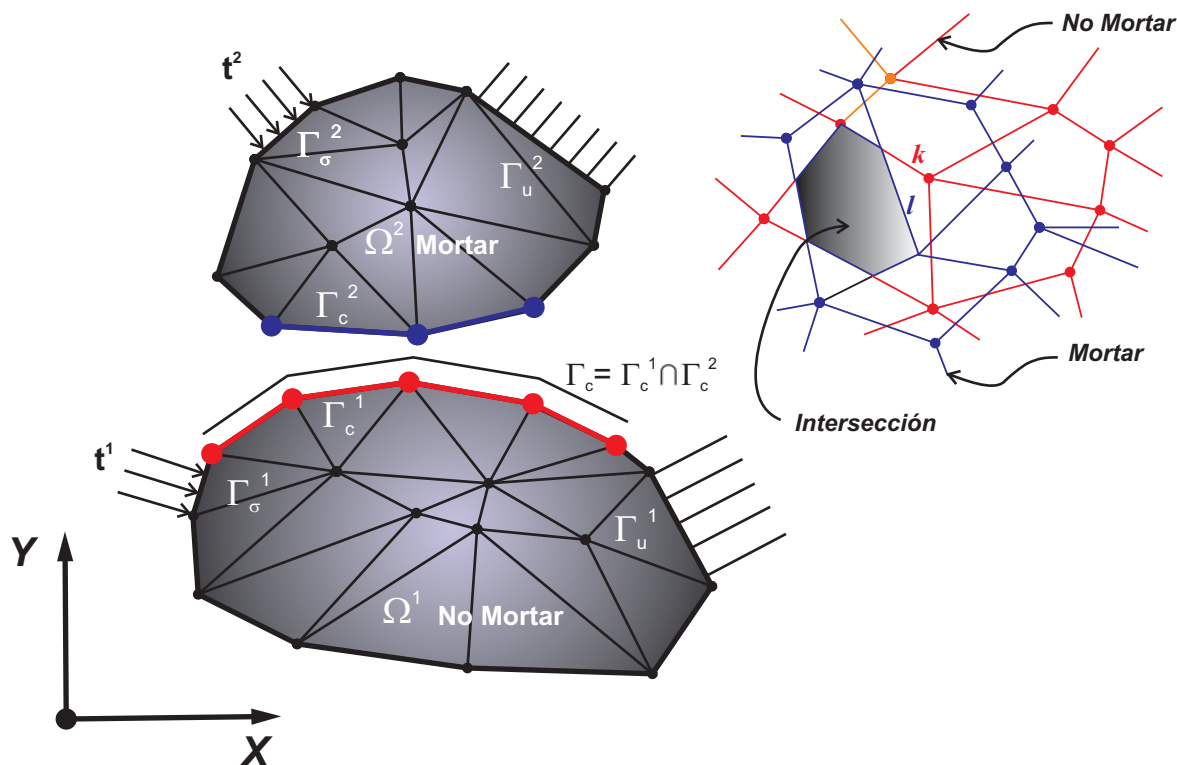


Figura 1: Notación utilizada en el método mortar para los cuerpos en contacto.

MEF, de esta forma, la malla de la superficie de contacto puede ser parametrizada como,

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{A=1}^{n^\alpha} N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{x}_A^\alpha, \quad (1)$$

donde: $\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}_A^\alpha \in \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$, n^α es el número de nodos de la malla en Γ_c^α y $N_A^\alpha : \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ son las clásicas funciones de forma, bilineales en caso de utilizar mallas con hexaedros, o triangulares para el caso de mallas formadas por tetraedros.

El vector de coordenadas nodales en \mathbb{R}^3 para las superficies de contacto se define de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{x}_1^1 \ \mathbf{x}_2^1 \ \dots \ \mathbf{x}_n^1 \mid \mathbf{x}_1^2 \ \mathbf{x}_2^2 \ \dots \ \mathbf{x}_n^2]^T. \quad (2)$$

Notar que $\boldsymbol{\Phi}$ se encuentra ordenado de forma tal que en las primeras componentes se encuentran las coordenadas de los nodos referidos a la frontera Γ_c^1 (no mortar) y luego las correspondientes a Γ_c^2 (mortar).

3. TRABAJO VIRTUAL ASOCIADO AL CONTACTO

Cuando los cuerpos \mathcal{B}^1 y \mathcal{B}^2 interactúan mecánicamente sobre la superficie de contacto, el trabajo virtual asociado al contacto se define de la siguiente manera,

$$\delta \Pi^c = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_c^\alpha} \mathbf{t}^\alpha \cdot \delta \mathbf{x}^\alpha \, d\Gamma_c^\alpha = \delta \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{F}, \quad (3)$$

donde \mathbf{t}^α denota el vector tracción de Cauchy. Asumiendo que existe conservación de la cantidad de movimiento lineal en la interfase de contacto, $\mathbf{t}^1 \, d\Gamma_c^1 = -\mathbf{t}^2 \, d\Gamma_c^2$; y que $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 \approx 0$, la Ec.(3) puede ser escrita como:

$$\delta \Pi^c = \int_{\Gamma_c^1} \mathbf{t}^1 \cdot (\delta \mathbf{x}^1 - \delta \mathbf{x}^2) \, d\Gamma_c^1 = \delta \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{F}. \quad (4)$$

Utilizando las siguientes parametrizaciones para las superficies de contacto y el vector tracción,

$$\mathbf{x}^1 = \sum_{B=1}^{n^1} N_B^1(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{x}_B^1, \quad \mathbf{x}^2 = \sum_{C=1}^{n^2} N_C^2(\boldsymbol{\xi}^2) \mathbf{x}_C^2, \quad \mathbf{t} = \sum_{A=1}^{n^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{t}_A, \quad (5)$$

junto con la Ec.(4), el principio de los trabajos virtuales asociado al contacto se aproxima como

$$\delta \Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} \sum_{B=1}^{n^1} \sum_{C=1}^{n^2} \mathbf{t}_A \cdot \left(\int_{\Gamma_c^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_B^1(\boldsymbol{\xi}^1) \, d\Gamma_c^1 \delta \mathbf{x}_B^1 - \int_{\Gamma_c^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_C^2(\boldsymbol{\xi}^2) \, d\Gamma_c^1 \delta \mathbf{x}_C^2 \right). \quad (6)$$

Luego, la Ec.(6) puede ser escrita en forma más compacta,

$$\delta \Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} \mathbf{t}_A \cdot \delta \mathbf{g}_A, \quad (7)$$

donde,

$$\delta \mathbf{g}_A = \sum_{B=1}^{n^1} \sum_{C=1}^{n^2} (n_{AB}^1 \delta \mathbf{x}_B^1 - n_{AC}^2 \delta \mathbf{x}_C^2), \quad (8)$$

denota la primera variación del huelgo o *gap* del nodo esclavo A y

$$\begin{aligned} n_{AB}^1 &= \int_{\Gamma_c^1} N_A^1 N_B^1 d\Gamma_c^1, \\ n_{AC}^2 &= \int_{\Gamma_c^1} N_A^1 N_C^2 d\Gamma_c^1, \end{aligned} \quad (9)$$

son los denominados factores de peso.

Desarrollando las sumatorias y teniendo en cuenta la notación definida para el vector de coordenadas nodales Φ dada por la Ec.(2), la variación de la energía potencial elástica debida al contacto (en el caso de mallas formadas por elementos hexaedros) tiene la siguiente expresión matricial,

$$\delta \Pi^c = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1^1 \\ \delta \mathbf{x}_2^1 \\ \delta \mathbf{x}_3^1 \\ \delta \mathbf{x}_4^1 \\ \delta \mathbf{x}_1^2 \\ \delta \mathbf{x}_2^2 \\ \delta \mathbf{x}_3^2 \\ \delta \mathbf{x}_4^2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A1}^1 \\ \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A2}^1 \\ \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A3}^1 \\ \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A4}^1 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C1}^2 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C2}^2 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C3}^2 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C4}^2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

De la Ec.(10) se desprende que el vector de fuerzas internas referido al contacto es:

$$\mathbf{F}_B^\alpha = \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{AB}^\alpha. \quad (11)$$

4. REGULARIZACIÓN DE LAS RESTRICCIONES NORMALES

El requerimiento físico de impenetrabilidad e interacción de compresión entre los cuerpos es impuesto por medio de una restricción de contacto normal. El vector tracción de Cauchy \mathbf{t} puede ser descompuesto en una componente normal \mathbf{t}_N y en otra tangencial \mathbf{t}_T . Luego, con las expresiones discretas del trabajo virtual, la restricción del contacto normal puede establecerse con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) como

$$t_{N_A} \geq 0, \quad g_A \leq 0, \quad t_{N_A} g_A = 0, \quad (12)$$

expresadas aquí en forma discreta para cada nodo A no-mortar. El huelgo g_A de un nodo A no-mortar es: $g_A = \mathbf{g}_A \cdot \boldsymbol{\nu}_A$, donde $\boldsymbol{\nu}_A$ es el vector normal promedio en un nodo A no-mortar tal como se muestra en la Fig. 2. La definición de $\boldsymbol{\nu}$ no es única y puede ser expresada de diferentes formas. Sin embargo, un promedio de las normales concurrentes a un nodo resulta en una operación relativamente sencilla de implementar y aporta resultados muy satisfactorios como lo demuestran a continuación los ejemplos numéricos propuestos. Para asegurar el cumplimiento de las condiciones de KKT dadas en la Ec.(12), se ha seleccionado una regularización por medio del método de penalidad. De esta forma, el vector tracción normal en el nodo A tiene la siguiente expresión,

$$t_{N_A} = \kappa_A \mathbf{g}_A \cdot \boldsymbol{\nu}_A, \quad (13)$$

donde

$$\mathbf{g}_A = \sum_{B=1}^{n^1} \sum_{C=1}^{n^2} (n_{AB}^1 \mathbf{x}_B^1 - n_{AC}^2 \mathbf{x}_C^2), \quad (14)$$

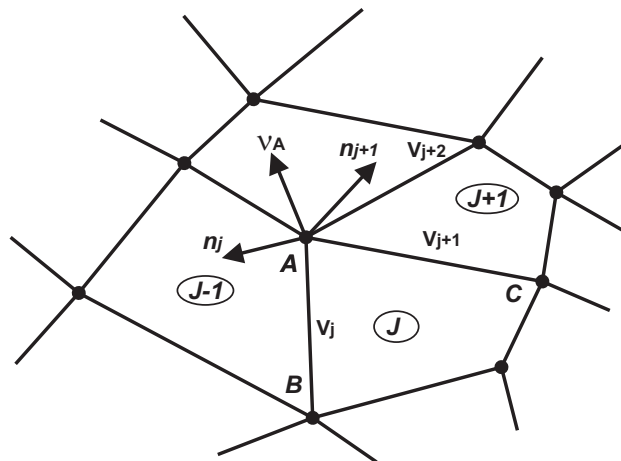


Figura 2: Vector normal promedio ν_A definido por los elementos: $(J - 1)$, (J) y $(J + 1)$ en el nodo A .

y κ es el factor de penalidad definido como

$$\kappa_A = \frac{\varepsilon}{\sum_D n_{AD}^1}, \quad (15)$$

siendo ε un coeficiente propuesto por el usuario en forma arbitraria. En la Ec.(15), la definición del factor de penalidad como allí se expresa, asegura que \mathbf{g}_A tenga unidades de longitud. Esta característica es fundamental para lograr una buena tasa de convergencia. Luego, con las expresiones de las Ecs.(11, 13), el vector de fuerzas internas resulta en

$$\mathbf{F}_B^\alpha = \sum_{A=1}^n \kappa_A n_{AB}^\alpha (\nu_A \otimes \nu_A) \mathbf{g}_A. \quad (16)$$

Luego la matriz tangente se evalúa a partir de la derivación numérica del vector de fuerzas internas referido en la Ec.(16).

5. PROYECCIONES

Para llevar a cabo las integraciones en la interface Γ_c , es necesario definir una superficie topológica sobre la cual realizar las aproximaciones de las integrales. Aunque son muchas las posibilidades, en este trabajo se propone aproximar la cara de un elemento k no mortario, ver Fig. 1, con un elemento \tilde{k} que pertenece a un plano \mathbf{p} definido por un vector normal \mathbf{n} , dicho vector normal se obtiene por el producto vectorial de las diagonales de la cara del elemento k , ver Fig. 3-a. La suma de todas las superficies \tilde{k} representa la superficie de integración Γ_c de la Ec.(3).

Una alternativa para la proyección de los nodos no-mortario y mortario en el plano \mathbf{p} , es a través de una base global definida en \mathbb{R}^3 . De esta manera, es posible utilizar el algoritmo de intersección lineal paramétrico Cyrus-Beck descrito en la referencia (Foley et al., 1997). Esta metodología fue la adoptada por la mayoría de los autores que han publicado hasta el momento trabajos referidos a los métodos mortario (Puso y Laursen, 2001, 2004; Puso et al., 2008). La definición de una base global en \mathbb{R}^3 con una lejanía considerable de la superficie de contacto, como sucede en problemas de aplicación, podría causar problemas numéricos en el algoritmo de intersección, contribuyendo al deterioro de la tasa de convergencia. Otra opción que facilita notablemente el desarrollo de las ecuaciones es la definición de una base local para cada elemento no mortario que define un plano de proyección \mathbf{p} , tal como lo representa la Fig. 3-a.

En este trabajo, se emplea un algoritmo de intersección de polígonos basado en reglas de avance y en la definición paramétrica en \mathbb{R}^2 de una recta, ver por ejemplo (O'Rourke, 1998). Una vez obtenidos los puntos proyectados en el plano p , utilizando el algoritmo de cómputo de

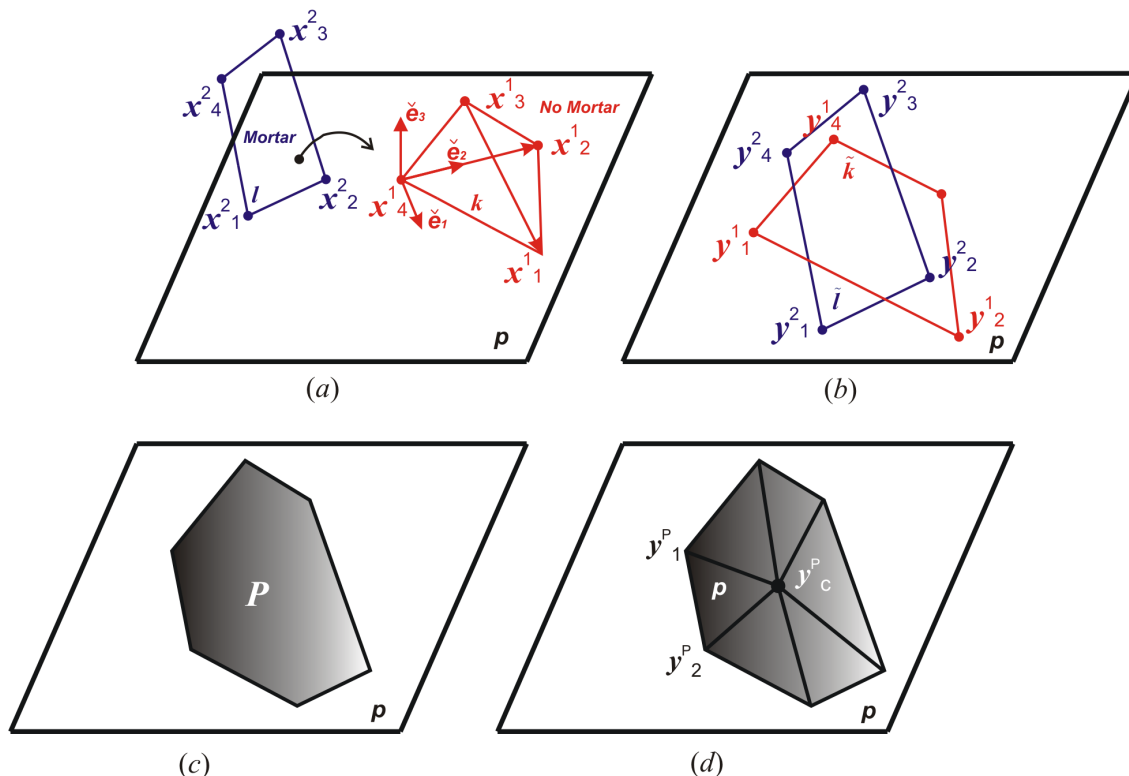


Figura 3: (a) Elemento no-mortar k , elemento mortar l , plano de proyección p , proyección de los elementos k y l en el plano p , (c); polígono P formado con el algoritmo de intersección; (d) división de P en triángulos.

factores de peso se obtienen los n_{AB}^α necesarios para evaluar el vector de fuerzas internas de la Ec.(16).

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Todas las soluciones obtenidas con el método mortar en los ejemplos presentados en este trabajo se comparan con las del programa comercial de elementos finitos SAMCEF (2007) y con soluciones analíticas. El algoritmo implementado en este último software es del tipo nodo-segmento con una regularización mediante multiplicadores de Lagrange.

6.1. El test de la parcela para contacto. Ejemplo de validación.

Para comprobar la validez del algoritmo desarrollado, se evalúa su capacidad de superar el test de la parcela con un caso propuesto por Chen y Hisada (2006). Éste consiste en dos bloques en contacto bajo la aplicación de una presión uniforme $P = 5$ MPa, ver Fig. 4. Las propiedades mecánicas se incluyen en la Fig. 4 junto con las condiciones de borde, la cuales garantizan un estado plano de deformación. La geometría se discretiza con hexaedros lineales de 8 nodos.

La presión obtenida en ambos lados de la interfase de contacto será igual a la presión exterior aplicada P , si ésta se transmite correctamente. Asimismo, el campo de desplazamientos debe mostrar una distribución uniforme. En la Fig. 5 se compara el campo de desplazamiento obtenido con un esquema del tipo nodo-segmento y con el algoritmo mortar desarrollado en

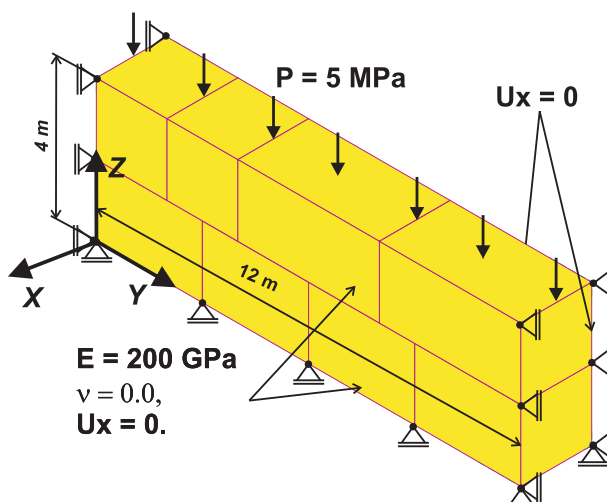
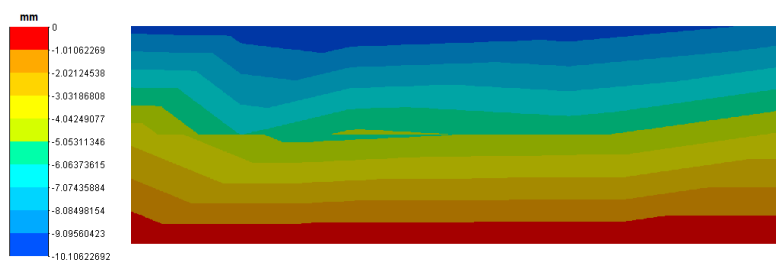
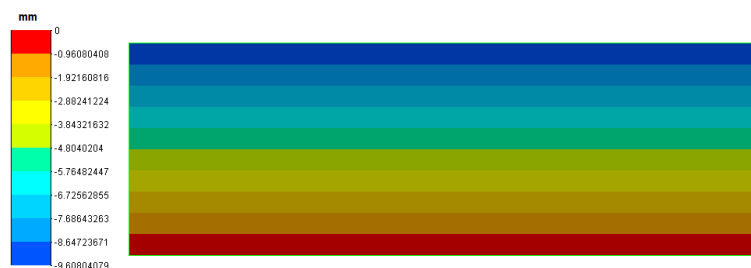


Figura 4: Test de la parcela. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.

este trabajo. Como puede observarse en la Fig. 5-a, la distribución de desplazamientos del esquema nodo-segmento no mantiene una distribución uniforme en todo el dominio. En cambio, el método mortar genera una distribución continua, ver Fig. 5-b. Así mismo, la Fig. 6 muestra



(a) Método nodo-segmento. Software SAMCEF.



(b) Método mortar. Algoritmo propuesto.

Figura 5: Test de la parcela. Comparación del campo de desplazamientos en la dirección Z entre el método nodo-segmento y el método mortar propuesto en este trabajo.

una distribución de tensiones uniforme en la interfase de contacto e igual a la tensión exterior aplicada cuando se utiliza el método mortar, mientras que con el esquema nodo-segmento se aprecian oscilaciones en la tensión. Esta característica es independiente de un refinamiento de la malla y del tipo de regularización utilizada.

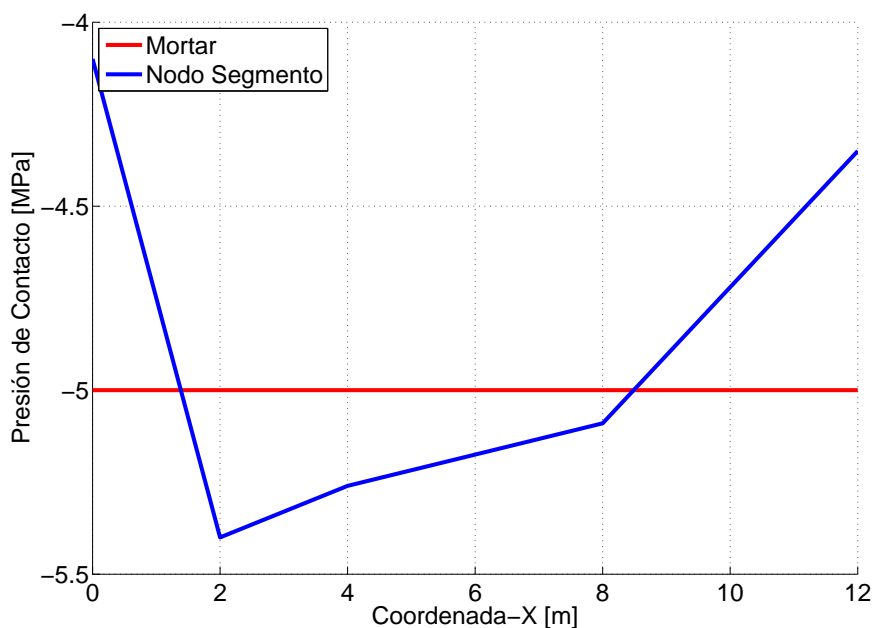


Figura 6: Distribución de presión en la interfase de contacto.

6.2. Contacto de Hertz. Ejemplo de validación.

Se propone un ejemplo de tensiones de Hertz para validar el método mortar con una solución analítica. Para este caso, ambas interfaces de contacto son curvas. La Fig. 7 muestra la geometría de la mitad de dos cilindros elásticos, cada uno de ellos de radio 8.

El problema original fue formulado en dos dimensiones, ver por ejemplo el trabajo de [McDevitt y Laursen \(2000\)](#), en tanto que aquí se lo resuelve en tres dimensiones con condiciones de borde tales que reproducen un estado plano de deformación. La malla original adoptada en la referencia ([McDevitt y Laursen, 2000](#)) es generada con elementos bicuadráticos. Aquí, al igual que en el trabajo de [Areias et al. \(2004\)](#), la malla es duplicada en la cantidad de elementos ya que se han adoptado elementos bilineales. La Fig. 7 muestra la malla utilizada junto con las condiciones de borde propuestas y las propiedades mecánicas del material. La Fig. 8 muestra el campo de desplazamientos obtenido con el método mortar, donde además es posible apreciar la superficie que se encuentra en contacto. La Fig. 9 muestra el campo de tensiones en la dirección Z con continuidad y homogeneidad en la interfase de contacto. La Fig. 10 muestra la comparación de los resultados obtenidos por medio del método mortar y la solución analítica de Hertz ([Jhonson, 1987](#)) destacándose la buena correlación entre ambos resultados.

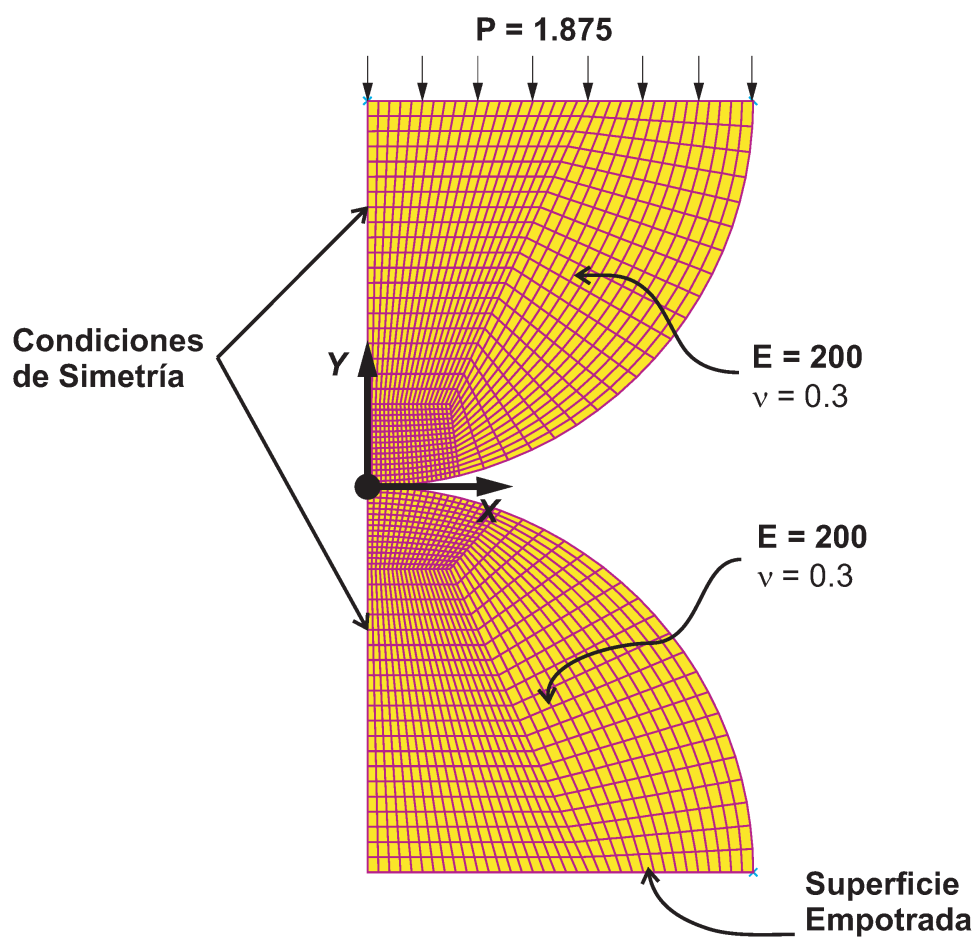


Figura 7: Contacto de Hertz. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.

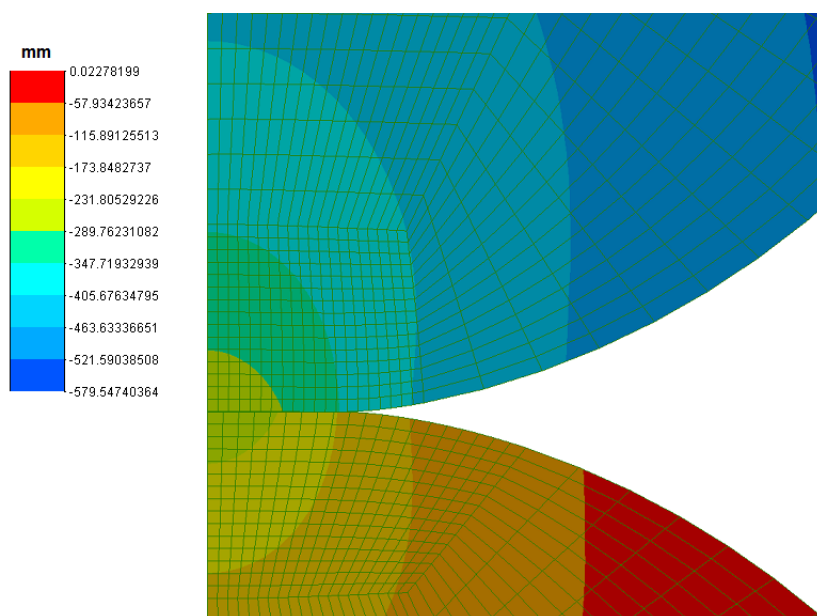


Figura 8: Contacto entre dos cilindros elásticos. Campo de desplazamientos.

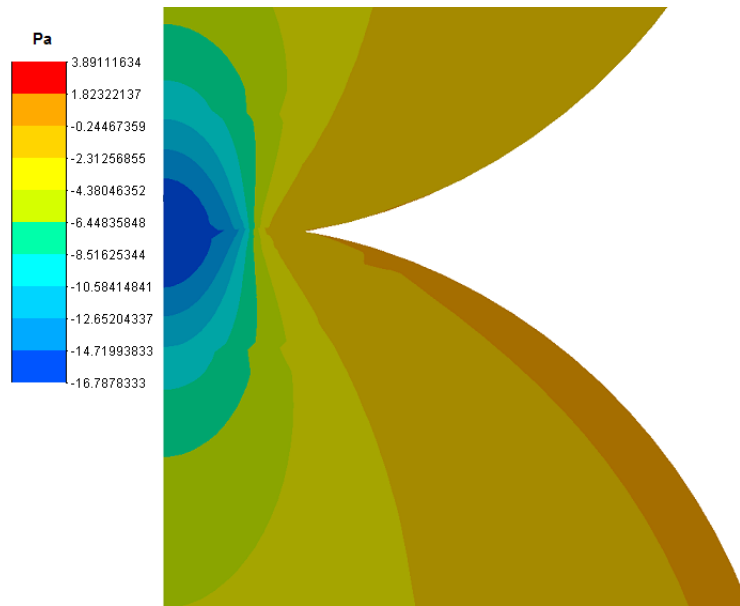


Figura 9: Contacto entre dos cilindros elásticos. Distribución de tensiones por nodo en la dirección Y .

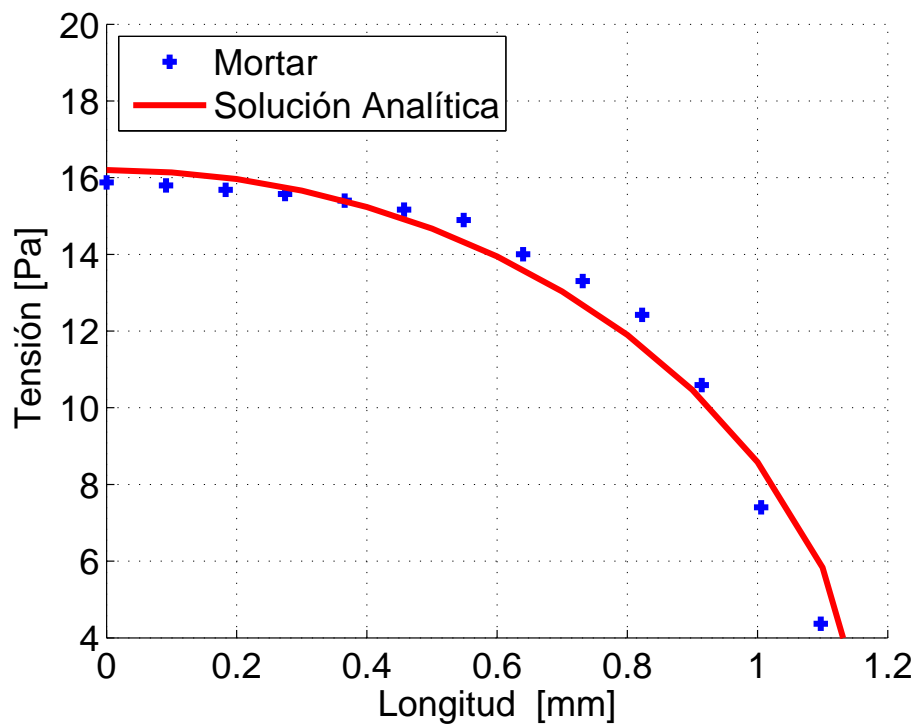


Figura 10: Contacto entre dos cilindros elásticos. Distribución de tensiones por elemento. Comparación con solución analítica de Hertz.

6.3. Ejemplo de aplicación. Contacto entre una válvula de motor de combustión interna y el asiento.

El siguiente ejemplo corresponde al estudio del contacto entre una válvula de motor de combustión interna con su asiento. Si bien es un caso de aplicación no citado en la bibliografía como test de validación, presenta algunas dificultades no menores que deben superar los algoritmos de contacto, y es que la superficie de contacto no sólo es muy pequeña, sino que además es cónica curva.

En la Fig. 11 se detalla la geometría, condiciones de borde y propiedades mecánicas utilizadas para el modelo de válvula propuesto. La malla empleada está formada por elementos hexaédricos lineales. La Fig. 12-a muestra una comparación entre los resultados de tensiones

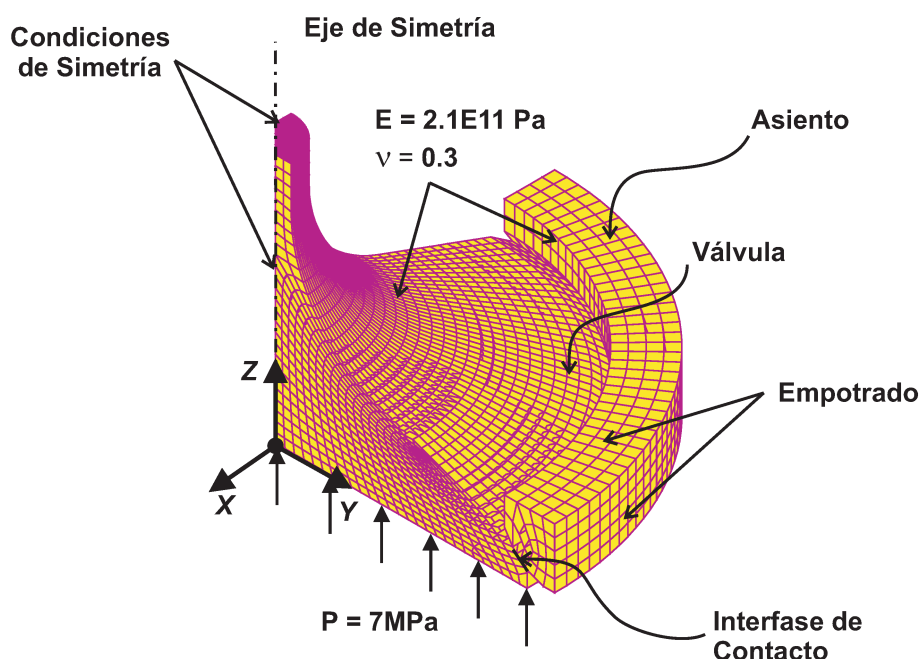
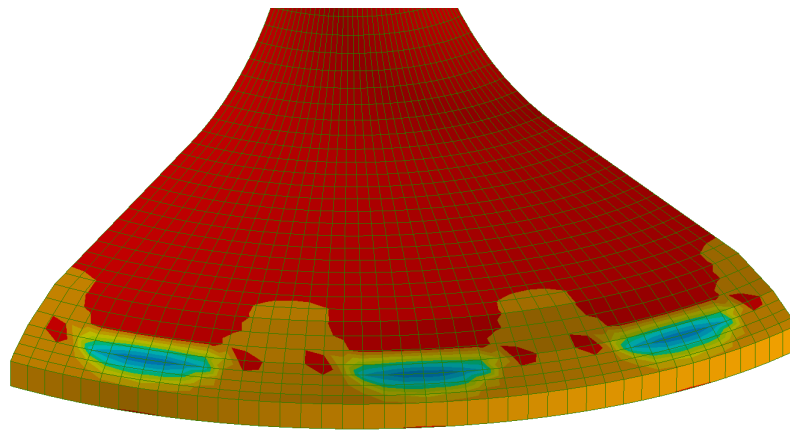
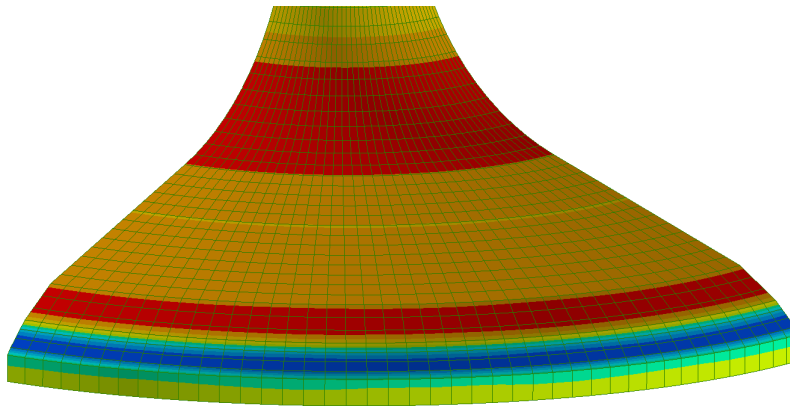


Figura 11: Válvula de motor de combustión interna. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.

obtenidos con el método morter y con el esquema nodo-segmento. La Fig. 12-a evidencia una concentración de tensiones en la zona de contacto con el asiento (puntos de color azul), en tanto que con el método morter existe una distribución mucho más regular. Para una comparación cuantitativa más precisa, en la Fig. 13 se ha graficado la distribución de tensiones en los elementos de contacto de la válvula. En ella se puede apreciar una variación cíclica de la tensión cuando se utiliza el esquema nodo-segmento, mientras que con el morter existe una oscilación de amplitud mucho menor.



(a) Método nodo-segmento. Software SAMCEF.



(b) Método mortario. Algoritmo propuesto.

Figura 12: Distribución de tensiones en la dirección Z en una válvula de motor de combustión interna con una malla de hexahedros.

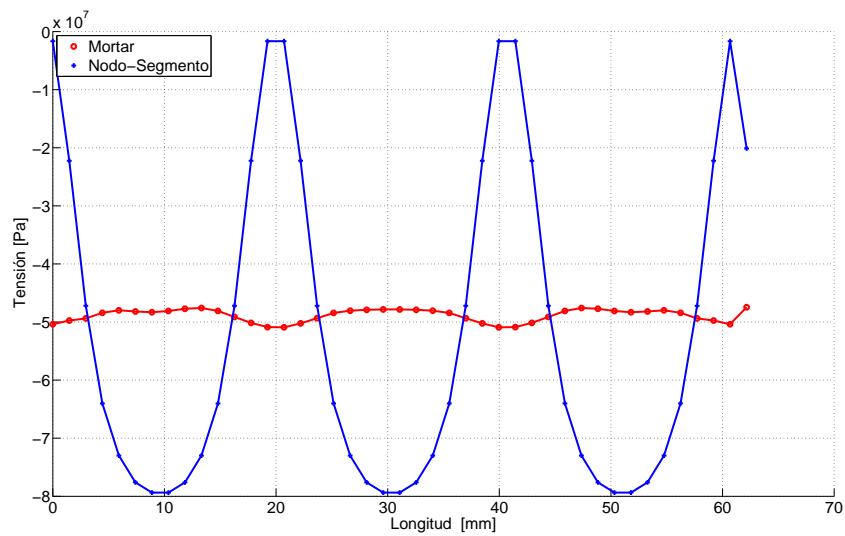


Figura 13: Distribución de tensiones por elemento en la zona de contacto para el ejemplo de la válvula de motor de combustión interna.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un algoritmo de contacto tipo mortár. Los ejemplos presentados fueron contrastados con soluciones de referencia, especialmente el del test de la parcela y el de los cilindros de Hertz, mostrando en ambos casos buena correlación con las soluciones referenciadas. Como se pudo observar en los ejemplos propuestos, el esquema del tipo nodo segmento es incapaz de calcular con precisión el campo de tensiones en la zona de contacto, sin embargo con el método mortár propuesto en este trabajo los resultados han sido notablemente mejores. Se puede concluir que para un correcto análisis del campo de tensiones en la zona de contacto, el método mortár es el esquema más apropiado. Además, a pesar de que el algoritmo es computacionalmente más complejo que el de un nodo-segmento la resolución de los ejemplos de aplicación y validación mostró que los tiempos de cálculo no han sido mayores que los observados con un esquema nodo-segmento.

8. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT), el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

REFERENCIAS

- P. M. A. Areias, J. M. A. César de Sá, y C. A. Conceição António. Algorithms for the analysis of 3D finite strain contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:1107–1151, 2004.
- C. Bernardi, Y. Maday, y A.T. Patera. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1525–1547, 2000.
- F. Brezzi y M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Verlag, New York, 1991.
- X. Chen y T. Hisada. Development of a finite element contact analysis algorithm to pass the patch test. *Japan Society of Mechanical Engineers*, 49:483–490, 2006.
- C.R. Dohrmann, S.W. Key, y Heinstejn M.W. Methods for connecting dissimilar three-dimensional finite element meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1057–1080, 2000.
- K.A. Fischer y P. Wriggers. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195: 5020–5036, 2006.
- F. Flores. Un algoritmo de contacto para el análisis explícito de procesos de embutición. *Métodos numéricos para el cálculo y diseño de ingeniería*, 16:421–432, 2000.
- J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, y J.F. Hughes. *Computer Graphics, Principles and Practice*. Addison-Wesley. Reading, second edition, 1997.
- P. Gamez-Montero, F. Zárate, M. Sánchez, R. Castilla, y E. Codina. El problema del contacto en bombas de engranajes de perfil troncooidal. *Métodos numéricos para el cálculo y diseño de ingeniería*, 21:213–229, 2005.
- K.L. Jhonson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- C. Kim, R.D. Lazarov, J.E. Pasciak, y P.S. Vassilevski. Multiplier spaces for the mortar finite element method in three dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38:519–538, 2001.

- T.W. McDevitt y T.A. Laursen. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1525–1547, 2000.
- M.C. Oliveira, J.L. Alves, y L.F. Menezes. Algorithms and strategies for treatment of large deformation frictional contact in the numerical simulation of deep drawing process. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 15:113–162, 2008.
- OOfelie. Object oriented finite elements led by interactive executor. Open engineering. S.A., 2010. <http://www.oofelie.org>.
- J. O'Rourke. *Computational geometry in C*. Cambridge University Press, 2 edition, 1998.
- P. Papadopoulos y R.L. Taylor. Technical Report UCB/ SEMM Report 90/18. Technical report, University of California at Berkeley, 1990.
- P. Papadopoulos y R.L. Taylor. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 50:163–180, 1992.
- K.C. Park y C.A. Felippa. A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2117–2142, 2002.
- M. Puso. A 3D mortar method for solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:315–336, 2004.
- M. Puso y T. Laursen. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Comp. Methods in Applied Mechanics Engineering*, 193:601–629, 2004.
- M. Puso y T.A. Laursen. A 3D contact smoothing method using Gregory patches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:1161–1194, 2001.
- M. Puso, Laursen T.A., y J. Solberg. A segment to segment mortar method for quadratic elements and large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:555–566, 2008.
- SAMCEF. Mecano V13 user manual. Samtech S.A., 2007. <http://www.samcef.com>.
- J.C. Simo, P. Wriggers, y R.L. Taylor. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Comput. Methods. Appl. Math.*, 50:163–180, 1985.
- B. Wohlmuth. *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*. Springer, 2001.
- B. Yang y T.A. Laursen. A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. *Compu. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:756–772, 2008.