

## **OPTIMIZACION DE CONECTIVIDADES DE UNA MALLA DE TETRAEDROS MEDIANTE RETRIANGULACIONES LOCALES**

**Walter Sotil<sup>a</sup>, Nestor Calvo<sup>a</sup> y Marcelo Vénere<sup>b</sup>**

*<sup>a</sup>Cátedra de Computación Gráfica - Ingeniería en Informática - FICH - UNL*

*<sup>b</sup>Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires - UNICEN*

**Palabras clave:** mallas de tetraedros, optimización de conectividades, calidad de la malla.

**Resumen.** En este trabajo se presenta el desarrollo e implementación de algunas técnicas de optimización de conectividades en mallas de tetraedros. Se sabe que la triangulación Delaunay de una buena distribución de nodos produce, en el espacio tridimensional, algunos tetraedros de muy mala calidad, afectando ello los resultados conseguidos mediante el Método de Elementos Finitos o aún los problemas de interpolación o integración espacial. Se describen aquí algunas técnicas para la eliminación de tetraedros malformados, consistentes en retriangulaciones locales sin movimiento de nodos, son solo cambios topológicos que provocan un incremento monótono de la calidad. Se exploran los algoritmos, los alcances y limitaciones de estas técnicas.

## 1 INTRODUCCION

El error de la aproximación en FEM (Método de Elementos Finitos) se encuentra en relación directa al tamaño y a la deformación de los elementos. En dos dimensiones, de todas las triangulaciones posibles de un conjunto dado de nodos, la triangulación Delaunay maximiza el mínimo ángulo de los triángulos, pero eso no se generaliza a más dimensiones. En el espacio tridimensional, la triangulación Delaunay de una buena distribución de nodos produce tetraedros interiores aplastados denominados slivers, generando ángulos diedros tan pequeños que invalidan la malla. Para eliminarlos, se recurre a algoritmos que extraen automáticamente los slivers mediante retriangulaciones locales (George, 2003) o bien a extensiones que convierten algunos conjuntos de tetraedros en elementos poliédricos (Calvo, 2005) capturando los slivers.

De todos modos, luego de este tratamiento, si bien ya no existen slivers, aún permanecen tetraedros malformados que degradarán los resultados que pueden obtenerse mediante FEM y por lo tanto una buena estrategia sería eliminarlos para alcanzar una mejor solución.

En este trabajo se presentan algunas técnicas para la remoción de tetraedros de muy mala calidad provenientes principalmente de la triangulación Delaunay de una nube de puntos dados y fijos, aunque estas técnicas también son posibles de aplicar en mallas generadas con otros métodos, como por ejemplo avance frontal. El procedimiento desarrollado realiza un cambio en las conectividades en la zona que incluye a un tetraedro de mala calidad, obteniendo finalmente una mejora en la calidad media de la malla.

## 2 OBJETIVOS Y METODOS

Este trabajo fue diseñado para el tratamiento de mallas tridimensionales compuestas por tetraedros, siendo el objetivo obtener una malla de mejor calidad a la inicial.

Se asume que inicialmente se posee una malla de tetraedros con una distribución de nodos impuesta, ya sea porque es aceptable o porque está condicionada por la física del problema. Sobre la misma se realizan entonces algunas retriangulaciones locales para obtener un incremento monótono de la calidad sin modificar la posición ni la cantidad de nodos.

Para ello, por cada tetraedro malformado, se extrae de la malla un conjunto conexo de tetraedros vecinos, sin nodos en el interior y que incluya al tetraedro malformado. Luego se modifica la triangulación del poliedro resultante, reemplazándola por un conjunto distinto de tetraedros de mejor calidad y que posea la misma frontera. De este modo, el resto de la malla no necesita retriangularse pues el conjunto extraído se conecta a la malla del mismo modo que el nuevo conjunto reinsertado. Es decir, se obtiene una malla localmente distinta, pero de mejor calidad.

Se analizan los algoritmos, alcances y restricciones de estas técnicas.

Los desarrollos se incorporaron exitosamente a los generadores de mallas Meshsuite y GiD y quedaron anexados como un utilitario adicional que se ofrece al usuario, a través del menú.

## 3 CONCEPTOS PRELIMINARES

### 3.1 Calidad de la malla

La calidad de la malla tiene un rol importantísimo en la estabilidad y exactitud de los cálculos numéricos. Por un lado la densidad de nodos debe ser acorde a la precisión deseada del cálculo, pero aquí consideraremos que los nodos ya están impuestos. Por otro lado la forma de los elementos debe ser lo más regular posible para esa distribución. La calidad de

una malla es una medida que depende fuertemente de la aplicación en particular y aún para el caso del FEM depende del problema. Se puede afirmar que cuando la forma o el tamaño de los elementos no son adecuados a los requerimientos del cálculo, la malla es de “mala calidad”. En algunos problemas de fluidos los elementos muy aplastados pueden tolerarse y a veces son deseables, para capturar grandes gradientes, por ejemplo en ondas de choque y para ello se recurre a mallas anisotrópicas. Pero en situaciones de variaciones isotrópicas se pretende que la forma de los elementos sea regular.

El error de la discretización en la solución de FEM aumenta cuando los elementos poseen ángulos diedros demasiado grandes (Babuska, 1976) y por otro lado el número de condición de la matriz elemental aumenta con ángulos demasiado pequeños (Fried, 1972).

Con simples argumentos geométricos se puede demostrar que, en una mala distribución de nodos puede haber diedros muy pequeños sin que haya diedros muy grandes pero no a la inversa<sup>1</sup>. En una buena distribución de nodos solo habrá elementos deformes con diedros pequeños y grandes: slivers y caps. En cualquier caso el mejor indicador parece ser el diedro menor.

Existen muchos papers clásicos, de autores como Shewchuk (Shewchuk, 2002) y Knupp (Knupp, 1999) que analizan y comparan distintas formas de medir la calidad de los elementos (métricas). En los trabajos se explican algunas cuestiones geométricas, tales como si se penaliza determinados ángulos o determinadas longitudes; pero en general, se formulan las métricas de modo que la calidad 1 corresponde a un triángulo equilátero, 0 aplastado y negativo invertido. Una cuestión tan importante como difícil de responder es lo que significa una calidad 0.3 o 0.003, debido a que una malla más o menos “bonita” es bonita para todas las métricas, pero es necesario saber cual es la calidad límite que se puede tolerar. Pese a ello, en aquellos papers, no se reconoce que en la práctica, la densidad de nodos o tamaño  $h$  típico de elementos es una función impuesta por el usuario, quien decide adonde puede sacrificar precisión en aras de controlar la cantidad de grados de libertad y aprovechar el poder de cálculo disponible. En el caso estándar de  $h$  impuesto, la desviación del tamaño del elemento respecto de ese valor se observa que no está contemplada en esos trabajos.

Para discernir si la calidad de una malla es mejor que otra, se puede utilizar el peor de sus elementos, pues es éste quien supuestamente provocaría el peor error y fijaría la cota. Pero hay mallas que por sus limitaciones geométricas imponen algún elemento de frontera inmejorable y no por ello se debe admitir que el resto de los elementos sea tan malo como el impuesto. Consideramos que es mucho mejor utilizar una lista ordenada de calidades de los elementos y comparar en orden lexicográfico.

Como se afirmó anteriormente, con las técnicas aquí desarrolladas no se desplazan ni insertan nodos, sino que solo se realiza un cambio en las conectividades, por lo que el  $h$  permanece invariable. Debido a ello, solamente nos enfocamos en la distribución de los ángulos diedros de los tetraedros, antes y después del proceso de optimización de conectividades.

### 3.2 Criterios de optimización

La mayoría de los métodos de generación de mallas tridimensionales presentan el inconveniente de producir algunos elementos muy distorsionados, que aún siendo escasos, deteriorarán el resultado obtenido mediante FEM. Con el propósito de mitigar este

---

<sup>1</sup> Si cortamos un ángulo diedro mediante un plano, las dos aristas convergentes que se forman tienen un ángulo mayor o igual que el diedro. En un tetraedro estas dos aristas forman un triángulo que puede tener un ángulo pequeño y dos cercanos a  $90^\circ$ , pero no puede tener un ángulo cercano a  $180^\circ$  sin que los otros sean pequeños.

inconveniente se realizan distintos tratamientos posteriores.

La taxonomía de los métodos de optimización de mallas tiene en cuenta algoritmos que solo mueven los nodos o solo cambian conectividades o ambas cosas a la vez, y en todos los casos puede ser en forma local o global. Así tenemos algunas variantes:

- Suavizado de mallas o mesh smoothing: se reubican los nodos de la malla conservando constante la topología o conectividad. En mallas de superficie (no euclídeas) se suele denominar mesh-moving a estas técnicas.
- Las técnicas de remeshing: permiten cambios más o menos libres donde se pueden agregar o quitar nodos, con determinadas preferencias y restricciones, o bien remallar desde cero, en forma independiente de la malla de partida.
- La otra opción es el swapping o flipping: consiste en efectuar cambios en las conectividades de la malla sin perturbar ningún nodo.

Este último es el procedimiento desarrollado en este trabajo, realiza un cambio en las conectividades en la zona que incluye a un tetraedro de mala calidad, obteniendo finalmente una mejora en la calidad media de la malla.

#### 4 DESCRIPCION DEL ALGORITMO

En problemas de FEM, donde se trabaja con mallas de un elevado número de nodos, pretender analizar todas las alternativas posibles para formar una triangulación válida con un dado conjunto de nodos sería un problema intratable. En este trabajo se recurrió a la optimización local, restringiendo la búsqueda de un óptimo a un número pequeño de posibilidades, analizando sólo subconjuntos conexos de la malla.

La estrategia elegida aquí es tomar un número acotado de posibilidades, que consiste en analizar únicamente los pequeños conjuntos poliédricos formados por todos los elementos que concurren a una arista. Dado un pequeño grupo de elementos originales contenidos en el conjunto poliédrico, se forman nuevos elementos uniendo un nodo del poliedro con todas las caras que no contienen a dicho nodo. Esto es solo posible si el nodo elegido puede “ver” a todas las caras no conexas sin oclusiones; esto es, si el nodo es frontera del kernel del poliedro (Calvo, 2009).

Dado que el kernel de un poliedro convexo coincide con el poliedro, con la finalidad de aumentar las posibilidades de éxito del algoritmo, se rellenan algunas concavidades incorporando también todo tetraedro vecino que posea sus cuatro nodos en el conjunto poliédrico colectado en el paso anterior.

Un aspecto de importancia es el criterio elegido para realizar la detección de un elemento de mala calidad. Debido a que en una mala distribución de nodos puede haber diedros muy pequeños sin que haya diedros muy grandes pero no a la inversa, se analiza sólo el mínimo ángulo diedro: si es menor a un ángulo límite se intentará mejorar la calidad del tetraedro. El mismo indicador del diedro menor se utiliza para elegir la mejor configuración alternativa de tetraedros en el poliedro.

El algoritmo desarrollado realiza los siguientes pasos:

Marca todos los elementos con la condición de "pendiente".

Mientras existan elementos pendientes {

1. Si el elemento no es de mala calidad, se analiza el siguiente.
2. Ordena las aristas por diedro y las marca como pendientes.
3. Recolecta los elementos que comparten la arista pendiente más obtusa.
4. Incorpora los tetraedros que poseen cuatro nodos en el conjunto.
5. Compara diferentes configuraciones, uniendo un nodo del poliedro con todas las caras que no contienen a dicho nodo.
  - 5.a. Si la mejor configuración es la original, cambia de arista; si quedan aristas pendientes vuelve a 3 y en caso contrario no realiza ninguna modificación.
  - 5.b. Si la mejor configuración no es la original, suprime los elementos originales y crea los nuevos elementos calculados en 5. Los nuevos elementos y sus vecinos se marcan como pendientes.

}

En el paso 5.a se observa que existe la posibilidad de fracaso, que de alguna forma se compensa por la posibilidad de reintentar el procedimiento cuando se modifica algún vecino según se aprecia en 5.b.

#### 4.1 DETALLES DEL ALGORITMO

Como ya se mencionó, el procedimiento desarrollado realiza un cambio en las conectividades en la zona que incluye a un tetraedro malformado.

Primeramente, el algoritmo realiza la detección de un elemento de mala calidad, verificando para ello si el tetraedro tiene el mínimo ángulo diedro menor a un ángulo límite y en ese caso se intenta mejorar su calidad.

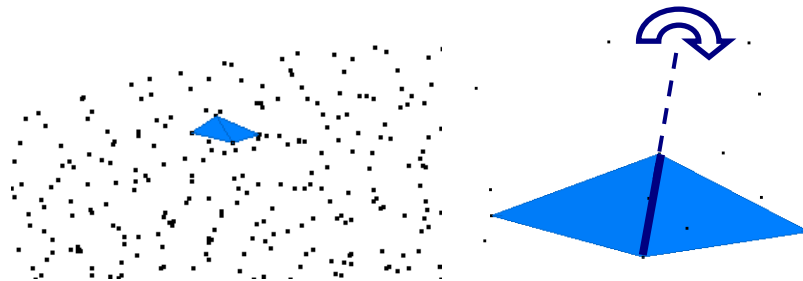


Figura 1: Izquierda: Tetraedro de mala calidad. Derecha: Arista de mayor ángulo diedro.

Luego se elige la arista de mayor ángulo diedro del tetraedro malformado anteriormente detectado, recolectando los tetraedros que comparten dicha arista obtusa. Estos elementos forman un conjunto poliédrico cuya frontera permanecerá inalterada, ya que necesita luego reubicarse en la malla.

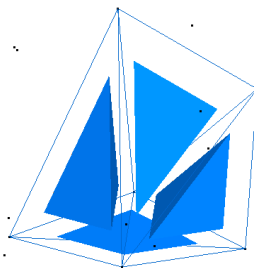


Figura 2: Recolección de tetraedros compartiendo la arista obtusa.

Para rellenar algunas concavidades y aumentar las posibilidades de éxito, se incorpora también todo tetraedro vecino que posea sus cuatro nodos en el conjunto poliédrico colectado.

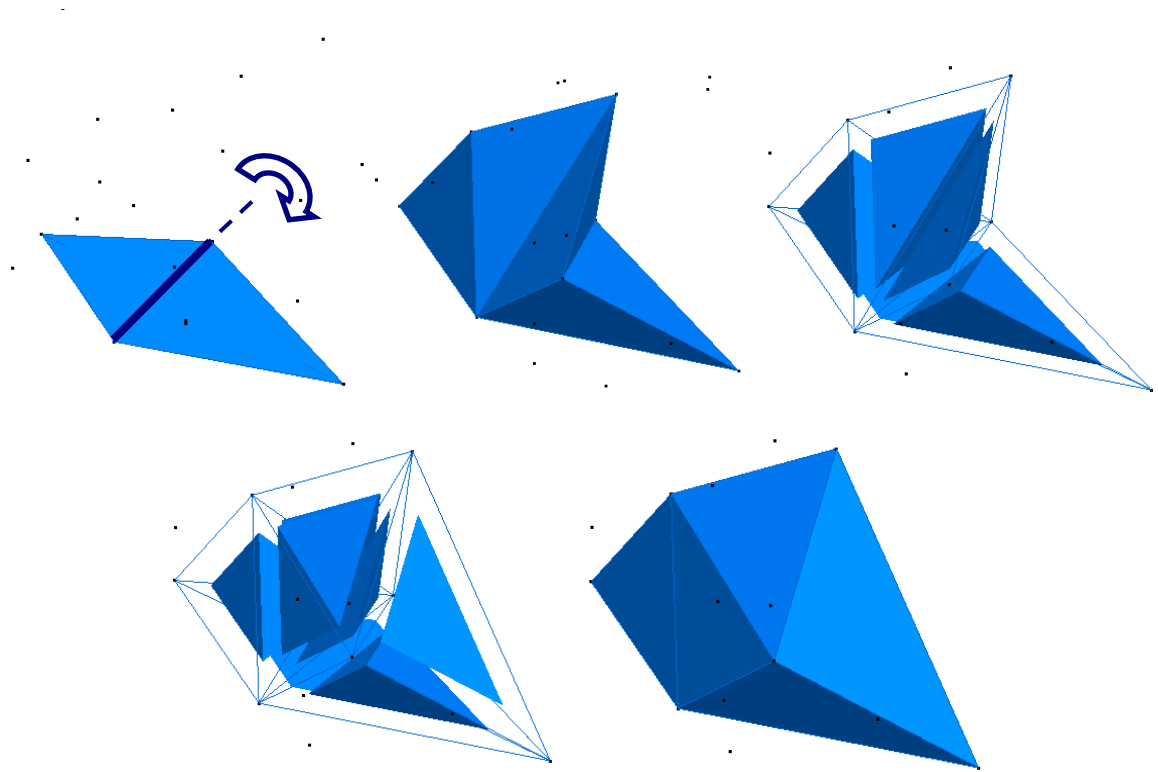


Figura 3: Recolección de elementos e incorporación de tetraedros con cuatro nodos en el conjunto poliédrico.

Una vez obtenido el conjunto poliédrico, se retriangula su interior. Si bien existe una cantidad combinatoriamente importante de soluciones posibles, solo se exploran las retriangulaciones en las que un nodo se une con todas las caras de frontera que no lo contienen. Por cada nodo se evalúa el resultado y se elige la mejor configuración de tetraedros: aquella que mejore la métrica elegida de la calidad, en este caso el mínimo ángulo diedro.

La métrica elegida podría ser cualquiera, la mínima altura, el menor volumen, etc. En la implementación se utilizó primeramente, por un balance de rendimiento y efectividad, el criterio de mínimo volumen para elegir la mejor configuración de tetraedros presuponiendo una distribución buena de nodos, obteniéndose buenos resultados. Pero con la finalidad que el algoritmo sea de propósito general y pueda emplearse en mallas con una muy mala distribución de nodos, se decidió cambiar el criterio de maximizar el mínimo volumen por el de maximizar el mínimo ángulo diedro, pues es el criterio más restrictivo.

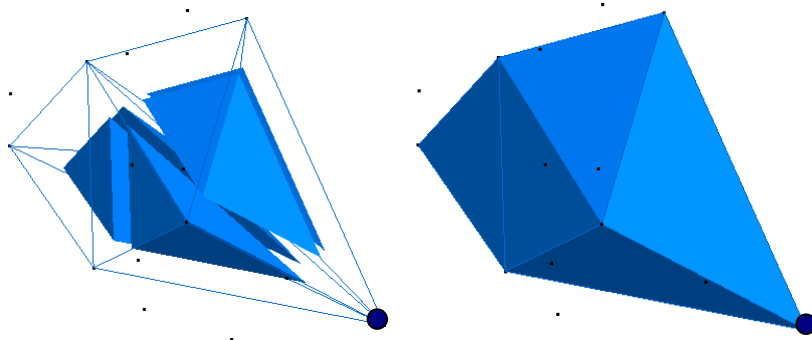


Figura 4: Nodos con el cual se unen todas las caras del conjunto poliédrico para formar nuevos tetraedros.

En el caso en que no sea posible utilizar la arista de mayor ángulo diedro, debido a que la arista elegida pertenece a la frontera o a que no se logró mejorar la calidad, se intenta el mismo proceso pero seleccionando la siguiente arista obtusa del tetraedro de mala calidad.

Es importante destacar que este método de retriangulación adoptado no es combinatoriamente exhaustivo: el conjunto de retriangulaciones posibles, manteniendo la frontera incluye casos en que no todas las diagonales parten de un mismo nodo.

El método tampoco da garantías que en un dado poliedro sea posible aplicar el algoritmo en forma exitosa. A continuación se muestra un ejemplo de una configuración de la malla a la que no es posible mejorar la calidad mediante este método.

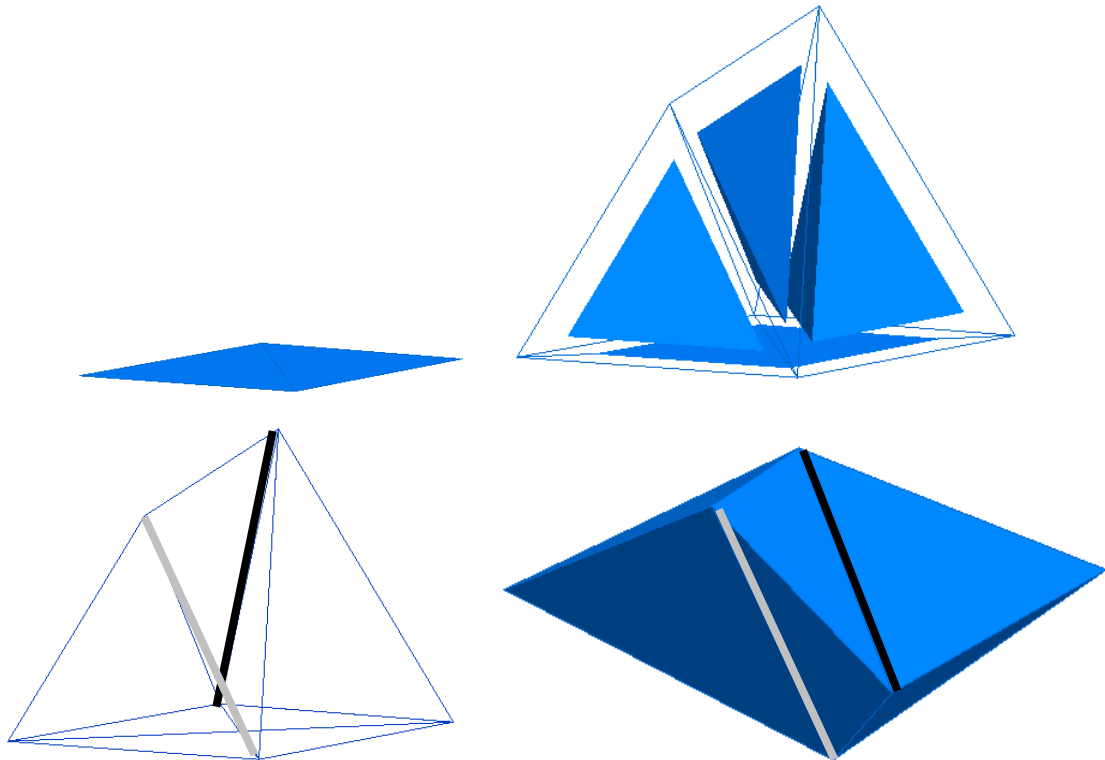


Figura 5: Ejemplo de una configuración de la malla a la que no es posible mejorar mediante este método. Abajo a la derecha: vista superior de conjunto poliédrico.

En la parte superior de la figura 5 se advierte primeramente un elemento de mala calidad y

luego se observa el conjunto poliédrico asociado a la arista obtusa, en el que existen dos concavidades (que se indican con las aristas de mayor espesor de color negro y gris claro). No hay ningún tetraedro vecino que posea sus cuatro nodos en el conjunto poliédrico y rellene esas concavidades muy leves. A excepción de la configuración original, no existe ningún nodo que pueda “ver” a las caras que no lo contienen, es decir que en cualquier otro caso se forman elementos de volumen negativo.

El otro punto desde el cual sería visible toda la frontera del conjunto poliédrico asociado a la arista obtusa es alguno ubicado en la zona del kernel, pero como se indicó anteriormente, con las técnicas aquí desarrolladas no se desplazan ni insertan nodos, sino que solo se realiza un cambio en las conectividades, por lo tanto ésta no fue una opción elegida en el trabajo.

## 5 RESULTADOS

El desarrollo fue utilizado con una gran variedad de mallas, generadas por avance frontal en GiD y por Delaunay en Meshsuite. Todas las mallas analizadas presentaban elementos malformados con ángulos diedros muy pequeños que implican un volumen casi nulo y que aparecían en la frontera mayormente, aunque también en el interior del dominio.

Es importante resaltar aquí que este método no fue desarrollado con el objetivo de eliminar slivers, sino para obtener un crecimiento monótono de la calidad media y debido a ello la eliminación total de los slivers no está garantizada. Es decir, la aplicación directa del método no asegura la total eliminación de los slivers presentes, debido a que como se indicó anteriormente no existen garantías que en un dado poliedro sea posible aplicar el algoritmo en forma exitosa. Por lo tanto, para mallas provenientes de la triangulación Delaunay, que como es sabido poseen gran cantidad de slivers, se aplicó previamente (y en forma implícita) un algoritmo de eliminación de slivers (Calvo, 2009) y finalmente el método desarrollado en el presente trabajo, obteniéndose muy buenos resultados, algunos de los cuales se muestran a continuación.

Se exponen a modo de ejemplo, los resultados obtenidos con dos mallas de tetraedros. En la figura 6 se muestra la distribución de ángulos diedros mínimos originales medidos en grados y la alcanzada luego de aplicar el proceso de optimización para una malla correspondiente a un corazón. Para analizar el procedimiento se utilizó un ángulo límite de  $36^\circ$ , que en la práctica resulta excesivo, pero nos permite analizar los casos en los que no es posible mejorar la calidad local y sus causas. Esta malla tenía 983356 elementos y luego de aplicar el algoritmo pasó a tener 923709 tetraedros, debido a la remoción de los elementos malformados. Inicialmente, la malla tenía ángulo diedro máximo de  $177.6$  grados y ángulo diedro mínimo de  $1.4$  grados; y luego de aplicar el optimizador se obtuvo ángulo diedro máximo de  $168$  grados y ángulo diedro mínimo de  $7.2$  grados.



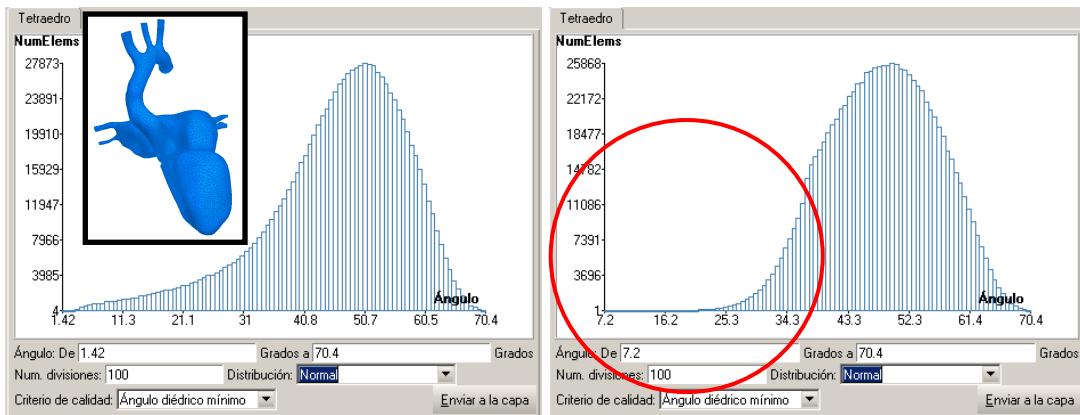


Figura 6: Izquierda: Distribución de ángulos diedros mínimos (grados). Derecha: Distribución de ángulos diedros mínimos en la malla optimizada.

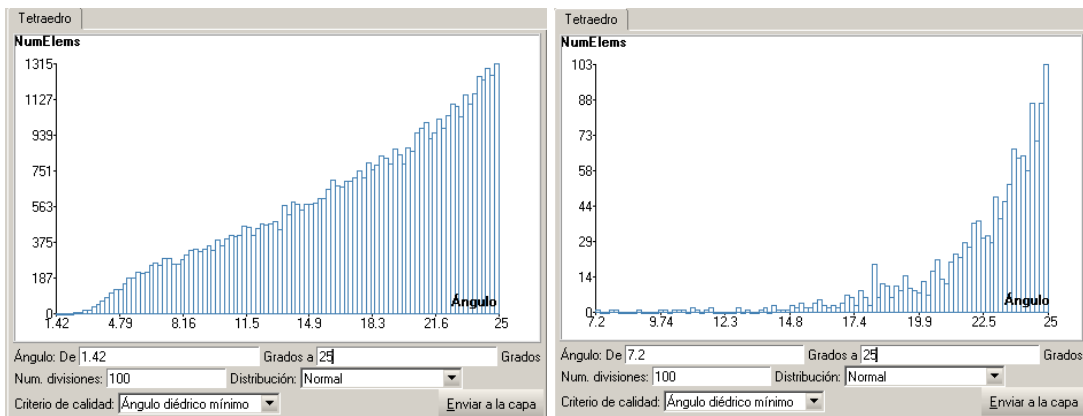


Figura 7: Vista ampliada de la zona de reducción de ángulos diedros mínimos. Izquierda: malla original. Derecha: malla optimizada.

Como se observa, hay una notable disminución de los elementos con ángulos cercanos a cero, lo que implica una mejora en la calidad de la malla. En el círculo resaltado se visualiza una considerable caída en la cantidad de elementos.

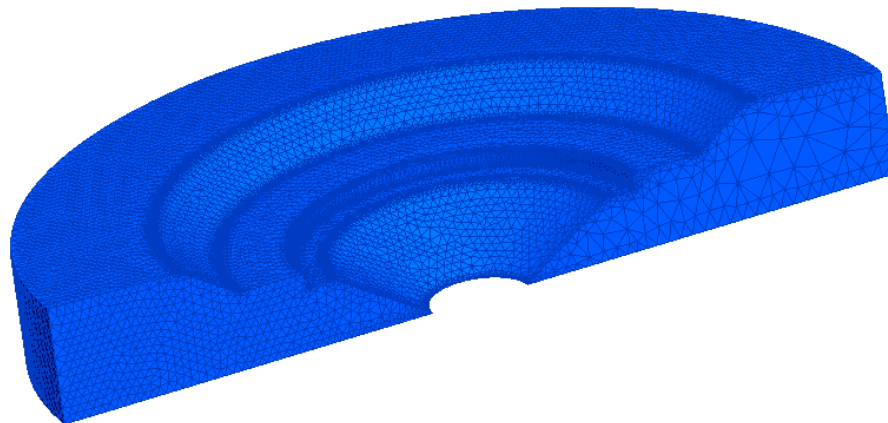


Figura 8: Malla de tetraedros con mala distribución de nodos.

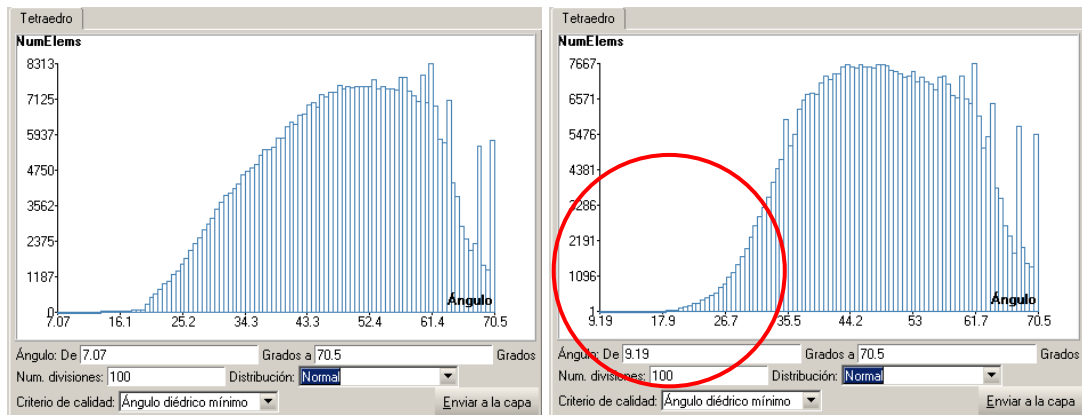


Figura 9: Izquierda: Distribución de ángulos diedros mínimos (grados). Derecha: Distribución de ángulos diedros mínimos en la malla optimizada.

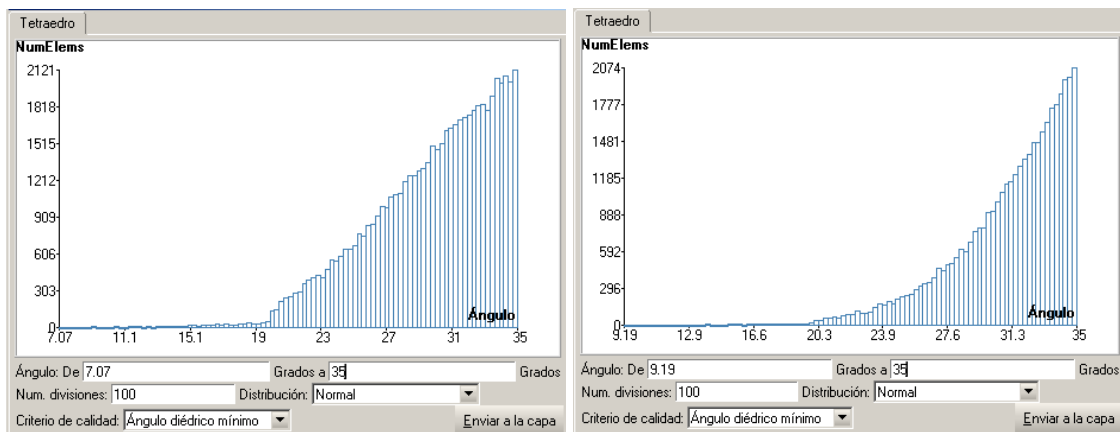


Figura 10: Vista ampliada. Izquierda: malla original. Derecha: malla optimizada.

Al aplicar el optimizador a la malla de la figura 8, se observa también una mejora en la calidad de la malla, pese a que dicha malla posee una muy mala distribución de nodos. La malla tenía 419750 elementos y luego de emplear el algoritmo se obtuvieron 415296 tetraedros. Inicialmente, la malla poseía ángulo diedro máximo de 170.6 grados y ángulo diedro mínimo de 7.1 grados; y luego de aplicar el optimizador se consiguió ángulo diedro máximo de 164.6 grados y ángulo diedro mínimo de 9.19 grados.

En ambos ejemplos se puede observar que quedan ángulos mínimos aún pequeños que no han podido ser mejorados y en ambos casos la condición es producida por condicionamientos en la frontera.

## 6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han desarrollado algunas técnicas para la eliminación de tetraedros malformados, que han sido generados mediante la triangulación de una nube de puntos dados y fijos.

El algoritmo consiste en aplicar retriangulaciones locales sin movimiento ni inserciones de nodos, es decir realizando sólo cambios topológicos.

Se cuenta con un método que, si bien no garantiza la mejora del elemento de peor calidad y por cuestiones de eficiencia tampoco explora todas las posibles retriangulaciones internas de la malla, sí garantiza un crecimiento monótono de la calidad media.

**REFERENCIAS**

- Babuska, I., Aziz, A., *On the angle condition in the finite element method*. SIAM, vol 13, págs. 214-226, 1976.
- Calvo, N., Novara, P., *Aplicaciones del kernel de un polígono a problemas de edición de mallas*. ENIEF, vol 28, págs. 1167-1179, 2009.
- Calvo, N., *Generación de mallas tridimensionales por métodos duales*. Tesis doctoral, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, 2005.
- George, P. L., Borouchaki H., *Back to edge flips in 3 dimensions*. 12 International Meshing Roundtable, New Mexico, USA, 2003.
- Fried, I., *Condition of finite element matrices generated from nonuniform meshes*. AIAA Journal, vol 10, págs. 219-221, 1972.
- Knupp, P. *Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities*, Parts I and II. Technical Report SAND 99-0709J, Sandia National Laboratories, 1999.
- Shewchuk, J., *What Is a Good Linear Finite Element? Interpolation, Conditioning, Anisotropy, and Quality Measures*. University of California at Berkeley, Berkeley, USA, 2002.
- Véneré, M., *Optimización de la calidad de mallas de elementos finitos mediante cambios localizados de topología*. Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, vol 13, págs. 3-13, 1997.