Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXIX, págs. 7195-7208 (artículo completo)
Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.)
Buenos Aires, Argentina, 15-18 Noviembre 2010

MODELOS QUE AVALIAM A INFLUÊNCIA DO ENCRUAMENTO NO TAMANHO E FORMA DE ZONAS PLÁSTICAS

Rafael Araujo de Sousa[a], Luiz Fernando C.R. Martha[b], Jaime T.P. Castro[c], Alexandre A.O. Lopes[d]

[a]*Tecgraf/PUC-Rio - Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, Brasil, rflsousa@tecgraf.puc-rio.br, http://www.tecgraf.puc-rio.br*

[b]*Tecgraf/PUC-Rio - Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, Brasil, lfm@tecgraf.puc-rio.br, http://www.tecgraf.puc-rio.br*

[c]*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Centro Técnico-Científico, Departamento de Engenharia Mecânica. Rua Marquês de São Vicente, 225, sala 133L, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, Brasil, jtcastro@puc-rio.br*

[d]*PETROBRAS - CENPES - Centro de Pesquisa da Petrobras, Cidade Universitária Q7, P20 Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, Brasil, Alexandre.Petrosoft@petrobras.com.br*

Palavras Chave: Mecânica da Fratura, Zona Plásticas, Encruamento.

Resumo. Este trabalho apresenta quatro modelos que consideram o efeito do encruamento no tamanho e na forma de zonas plásticas à frente de trincas. Duas dessas formulações são baseadas na idéia de Irwin, que corrige o tamanho da zona plástica apenas na direção paralela à trinca, por haver tensões infinitas na sua ponta e tensões maiores do que a resistência ao escoamento dentro da zona plástica original. Os outros dois modelos são propostos com base na formulação de Rodriguez, que considera a correção das zonas plásticas em outras direções. Rodriguez analisou uma placa infinita e considerou apenas materiais perfeitamente plásticos, mas usou as tensões derivadas da função completa de tensão de Westergaard, em vez daquelas geradas apenas a partir do Fator de Intensidade de Tensão (FIT) para representar o campo de tensão em regiões próximas à ponta da trinca. As zonas plásticas normalizadas obtidas dessa forma simplificada ficam insensíveis à relação entre a tensão nominal e a resistência ao escoamento, e não reproduzem toda a física deste problema. As zonas plásticas obtidas pelos modelos propostos incluem este importante efeito, e são comparadas com os resultados obtidos por Rodriguez e com resultados experimentais apresentados por Tay et al (1995).

1 INTRODUÇÃO

Interessado em estudar os efeitos de entalhes sobre o comportamento mecânico de componentes estruturais, Charles Edward Inglis (1913) modelou o campo de tensões linear elástico numa placa infinita com um furo elíptico. Como o Fator de Concentração de Tensões desta placa tende ao infinito, $K_t = \sigma_{max}/\sigma_n \to \infty$, quando o raio da ponta do entalhe tende a zero, $\rho \to 0$, o campo de tensões em torno trincas possui uma singularidade característica desta formulação matemática, que o impede de ser usado em problemas de análise de tensão convencionais, onde se compara a tensão máxima com a resistência ao escoamento do material. Foi Alan Arnold Griffith (1920) quem resolveu o problema desta singularidade, mostrando que as trincas só se propagam se obedecerem à lei da conservação de energia, dando início assim à chamada Mecânica da Fratura (MF) moderna.

Por conveniência a MF pode ser separada em Mecânica da Fratura Linear Elástica Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). A MFLE só é válida quando enquanto a perturbação no campo elástico à frente da ponta da trinca (zona plástica, *zp*) é pequena (Dowling et al, 1977). Caso contrário, é necessário usar a MFEP, que tem como parâmetros representativos a integral *J* e a abertura de ponta de trinca, *CTOD*.

A MFLE pode ser usada quando a quantidade de material plastificado em torno da ponta da trinca é pequena em relação às dimensões do resto da peça, que permanece elástico. Irwin usou uma função complexa de tensão de Westergaard para representar o campo de tensão, e intoduziu os Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) K_I, K_{II} e K_{III} para caracterizar a severidade do campo de tensões em torno da ponta das trincas na MFLE quando solicitadas em modo I, II ou III, respectivamente. Todavia, o campo de tensões gerado a partir dos FIT só é correto muito próximo da ponta das trincas.

Usando as tensões geradas a partir de K_I, a tensão de Mises como critério de escoamento, e igualando-a à resistência ao escoamento S_E, Irwin obteve a primeira estimativa para o tamanho da *zp* na direção do plano da trinca; e depois a corrigiu considerando o equilíbrio das tensões limitadas a S_E dentro da *zp*. Kujawski e Ellyin (1986) propuseram considerar o efeito do encruamento na *zp* usando dois tipos de relação constitutiva: a lei de potência e a relação de Ramberg-Osgood. Em ambos os modelos, no entanto, eles também usaram o FIT para descrever o campo de tensão.

Rodriguez (2007) usou a função completa de Westergaard para descrever o campo de tensão em uma placa infinita com uma trinca centrada (gerando assim um campo de tensões LE que satisfaz todas as suas condições de contorno, logo é válido em toda ela e não apenas muito próximo da ponta da trinca); e o usos para estimar a influência da tensão nominal no tamanho e na forma da *zp*. Ele também adaptou a idéia de Irwin (1956) para evitar a singularidade na ponta das trincas, corrigindo toda a fronteira das suas *zp*, não se limitando a estimá-la apenas no plano da trinca, à frente da sua ponta.

Sousa et al (2009) usaram uma função complexa de tensão, obtida por Eftis e Liebowits (1972) para satisfazer de forma aproximada as condições de contorno de uma placa finita, para estudar os efeitos da geometria da placa no tamanho e na forma das zonas plásticas. Eles também apresentaram uma forma aproximada para considerar o efeito do encruamento, usando o modelo de Ramber-Osgood para descrever a relação tensão versus deformação dentro da *zp*.

Este trabalho mostra quatro formas de avaliar o efeito do encruamento no tamanho da *zp*. Os dois modelos apresentados por Kujawski e Ellyin (1986) baseados no FIT, e dois modelos que usam a função completa de Westergaard. Nestes, um usa uma relação exponencial entre a tensão e a distância à ponta da trinca, e o outro usa a hipótese de Hutchinson, Rice e Rosengren para relacionar a deformação com a distância à ponta da trinca, e o modelo de Ramberg-Osgood para relacionar tensões com deformações. Esses quatro modelos são comparados com os resultados experimentais apresentados por Tay et al (1995).

2 ZONAS PLÁSTICAS NA MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Segundo a MFLE tradicional, o campo de tensões em torno da ponta das trincas carregadas em modo I pode ser obtido a partir do FIT conforme mostra a Eq. (1)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Irwin (1956) chegou nessas equações, partindo das seguintes relações complexas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}(Z(z)) - y\,\mathrm{Im}(Z'(z)) \\ \mathrm{Re}(Z(z)) + y\,\mathrm{Im}(Z'(z)) \\ - y\,\mathrm{Re}(Z'(z)) \end{Bmatrix} \tag{2}$$

onde $Z(z)$ é uma função analítica e $z = x + iy$ um número complexo, e supondo $r << a$, onde r é a distância à ponta da trinca e a o seu tamanho.

Sousa et al (2009) e Lopes et al (2009) explicaram a importância de se estimar corretamente o tamanho e a forma de zonas plásticas na validação da MFLE, pois para que ela seja válida é necessário que a *zp* seja "pequena". Esta definição para o tamanho permitido para a zona plástica é portanto subjetiva, mas na prática é comum se usar o critério da norma ASTM E399 (2009), que trata dos ensaios de tenacidade, que assume válidas as previsões da MFLE quando todas as dimensões da peça trincada são maiores que $2.5(K_I/S_E)^2$. Todavia este critério não especifica as dimensões da *zp*, logo não clarifica quão menor que as dimensões da peça ela deve ser

2.1 Zonas plásticas estimadas a partir do FIT

Usando a Eq. (1) para descrever o campo de tensão expresso em coordenadas polares, o tamanho da zona plástica pode ser avaliado, numa primeira aproximação, pelo valor de r para $\theta = 0$ no qual a componente de tensão normal ao plano da trinca σ_y se iguala à resistência ao escoamento do material S_E. Dessa forma, tem-se:

$$\sigma_{yy}(r = zp, \theta = 0) = S_E \Rightarrow Zp0 = \frac{K_I{}^2}{2\pi\, S_E{}^2} \tag{3}$$

Esta primeira aproximação zp_0 pode ser grosseiramente associada a uma forma circular de zona plástica. Esse valor também serve como parâmetro de normalização de todos os cálculos de zonas plásticas que serão mostrados a seguir. A Eq. (3) estima o tamanho da zona plástica apenas a partir do FIT, que para o caso da placa infinita tracionada com uma trinca central é $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$. Ao se usar um critério de escoamento, e.g. Mises, toda a fronteira da $zp(r, \theta)$ pode ser estimada por $\sigma_{Mises}(r, \theta) = S_E$. Quando se assume $\sigma_{ij} = f(K_I, r, \theta)$, a fronteira das $zp_{Mises}(K_I, r, \theta)$ estimadas desta forma depende apenas do valor de K_I, e não reconhece os efeitos da razão entre tensão nominal e a resistência ao escoamento, σ_n/S_E, nem tão pouco os efeitos da geometria da peça, que podem ser muito significativos na prática, como mostrado a seguir.

2.2 Zonas plásticas obtidas a partir do FIT considerando o encruamento

Kujawski e Ellyin (1986) apresentaram duas formas de considerar o efeito do encruamento no tamanho e na forma das zonas plásticas. A diferença básica entre elas está na hipótese adotada para a relação entre tensão e deformação. As duas formas também não variam com o ângulo θ, o que resulta em valores constantes de zona plástica.

2.2.1 Encruamento Parabólico e FIT

Essa lei adota a seguinte relação entre tensão e deformação para a fase plástica:

$$\sigma = S_E\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_E}\right)^n \tag{4}$$

onde $\varepsilon_E = S_E/E$ é a deformação de escoamento, E é o módulo deelasticidade, e h é o expoente de encruamento.

Ao partir da Eq. (4), Kujawski e Ellyin (1986) apresentaram a seguinte expressão para a estimar o tamanho das zonas plásticas:

$$ZpKE_{Pot} = \frac{FIT^2}{S_E{}^2(1+n)\pi} \tag{5}$$

2.2.2 Ramberg-Osgood e FIT

Essa estimativa de zona plástica usa o modelo de Ramberg-Osgood para descrever a relação σε do material,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \beta\left(\frac{\sigma}{S_E}\right)^{1/n} \tag{6}$$

em que E é o módulo de elasticidade, n é o expoente de encruamento e β é o coeficiente de encruamento.

Partindo da Eq. (6), Kujawski e Ellyin (1986) apresentaram outra expressão para estimar o tamanho das zonas plásticas.

$$ZpKE_{RO} = \frac{FIT^2}{S_E{}^2\left(1+\tilde{n}^2\right)\,\pi} \tag{7}$$

na qual

$$\tilde{n} = \frac{1+n\left(\dfrac{W_0^P}{W_0^E}\right)}{1+\left(\dfrac{W_0^P}{W_0^E}\right)} \tag{8}$$

e

$$W_0^P = \frac{1}{(1+n)} S_E \varepsilon_E \text{ e } W_0^E = \frac{S_E^{\,2}}{2E} \quad (9)$$

2.3 Zonas plásticas corrigidas usando o FIT - Irwin

Como dito anteriormente, as zonas plásticas estimadas usando a Eq. (1) e a Eq. (2) não tratam adequadamente a singularidade intrínseca do modelo matemático, não considerando que os materiais dúcteis escoam dentro da *zp*, logam limitam as dentro dela. Irwin (1956) tratou desse problema apenas para materiais lineares perfeitamente plásticos (sem encruamento) com o valor do ângulo fixo em $(\theta = 0)$. A Figura 1 e a Eq. (10) mostram a idéia de Irwin.

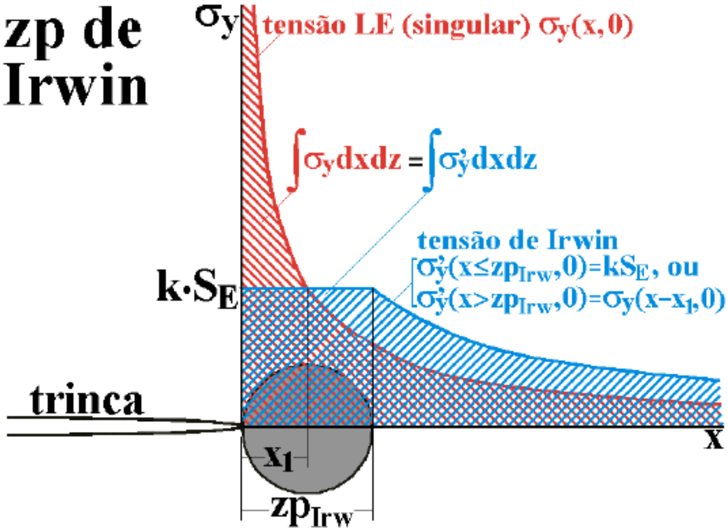

Figura 1 - Redistribuição das tensões elásticas após se fazer a proposta, por Irwin, para manter o equilíbrio, usando um deslocamento x_1 na distribuição de tensões $\boldsymbol{\sigma}_y(x,0)$ e k define o estado plano (Castro e Meggiolaro, 2009).

$$\int_0^{\infty} \frac{K_I \mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\, x}} = \int_0^{zp_{Irw}} S_E \mathrm{d}x + \int_{zp_0}^{\infty} \frac{K_I \mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\, x}} \therefore \int_0^{Zp0} \frac{K_I \mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\, x}} = S_E zp_{Irw} \therefore zp_{Irw} = \frac{K_I^{\,2}}{\pi\, S_E^{\,2}} \quad (10)$$

Ao deslocar-se o campo de tensões de x_1, Irwin estimou uma zona plástica que é o dobro da zona plástica original $(Zp0)$.

2.3 Zonas plásticas estimadas a partir da Função de Tensão de Westergaard Completa - Z

Ao se usar a Eq. (2) e a idéia de Irwin para limitar as tensões dentro da *zp*, são apresentadas três formas para fazer essa correção considerando o efeito do encruamento

2.3.1 Zonas Plásticas estimadas por Rodriguez

Rodriguez (2007) estudou a influência da razão entre a tensão nominal e a resistência ao escoamento σ_n/S_E no tamanho da zona plástica em torno das pontas da trinca numa placa infinita em modo I, usando a função de Westergaard completa para calcular o campo de tensões Lineares Elásticas. Ele usou o critério de Mises para obter $\sigma_{Mises}(r = zp_{West}, \theta) = S_E$:

$$\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta) = \mathrm{Re}[Z(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)] + y(r,\theta)\mathrm{Im}[Z'(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)] \tag{11}$$

em que $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$.

Ao se usar o argumento de Irwin para evitar singularidade e, como a carga é uniaxial, considerando apenas o equilíbrio das forças geradas pela tensão σ_y, então:

$$\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta) Zp_{West} E = \int_0^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) \mathrm{d}r \tag{12}$$

Assim, pode-se estimar o tamanho da zona plástica considerando o efeito da razão σ_n/S_E e também o equilíbrio de forças geradas pelas tensões singulares por.

$$Zp_{West} E = \frac{1}{\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)} \int_0^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) \mathrm{d}r \tag{13}$$

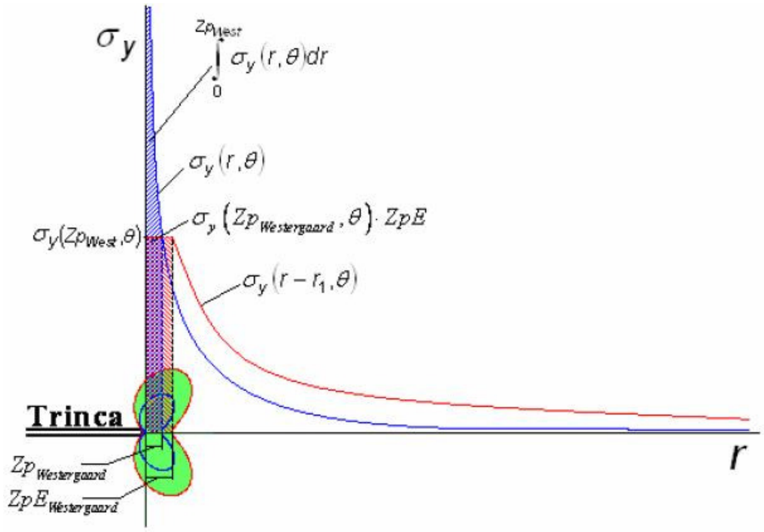

Figura 2 – Limitação da tensão dentro da zona plástica (Rodriguez).

2.3.2 Zonas plásticas com a análise do encruamento

A proposta de Sousa et al (2009), de considerar o encruamento no tamanho e na forma das zonas plásticas usando a equação de Ramberg-Osgood tem base na idéia de energia, pois eles usaram tanto informação de deformação quanto de tensão em seus cálculos. A equação que eles usaram para a correção foi:

$$\int_0^{Zp_{West}E^*} (\sigma)\,\mathrm{d}\varepsilon = \sigma_0 Zp_{West} E^* - \int_0^{S_E} (\varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma \tag{14}$$

em que σ_{max} é a tensão gerada quando o material atinge sua deformação máxima. O valor numérico de σ_{max} é obtido pela solução da Eq. (6), e $Zp_{West}E^*$ é a zona plástica equilibrada ao se usar o modelo de Ramberg-Osgood para descrever o comportamento plástico do material considerando o encruamento. Dois pontos devem ser enfatizados na correção proposta por Irwin: primeiro, os campos de tensão dados pelas equações (1) e (2) são obtidos em função das coordenadas polares r e θ. Dessa forma, é necessário que haja alguma expressão entre deformação e/ou tensão em coordenadas polares, $\varepsilon(r,\theta)$ e/ou $\sigma(r,\theta)$; segundo, pode-se pensar no artíficio matemático feito por Irwin como apenas uma igualdade de área, vide Figura 3.

.

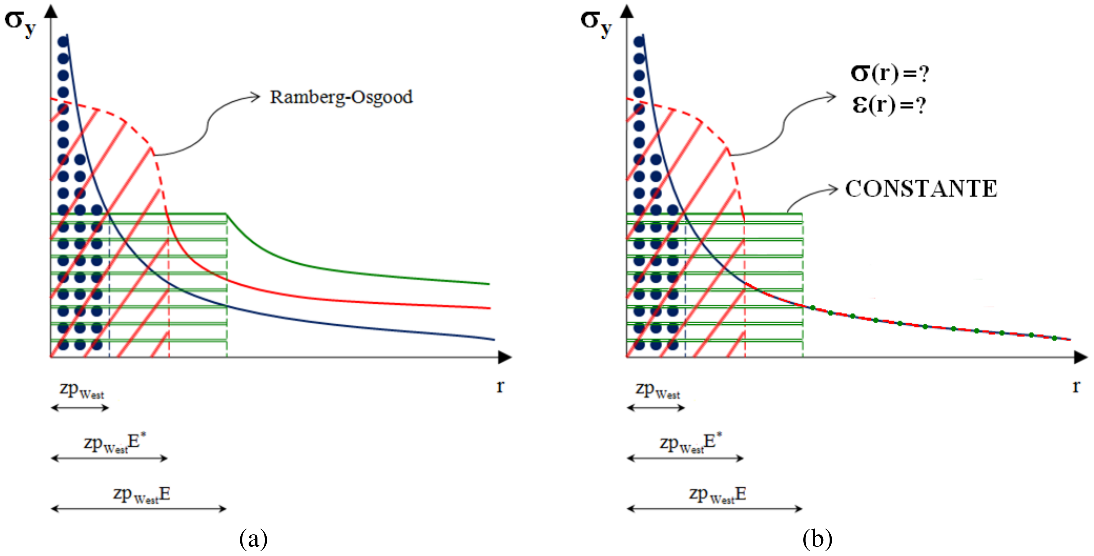

Figura 3 – (a) translação da parte elástica da tensão $\sigma_y(r,\theta)$ e (b) equilíbrio de área sem alterar o campo elástico.

Pela análise da Figura 3.b, pode-se perceber que o problema é justamente saber o comportamento da tensão ou da deformação em função da posição *r*. Para cada hipótese assumida, é mostrada uma formulação diferente que considera o efeito do encruamento no tamanho e na forma das zonas plásticas.

2.3.2.1 Encruamento com a hipótese de Hutchinson, Rice e Rosengren e com uso do modelo de Ramberg-Osgood - $Zp_{HRR_{RO}}$

Nessa formulação, se usa o campo de Hutchinson, Rice e Rosengren para a relação deformação versus posição.

$$\varepsilon \approx \frac{1}{r^{1/(1+n)}} \tag{15}$$

Quando se substitui a Eq. (15) na Eq. (6), tem-se uma relação direta posição versus tensão, conforme mostra a Eq. (16).

$$r = \left[\frac{1}{\frac{\sigma}{E}+\beta\left(\frac{\sigma}{S_E}\right)^{1/n}}\right]^{1+n} \tag{16}$$

Na adaptação da idéia de Sousa et al (2009), para complementos de área, obtém-se a seguinte equação:

$$\left|\sigma_0 Zp_{West}E^* - \int_{\sigma_0}^{S_E}\left\{\left[\frac{\sigma}{E}+\beta\left(\frac{\sigma}{S_E}\right)^{1/n}\right]^{-(1+n)}\right\}\mathrm{d}\sigma\right| = \int_0^{Zp_{West}}\left[\sigma_{yy}(r,\theta)\right]\mathrm{d}r \tag{17}$$

Ao se isolar $Zp_{West}E^{*}$ na Eq. (17), obtêm-se os valores corrigidos das zonas plásticas para essa formulação de encruamento $\left(Zp_{HRR_{RO}}\right)$.

$$Zp_{HRR_{RO}} = \frac{\int_{0}^{Zp_{West}} \left[\sigma_{yy}(r,\theta)\right] \mathrm{d}r + \left| \int_{\sigma_0}^{S_E} \left\{ \left[\frac{\sigma}{E} + \beta \left(\frac{\sigma}{S_E} \right)^{1/n} \right]^{-(1+n)} \right\} \mathrm{d}\sigma \right|}{\sigma_0} \tag{18}$$

2.3.2.2 Encruamento com relação parabólica entre tensão e posição - *ZpP*

Conforme a Figura 3.b, percebe-se que para se levar em consideração o efeito do encruamento na correção das zonas plásticas é necessário saber o comportamento da tensão em função da posição *r*. Ao se adotar uma relação de potência, tem-se que

$$\sigma = \alpha\, r^{1/1+m} \tag{19}$$

ocasião na qual α e m são parâmetros que devem ser ajustados por meio de uma analogia à curva do modelo constitutivo.

A Figura 4 mostra como a Eq. (19) simula apenas a parte plástica do comportamento do material.

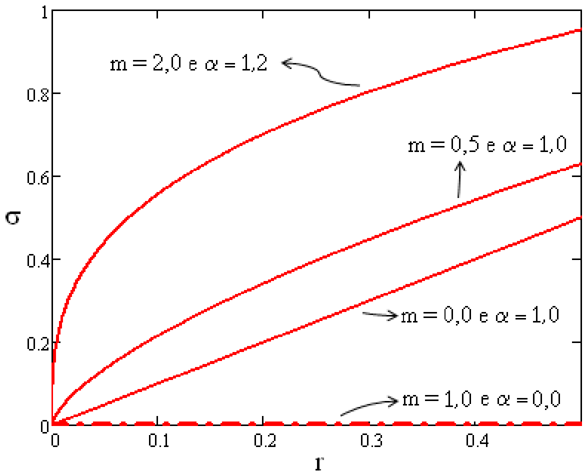

Figura 4 – comportamentos entre tensão e posição para diversos valores de *m* e α .

No uso da ideia da correção proposta por Irwin, para $\theta = 0$, e que foi adaptada por Rodriguez (2007) para qualquer θ, pode-se usar a composição de duas áreas, uma corresponde à parte linear elástica e outra, à parte plástica, Eq. (19), do comportamento do material. A equação final que fornecerá o valor da zona plástica corrigida e que considera o encruamento é dada por:

$$A_{Total} = A_{Linear} + A_{NaoLinear} = \int_{0}^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) \mathrm{d}r \tag{20}$$

em que

$$A_{Linear} = \sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta) ZpP \;\text{ e }\; A_{NaoLinear} = \int_{0}^{ZpP} \left[\alpha\, r^{1/1+m}\right] \mathrm{d}r \tag{21}$$

e resulta em

$$\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)ZpP + \int_0^{ZpP}\left[\alpha\, r^{1/1+m}\right]\mathrm{d}r = \int_0^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta)\,\mathrm{d}r \qquad (22)$$

O valor de ZpP que satisfizer a Eq. (22) será a zona plástica corrigida, considerando-se o encruamento.

3 ESTUDOS DE CASO

Dois casos serão estudados. O primeiro mostra como a proposta do item 2.3.2.2 (ZpP) reproduz os resultados obtidos por Rodriguez (2007) a título de caso limite e como os valores de m e α influem no tamanho e na forma das zonas plásticas. O segundo caso compara as várias estimativas de zonas plásticas obtidas $ZpKE_{Pot}$, $ZpKE_{RO}$, $Zp_{HRR_{RO}}$, ZpP, Zp_{West} e $Zp_{West}E$ com o resultado experimental medido por Tay et al (1995).

3.1 Validação do modelo ZpP

Para validar os resultados das zonas plásticas obtidas por ZpP, usou-se os resultados de Rodriguez (2007), nos quais ele analisou uma placa infinita ao considerar material perfeitamente plástico com um nível crescente de tensão nominal.

Esse exemplo mostra o efeito do encruamento no tamanho e na forma das zonas plásticas conforme o modelo proposto para o caso de uma placa infinita com o tamanho da trinca igual a 10 mm e SnSe = 0,6. Quatro combinações diferentes de α e m serão estudadas. Para m = 1,0 com $\alpha = 0{,}0$, dispõe-se de um material com comportamento plástico sem encruamento, para m = 0,8 com α =0,2; para m = 25,0 com α =0,8 e m = 2,0 com $\alpha = 1{,}5$, tem-se um encruamento cada vez mais crescente.

A Figura 5 mostra as zonas plásticas para os casos descritos acima para tensão plana, e a Figura 6 os mesmos casos correspondentes à Figura 5 só que para deformação plana.

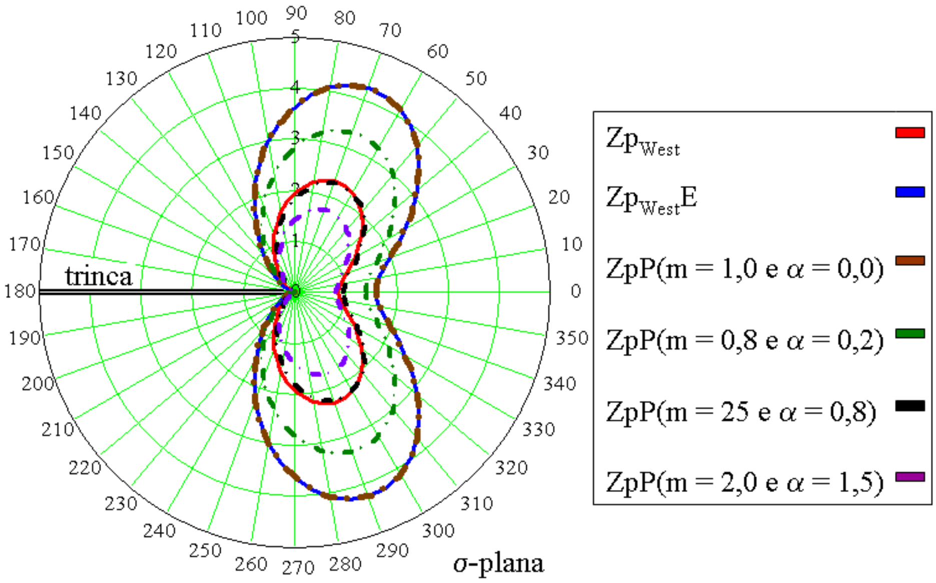

Figura 5 – Efeito do encruamento para o estado plano de tensão.

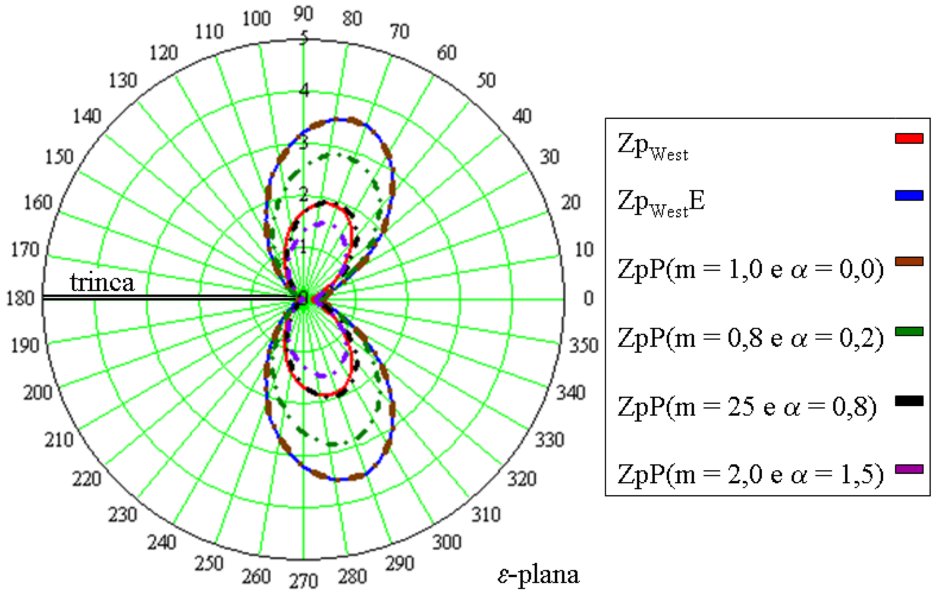

Figura 6 – Efeito do encruamento para o estado plano de deformação.

3.2 Modelos de encruamento versus dados experimentais

Tay et al (1995) usando técnicas especulares de laser para medir a zona plástica $(ZpExp)$ de uma placa com 200 mm de comprimento, 100 mm de largura, 2,5 mm de espessura e com 30 mm de trinca, localizada no centro da peça. O material analisado foi: alumínio 2024-T351 com módulo de elasticidade (E) igual a 73 GPa, coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,3; tensão de escoamento (S_E) igual a 370 MPa e com SnSe = 0,222. Para comparar os resultados, considerou-se o estado plano de tensão.

A Figura 7 mostra a comparação entre a zona plástica obtida por Tay et al (1995) e as zonas plásticas obtidas pelos modelos $Zp_{HRR_{RO}}$, ZpP, Zp_{West} e $Zp_{West}E$. Já a Figura 8 compara os resultados experimentais, $Zp_{West}E$, com os resultados vindos do uso dos modelos $ZpKE_{Pot}$, $ZpKE_{RO}$, Zp_{West}.

Conforme indicado por Tay et al (1995), os valores do coeficiente de encruamento e do expoente de encruamento são respectivamente iguais a 0,002 e 0,07. Por meio dos valores de β e n, obteve-se por ajuste, os valores de α igual a 0,55 de S_E e m igual a 3, que são usados pelo modelo ZpP.

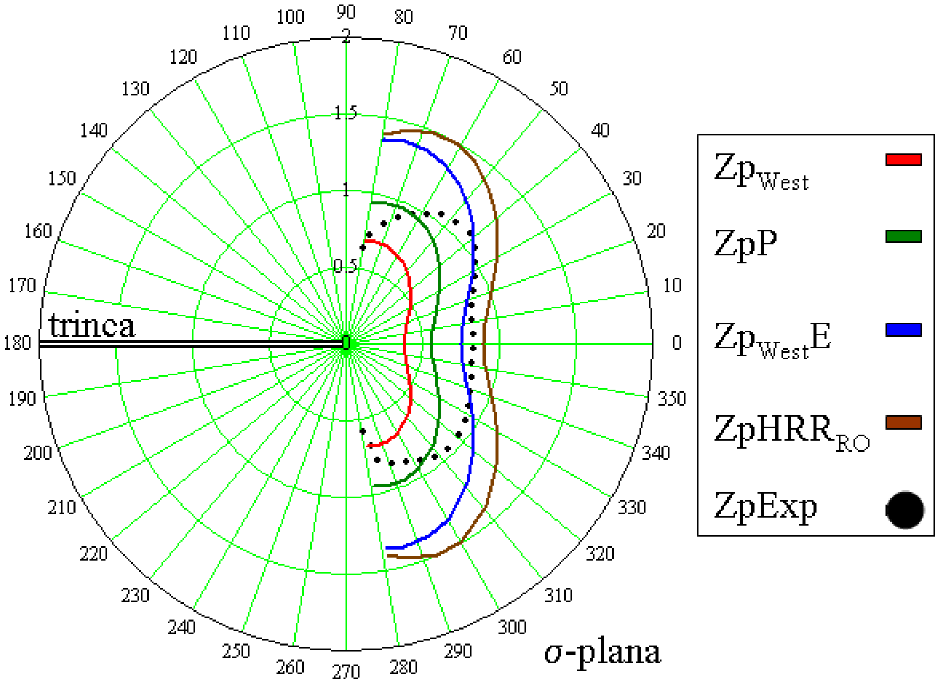

Figura 7 – Comparação das zonas plásticas dos modelos $Zp_{HRR_{RO}}$, ZpP, Zp_{West} e $Zp_{West}E$ com a zona plástica $ZpExp$.

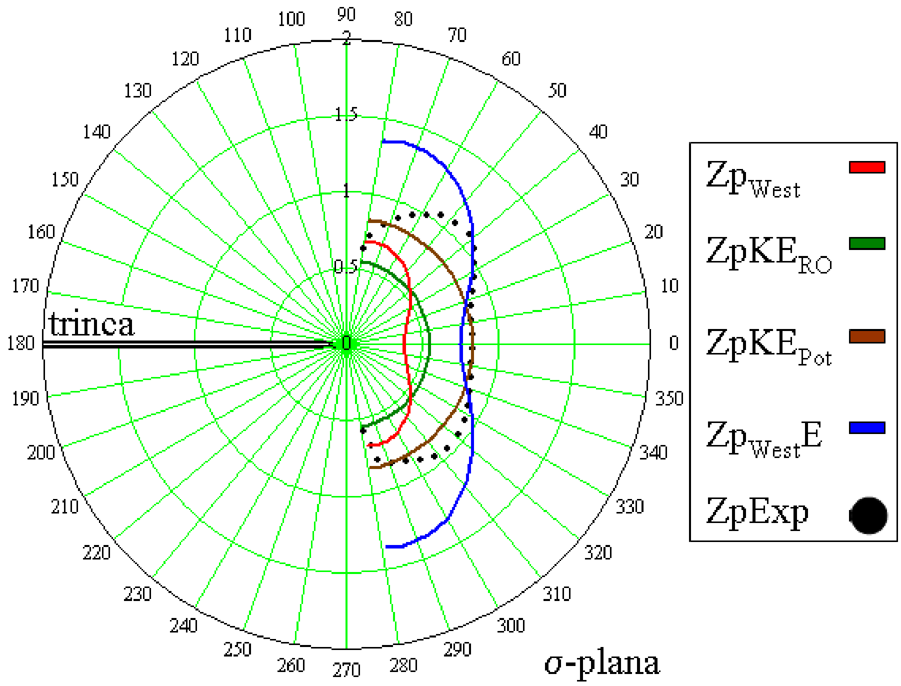

Figura 8 – Comparação das zonas plásticas dos modelos $ZpKE_{Pot}$, $ZpKE_{RO}$, Zp_{West} e $Zp_{West}E$ com a zona plástica $ZpExp$.

Pela análise da Figura 7 e da Figura 8, percebe-se que para $\theta = 0$ os modelos $Zp_{West}E$, $ZpKE_{Pot}$ e $Zp_{HRR_{RO}}$ são bem próximos do valor correspondente de $ZpExp$, porém $Zp_{West}E$ é um pouco menor, $Zp_{HRR_{RO}}$, um pouco maior e $ZpKE_{Pot}$, praticamente igual a $ZpExp$. Na Figura 8, pode-se ver que tanto o modelo $ZpKE_{Pot}$ quanto o modelo $ZpKE_{RO}$ apresentam valores constantes ao longo de θ. O resultado obtido pelo modelo ZpP possui praticamente a mesma ordem de grandeza e a mesma forma do resultado de $ZpExp$, parecendo estar apenas transladado um em relação ao outro. Este fato pode ter ocorrido por falha do modelo ZpP ou até mesmo por imprecisão das medidas experimentais.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou as duas formas de considerar o efeito do encruamento apresentadas por Kujawski e Ellyin (1986). Essas duas formas foram denominadas aqui neste trabalho de $ZpKE_{RO}$, que considera o modelo de Ramberg-Osgood para relacionar deformação (ε) com tensão (σ) e a outra, $ZpKE_{Pot}$, que considera a lei de potência para relacionar essas grandezas. Essas duas formulações usam o Fator de Intensidade de Tensão para representar o campo de tensão.

Dois modelos são propostos para simular o efeito do encruamento no tamanho e na forma das zonas plásticas: $Zp_{HRR_{RO}}$ que considera a hipótese de Hutchinson, Rice e Rosengren para relacionar deformação com posição (r), Eq. (15), e usa o modelo de Ramberg-Osgood para relacionar deformação com tensão e o modelo denominado de ZpP, que considera uma relação de potência entre tensão e posição, Eq. (19). Esses dois modelos têm como base a ideia de Rodriguez (2007), que corrige as zonas plásticas originais em todas as direções, devido elas apresentarem tensões maiores que a tensão de escoamento nas regiões próximas à ponta da trinca. Os resultados de zonas plásticas obtidas por Rodriguez (2007) consideram apenas material perfeitamente plástico, $Zp_{West}E$. Os dois modelos propostos consideram, assim como Rodriguez (2007), a função complexa de tensão de Westergaard para representar o campo de tensão.

No estudo de caso, mostrou-se que o modelo ZpP reproduz bem os resultados obtidos por Rodriguez (2007). Os quatro modelos de encruamento apresentados foram comparados com os dados experimentais, $ZpExp$, apresentados por Tay et al (1995), que fez suas medidas em uma placa finita de alumínio 2024-T351 sob uma relação entre a tensão nominal e tensão de escoamento igual 0,222. Constatou-se que os modelos $ZpKE_{Pot}$ e $ZpKE_{RO}$ são constantes em todas as direções, sendo que $ZpKE_{Pot}$ resultou em uma zona plástica igual a $ZpExp$ ao longo da direção paralela à trinca, $\theta = 0$, e o resultado de $ZpKE_{RO}$ foi bem menor que o obtido experimentalmente.

Para a direção paralela à trinca, o modelo $Zp_{West}E$ estimou uma zona plástica menor que $ZpExp$ com um erro de 9,3 %, enquanto que $Zp_{HRR_{RO}}$ estimou um valor maior que $ZpExp$ com um erro de 8,4 %. Para todas as outras direções, no entanto, os dois modelos indicaram medidas superestimadas.

O modelo ZpP teve seus parâmetros ajustados graficamente por meio do modelo de Ramberg-Osgood e estimou um valor menor que $ZpExp$ ao longo da direção paralela à trinca, com um erro de 33 %. A forma e a ordem de grandeza da zona plástica obtida por ZpP, parece, todavia, próxima à zona plástica $ZpExp$, havendo um translado de uma em relação a outra. Este fato que pode ser justificado por falha do modelo ZpP ou até mesmo por imprecisão das medidas experimentais, o que justifica um erro de 33 % na direção paralela ao plano da trinca.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor é aluno de doutorado do Departamento de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e agradece o apoio financeiro do grupo de Tecnologia em Computação Gráfica da PUC-Rio (TECGRAF).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, T.L., Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. *2.ed. CRC Press*, 1995.

Castro, J.T.P., and Meggiolaro, M.A., Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço: Volume I - Iniciação de Trincas. 1.ed. Rio de Janeiro: Copyright, 2009.

Castro, J.T.P.; Meggiolaro, M.A. Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço: Volume II - Propagação de Trincas, Efeitos Térmicos e Estocásticos. 1.ed. Rio de Janeiro: Copyright, 2009.

Dowling, N.E., Brose, W.R., and Wilson, W.K., Notched member fatigue life predictions by the local strain approach, *Fatigue Under Complex Loading: Analysis and Experiments, AE-6, SAE*, 1977.

Eftis, J., and Liebowtiz, H., On the Modified Westergaard Equations for Certain Plane Crack Problems. *International Journal of Fracture Mechanics*, 8:383-392, 1972.

Griffith, A.A., The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society series A*, 221:163-198, 1920.

Inglis, C.E., Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institution of Naval Architects*, 55:219-230, 1913.

Irwin, G.R., Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys. *Proceedings of 1955 Sagamore Conferencee on Strength Limitations of Metals, Syracuse University, N.Y., March*, v:289-305, 1956.

Irwin, G.R., Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361-364, 1957.

Kujawski, D., and Ellyin, F., On the size of plastic zone ahead of crack tip. *Engineering Fracture Mechanics*, 25:229-236, 1986.

Lopes, A.A.O., Sousa, R.A., Martha, L.F.C.R., Castro, J.T.P., Dumont, N.A., Determinação de Zonas Plásticas usando a Mecânica de Fratura Linear Elástica e o Método Híbrido dos Elementos de Contorno. Anais do XXX CILAMCE / Congresso Íbero-Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia. Búzios, Brasil. 2009.

Norma E399. Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials, *ASTM Standards*, 03.01.

Rodriguez, H.Z., Efeito da tensão nominal no tamanho e forma da zona plástica. *Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-RIO*, Brasil, 2007.

Sousa, R.A., Martha, L.C.R., Castro, J.T.P., Lopes, A.A.O., e Miranda, A.C.O., Parâmetros que Influenciam nas Medidas de Zonas Plásticas usando a Mecânica de Fratura Linear Elástica. *Anais do XXX CILAMCE / Congresso Íbero-Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*. Búzios, Brasil. 2009.

Tay, T.E., Yap, C.M. and Tay, C.J., Crack tip and notch tip plastic zone size measurement by laser speckle technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 52:879-893, 1995.

Williams, M.L., On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24:109-114, 1957.