

## **AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO ERRO DE MODELAGEM GLOBAL EM ESTRUTURAS CONSTITUÍDAS POR MATERIAIS HETEROGÊNEOS**

**Francisco P.A. Almeida, Ricardo S. Romão Filho, Revellys W.B. Cavalcante e Arnaldo dos Santos Júnior**

*Laboratório de Computação Científica e Visualização, Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Campus A.C. Simões, Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, Maceió, Alagoas, Brasil, 57072-970, patrick@lccv.ufal.br; www.lccv.ufal.br*

**Palavras - Chave:** Materiais Heterogêneos, Erro de Modelagem, Estudo Paramétrico, Método dos Elementos Finitos.

**Resumo.** No presente trabalho procura-se modelar o comportamento mecânico de estruturas constituídas por materiais com microestrutura heterogênea através de simulações computacionais, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) como ferramenta numérica. Tais simulações consistem em avaliar o erro de modelagem global, em termos de norma energia de deformação, induzidos pela substituição das propriedades micromecânicas do material em escala refinada (material heterogêneo) por outro dotado de propriedades efetivas equivalentes (material homogeneizado). Neste estudo, com o objetivo de verificar a eficiência dos modelos micromecânicos de homogeneização do material são realizadas diversas análises compondo um estudo paramétrico acerca de estimativas de erro de modelagem global. A primeira aplicação visa representar numericamente de forma satisfatória o problema clássico de Eshelby que consiste de uma inclusão imersa em um meio infinito. A segunda aplicação apresenta um estudo paramétrico em materiais compósitos reforçados por fibras com distribuição aleatória e regular. A última aplicação analisa um tubo cilíndrico constituído por Material com Gradação Funcional (FGM).

## INTRODUÇÃO

Os avanços da tecnologia têm motivado o aparecimento de uma nova geração de materiais avançados, manufaturados para atendimento às necessidades dos modernos setores industriais, tais como, indústria automotiva, aeroespacial e de petróleo. As pesquisas de interesse destas indústrias são aquelas direcionadas ao estudo de novos materiais, os quais tenham elevada relação resistência/peso, rigidez/peso, boa resistência à corrosão, baixa expansão térmica, bom desempenho à fadiga, entre outros.

Nesta nova geração de materiais avançados, destacam-se: os compósitos reforçados por fibras e os laminados, caracterizados por variações bruscas em suas microestruturas; e aqueles caracterizados por transições graduais em sua constituição interna, os chamados Materiais com Gradação Funcional (*Functionally Graded Material – FGM*).

Uma grande vantagem de tais materiais heterogêneos avançados é que, se bem projetados, eles podem exibir as melhores qualidades de seus constituintes, assim como características desejáveis não apresentadas por estes últimos trabalhando individualmente.

Esses materiais, em geral, exibem comportamentos bastante diferentes em relação aos materiais convencionais, isotropos e homogêneos, levando-se à necessidade de estratégias de análise diferenciadas. Muitas vezes o comportamento de materiais heterogêneos pode ser estudado de forma analítica, usando formulações termodinâmicas fundamentais, tais como no caso de modelos plásticos. No entanto, no momento em que estes modelos tentam descrever materiais reais em condições extremas, eles se tornam muito complicados por apresentarem muitos parâmetros que são, em geral, difíceis de serem determinados.

Outra abordagem para lidar com a modelagem de materiais heterogêneos é através de técnicas de homogeneização analítica. Métodos deste tipo tiveram sucesso considerável na descrição do comportamento elástico linear para diferentes tipos de microestruturas (Bornert et al., 2001; Hori e Nemat-Nasser, 1999). A hipótese básica das técnicas de homogeneização analítica é a separação completa das escalas, ou seja, o tamanho característico das heterogeneidades é infinitamente menor do que a característica estrutural. Segundo Bornert et al., 2001, a aplicação destas técnicas para modelagem de comportamento não-linear inelástico tem um elevado nível de complexidade.

Para contornar o problema, várias formulações têm sido empregadas para a modelagem de materiais heterogêneos, dentre as quais destacam-se: a Teoria de Volumes Finitos, o Método dos Elementos Finitos, o Método de Elementos de Contorno, Modelos Micromecânicos baseados na Teoria de Campos Médios, e mais recentemente, a Avaliação de Erros de Modelagem Globais e Locais, utilizada em estratégias adaptativas voltadas à modelagem multi-escala. Sendo a avaliação de erros de modelagem globais o foco deste trabalho de pesquisa.

## 1 MODELOS MICROMECAÑICOS BASEADOS NA TEORIA DOS CAMPOS MÉDIOS

### 1.1 Equação Geral da Micromecânica

As equações constitutivas especificam as propriedades mecânicas e/ou térmicas de um material particular através de sua constituição interna. Matematicamente, a finalidade destas equações é definir as relações entre as equações mecânicas, térmicas e cinemáticas e permitir a formulação bem definida do problema da mecânica do contínuo. Fisicamente, as equações constitutivas definem várias idealizações materiais as quais servem de modelo para o comportamento do material real.

No entanto, não é possível escrever uma equação que seja capaz de representar um dado

material em todas as suas formas de aplicação, pois muitos materiais se comportam diferentemente quando submetidos a diferentes níveis de carregamento. Assim, a melhor maneira de definir uma equação constitutiva é como sendo a representação de um comportamento particular e não de um material particular.

Dessa forma, considerando um sólido com múltiplas fases, pode-se estabelecer relações entre deformações e tensões na matriz e nas fases, em termos médios, através das seguintes equações:

$$(\bar{C} - C) : \varepsilon^0 = \sum_{\alpha} f_{\alpha} (C^{\alpha} - C) : \langle \varepsilon \rangle_{\alpha} \quad (1)$$

$$(\bar{D} - D) : \sigma^0 = \sum_{\alpha} f_{\alpha} (D^{\alpha} - D) : \langle \sigma \rangle_{\alpha} \quad (2)$$

Os tensores de rigidez e de flexibilidade da matriz são representados por  $C$  e  $D$ , respectivamente, enquanto que nas fases esses tensores são representados por  $C^{\alpha}$  e  $D^{\alpha}$ . Todos os tensores são médios e as Eq. (1) e (2) representam as equações gerais da micromecânica.

## 1.2 Modelo Auto-Consistente

Com o intuito de determinar as propriedades efetivas de materiais compósitos, o modelo Auto-Consistente utiliza a estratégia do método da inclusão equivalente (Eshelby, 1957), onde considera-se uma única inclusão envolvida pelo material efetivo do compósito, conforme mostrado na Fig. 1.

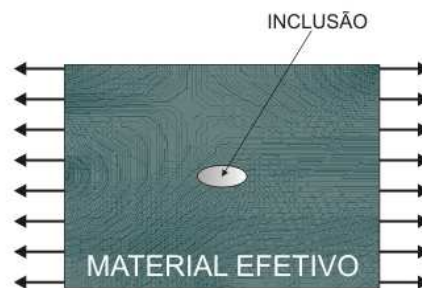


Figura 1 - Inclusão envolvida em um material efetivo.

Uma característica desse método é que a propriedade efetiva do compósito não se altera com a permutação das fases, ou seja, se na Fig. 1 permutarmos os materiais (inclusão – material efetivo) a propriedade efetiva do compósito permanece a mesma.

Através desse modelo, pode-se obter a matriz de rigidez efetiva do compósito a partir da equação:

$$\bar{C} = C + f_{\alpha} (C^{\alpha} - C) [I + S \bar{C}^{-1} (\bar{C} - C^{\alpha})]^{-1} \quad (3)$$

sendo  $C^{\alpha}$ ,  $C$ ,  $f_{\alpha}$  e  $S$  os tensores constitutivos da inclusão e da matriz, a fração volumétrica da inclusão e o tensor de Eshelby, respectivamente.

## 1.3 Modelo de Mori-Tanaka

O modelo de Mori-Tanaka considera um compósito de  $N$  fases e aproxima o efeito da interação entre as fases assumindo que a tensão em cada fase é igual à tensão em uma

inclusão singular (envolta na matriz) submetida a um campo de deformação médio aplicado na matriz. A Fig. 2 ilustra esse esquema para um compósito de duas fases.

A inclusão consiste de partículas elipsoidais que possuem a mesma forma, mas podem apresentar tamanhos diferentes, podendo estar alinhadas ou distribuídas aleatoriamente.

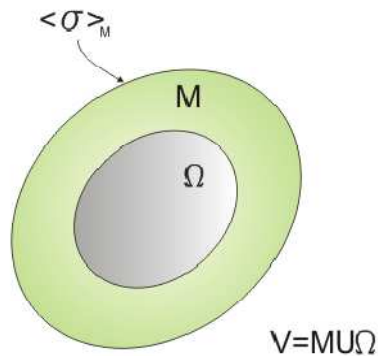


Figura 2 - Esquema ilustrativo de um modelo de duas fases.

Dado um compósito submetido a condições de contorno homogêneas, Benveniste (1987) propõe a seguinte expressão para a matriz de rigidez efetiva do compósito:

$$\bar{C} = [f_{\alpha} C^{\alpha} A_0^{dil} + (1 - f_{\alpha}) C] \tilde{A} \quad (4)$$

onde:

$$A_0^{dil} = [I + S(C)^{-1} (\bar{C} - C^{\alpha})]^{-1} \quad (5)$$

$$\tilde{A} = [f_{\alpha} A_0^{dil} + (1 - f_{\alpha}) I]^{-1} \quad (6)$$

onde,  $C_{\alpha}$  e  $C$  são os tensores constitutivos da inclusão e da matriz,  $f_{\alpha}$  é a fração volumétrica da inclusão e  $S$  é o tensor de Eshelby.

## 2 ERRO DE MODELAGEM

Muitos são os aspectos a serem considerados quanto à solução de um problema físico através do Método dos Elementos Finitos. Em se tratando de um método numérico aproximado, as fontes de erros são grandes e crescem à medida que o problema se torna mais complexo. Por isso, uma análise dinâmica requer mais atenção que uma análise estática, e uma análise não-linear, mais que uma linear.

Para se ter uma análise confiável, é necessário utilizar elementos bem comportados e com grau de refinamento adequado. Além disso, é importante conhecer bem o problema em estudo para fazer uso da modelagem correta e otimizada. Tudo isso, visando-se economizar tempo nas fases de entrada de dados, processamento e pós-processamento, como também diminuir o risco de erros nestas fases, obtendo-se um resultado com grau de precisão satisfatório.

O grau de precisão irá depender de vários fatores, tais como: eficiência do modelo para representar o comportamento do sistema; nível de discretização; tamanho do problema; técnicas numéricas utilizadas para resolver problemas específicos; e tipos de elementos finitos utilizados, dentre outros. O conhecimento das diversas fontes de erros é importante, pois pode-se minimizá-las nas várias fases de concepção e análise do problema. Os tipos de erros que mais influenciam neste trabalho de pesquisa são: erros numéricos e erros de modelagem.

Os erros numéricos ocorrem quando se utiliza uma malha inadequada que pode não representar muito bem, tanto a geometria do problema quanto sua solução (Figuras 3 e 4).

Além disso, pode-se ter, com uma discretização inadequada, uma má representação das condições de contorno, simulação de descontinuidades, etc. Nesse caso, a solução via MEF será incorreta para os objetivos que se destinava. Isso não é uma falha do método, e sim do seu modelo idealizado.

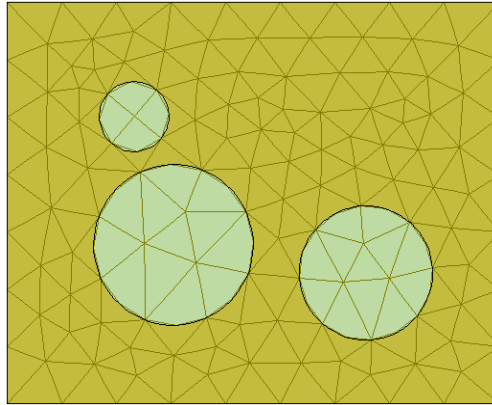


Figura 3 - Malha com má discretização.

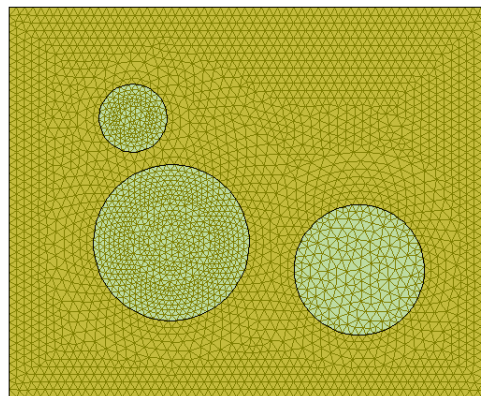


Figura 4 - Malha com boa discretização.

Na Figura 3 o número de elementos é bem menor que o número de elementos da malha representada na Figura 4, portanto a malha da Figura 4 tem melhor discretização, resultado e representação do problema estudado. Vale ressaltar que para aferir a qualidade da discretização utilizada nos modelos numéricos deve ser feito um estudo de convergência da solução do problema em questão. Porém o custo computacional torna-se maior à medida que o número de elementos aumenta.

O erro de modelagem ocorre quando utiliza-se a estratégia de homogeneização do material, que consiste em substituir a microestrutura real por outra homogeneizada e com propriedades efetivas equivalentes. Vale ressaltar que neste estudo são consideradas malhas de elementos finitos bastante discretizadas com o objetivo de eliminar o erro numérico devido à discretizações.

### 3 ESTIMATIVAS DE ERROS DE MODELAGEM

Segundo Santos Júnior (2008) analisar estruturas constituídas de materiais heterogêneos, em geral, é mais complexo do que em materiais homogêneos. Isso acontece devido à complexidade inerente à microestrutura do material, podendo nestes casos, utilizar análises

numéricas como o Método dos Elementos Finitos para a resolução do problema. Entretanto, muitas vezes essas soluções demandam alto custo computacional ou podem representar uma solução aproximada do problema bastante simplória. Para contornar o problema faz-se a substituição do material heterogêneo por outro homogêneo com propriedades efetivas equivalentes, já que a solução de problemas homogeneizados, em geral, pode ser encontrada com maior facilidade.

Para se obter um material homogêneo equivalente é feito um processo de homogeneização (Figura 5) que pode ser determinado através de modelos simplificados baseados em Regras de Mistura e os fundamentados no Teorema dos Campos Médios, tais como: Auto-Consistente, Mori-Tanaka, Voigt, Reuss, Hashin-Strikman, entre outros.

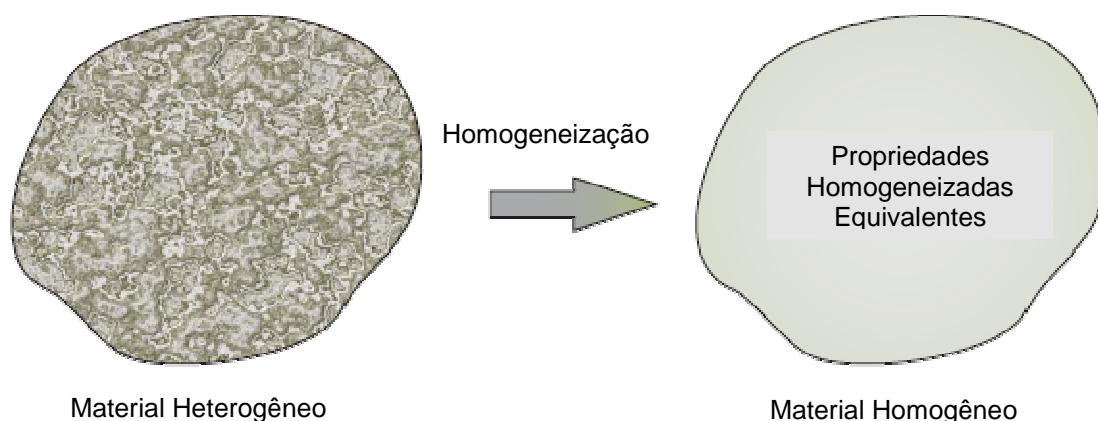


Figura 5 - Processo de homogeneização.

No entanto, ao se empregar tal processo de homogeneização, são introduzidos erros de modelagem, tais como os apresentados em Zohdi et al. (1996) e Oden & Vemaganti (2000). Desta forma, faz-se necessário o controle de tais erros para que os resultados da análise, embora aproximados, sejam representativos do problema real (Santos Júnior, 2008).

Segundo Santos Júnior (2008), o erro de modelagem pode ser calculado comparando-se a solução do problema em escala refinada com a solução do problema homogeneizado, conforme equação:

$$e^h = u - u^h \quad (7)$$

Onde  $e^h$ ,  $u$  e  $u^h$  são o erro de modelagem, o campo de deslocamentos do problema em escala refinada e o campo de deslocamentos do problema homogêneo equivalente, respectivamente.

Pode-se observar que o erro de modelagem está relacionado com a qualidade de homogeneização, quanto mais próximo o material homogeneizado é do material heterogêneo, pela Equação (7), menor o erro de modelagem. O valor de  $u^h$ , muitas vezes não pode ser determinado analiticamente, então é feita uma aproximação numérica pelo Método dos Elementos Finitos.

A medida de erro de modelagem calculada através da Equação (7) fornece o erro em termos de deslocamento em cada ponto do domínio do problema. Com o objetivo de quantificar o erro de modelagem global utiliza-se a norma energia de deformação que pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\|e^h\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\mathcal{B}(e^h, e^h)}, \quad (8)$$

$$\mathcal{B}(e^h, e^h) = \int_{\Omega} \nabla(u - u^h) : E \nabla(u - u^h) \quad (9)$$

onde o subscrito  $E(\Omega)$  indica que no cálculo da norma energia deve ser usado o tensor de elasticidade do material heterogêneo real em todo o domínio  $\Omega$ . E a forma bilinear  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$  corresponde a um produto interno definido sobre o espaço das funções admissíveis.

## 4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 4.1 Análise 1: Estudo de uma fração volumétrica representativa para o problema de Eshelby

Esta aplicação aborda o problema clássico de uma inclusão elástica envolvida por uma larga matriz submetida a um carregamento uniforme  $\sigma_{xx}=100\text{MPa}$  (Figura 6). Para uma matriz infinita, este problema consiste em um caso particular do problema de Eshelby (1957) e sua solução pode ser obtida através da teoria da elasticidade.

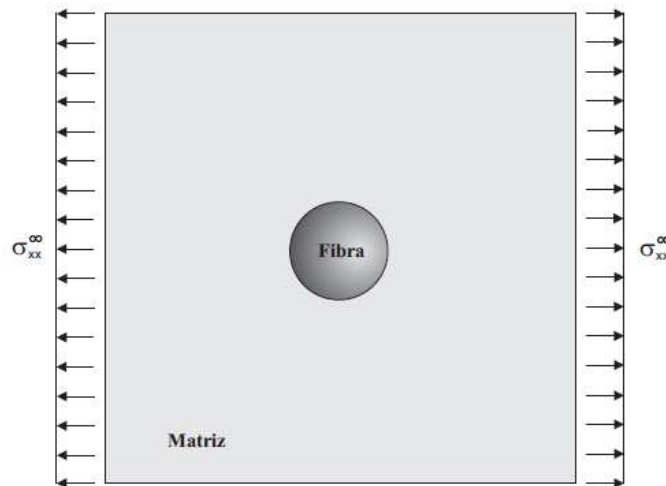


Figura 6 - Fibra circular envolvida por uma larga matriz submetida a um carregamento

Neste estudo, considera-se uma matriz de dimensões  $30 \times 30$  e uma circunferência com o raio variando segundo uma taxa de variação  $L = \Phi r$ , onde o objetivo é obter um raio para o qual seja possível representar numericamente o problema de Eshelby. Neste estudo procurou-se quantificar a magnitude da norma energia de deformação do problema homogeneizado obtido pelos modelos micromecânicos Auto-Consistente e Mori-Tanaka, confrontando o resultado com a norma energia de deformação do problema heterogêneo primitivo. Para tanto, fez-se o parâmetro  $\Phi$  variar de 2,5 a 25 (Tabela 1) em busca de um parâmetro pelo qual fosse possível estabelecer um raio da inclusão que representasse de forma satisfatória o problema de Eshelby.

$\Phi$	r	fração vol.
2,5	6,00	0,125664
5,0	3,00	0,031416
7,5	2,00	0,013963
10,0	1,50	0,007854
12,5	1,20	0,005027
15,0	1,00	0,003491
17,5	0,86	0,002565
20,0	0,75	0,001963
22,5	0,67	0,001551
25,0	0,60	0,001257

Tabela 1 - Dados de  $\Phi$ , do raio e da fração volumétrica da inclusão

Como o exemplo estudado tem dois eixos de simetria, foi analisado apenas um quarto do problema com uma discretização bastante refinada utilizando-se elementos finitos triangulares de 6 nós (Figura 7). Para a realização das análises numéricas, utilizou-se uma ferramenta computacional desenvolvida por Santos Júnior (2008) denominada MODERE (*Modeling Error Estimates*) capaz de quantificar o erro de modelagem em estruturas constituídas por materiais heterogêneos. Na referida ferramenta é possível determinar o erro de modelagem global utilizando-se diversos métodos de homogeneização para a obtenção das propriedades efetivas equivalentes.

Para a realização das análises numéricas, estabeleceu-se para o material constituinte do compósito as seguintes propriedades: Matriz - módulo de elasticidade  $E = 3,5$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,35$ ; Fibra como inclusão, com  $E = 250$  GPa e  $\nu = 0,2$ . Levando-se em consideração a simetria do problema, foram estabelecidas condições de contorno que representam tal simetria (Figura 7). Pode-se observar na Figura 7 que todos os raios já estão prescritos na malha sendo necessário somente mudar o material na área interna de cada raio, mantendo assim o mesmo número de elementos na discretização das malhas estudadas. Isto foi feito com o objetivo de manter a mesma malha para as diversas simulações, minimizando assim, o erro devido a discretização do modelo.

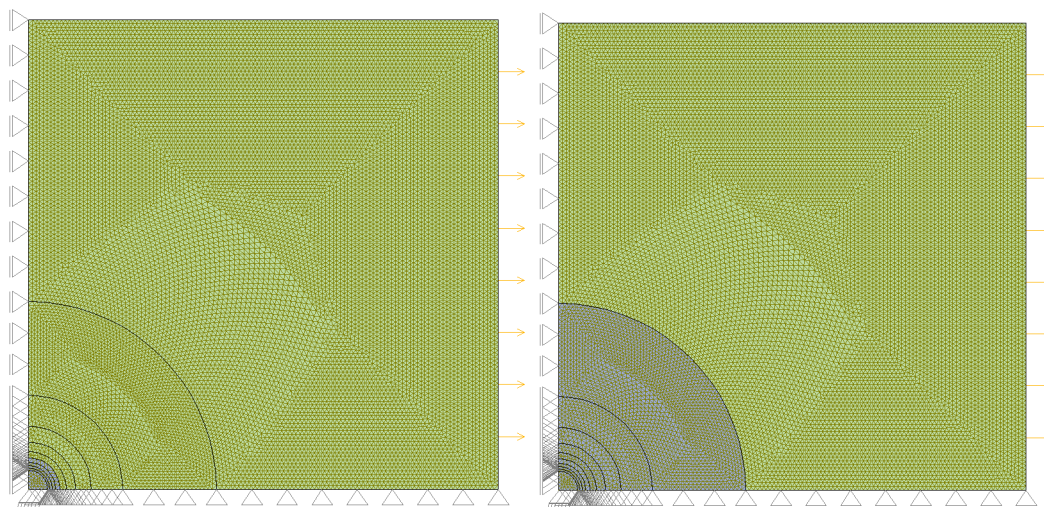


Figura 7 - Malhas de elementos finitos geradas pelo MTOOL e analisadas pelo MODERE.

Na Figura 8 estão representados os resultados das normas energias obtidas numericamente,



com o MODERE, para valores do parâmetro  $\Phi$  variando de 2,5 a 25,0. Nota-se que para  $\Phi = 20,0$  todos os métodos apresentam valores bem próximos. Sendo assim, pode-se dizer que para  $\Phi = 20,0$ , ou seja, para a dimensão do modelo 20 vezes a dimensão do raio o problema de Eshelby será representado de forma satisfatória.

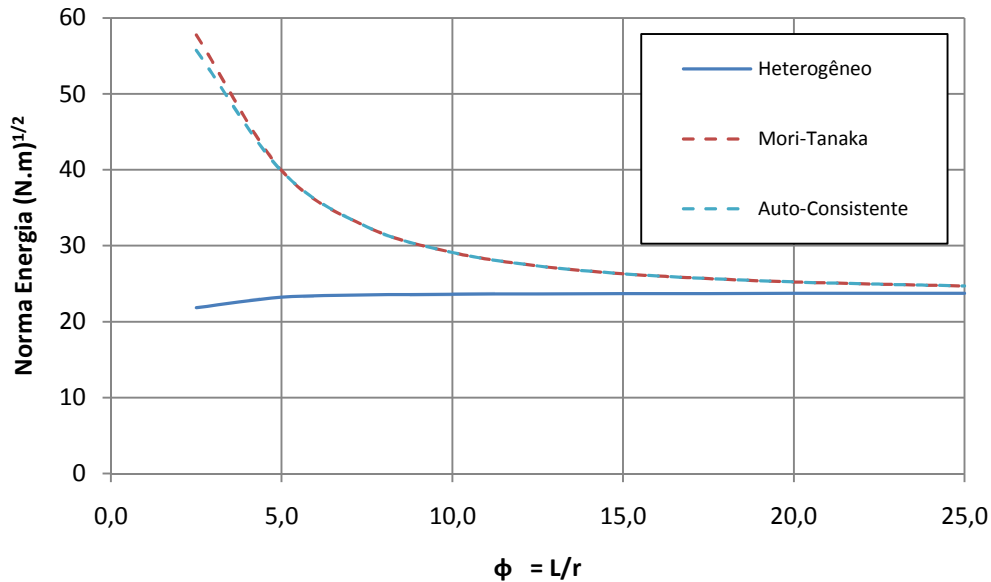


Figura 8 – Comportamento da malha em função de norma energia a medida que  $\Phi$  varia.

#### 4.2 Análise 2: Estudo paramétrico de compósitos reforçados por fibras

Existem várias formas de se distribuir as fibras nos materiais compósitos reforçados por fibras, dependendo de sua aplicação. As fibras podem ser distribuídas continuamente, descontinuamente, entrelaçadas como um tecido, ou em múltiplas direções como mostram as Figuras 9 e 10.

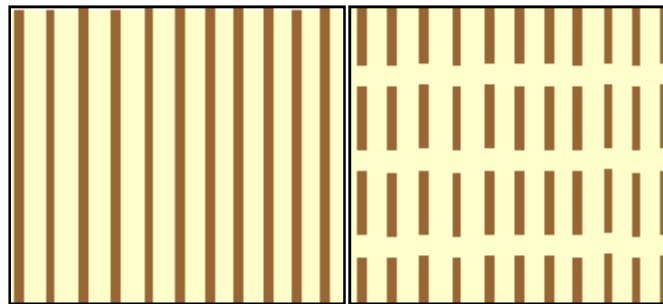


Figura 9 - Compósitos unidirecionais com fibras continua e descontinua.

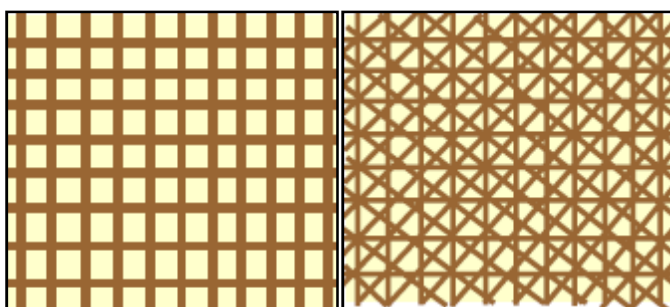


Figura 10 – Tecido com fibras contínuas e compósitos com fibras multidirecionais.

A resistência mecânica de compósitos reforçados por fibras depende de como as fibras estão orientadas em relação ao carregamento aplicado, assim como as propriedades micromecânicas efetivas desses materiais. Portanto, são necessários diferentes módulos de elasticidade para descrever as relações entre a tensão normal e a deformação específica normal, dependendo da forma de aplicação do carregamento. Em um material compósito reforçado as fibras podem estar organizadas regularmente ou aleatoriamente (Figura 11).

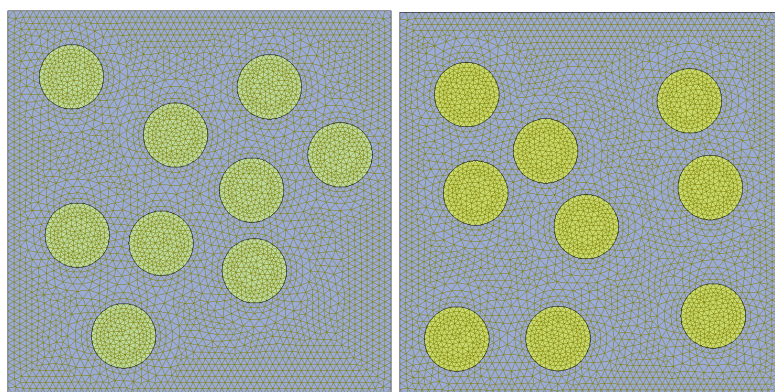


Figura 11 – Seção transversal de um material compósito com fibras dispostas paralelamente.

Esta aplicação tem o objetivo de se fazer um estudo paramétrico entre compósitos reforçados por fibras com as fibras distribuídas com disposição aleatória e com disposição regular.

Para a execução das análises foram utilizadas as mesmas propriedades do material e carregamento trabalhados na análise anterior. As frações volumétricas das fibras foram definidas segundo a Tabela 1 e foram adotadas, para o problema discutido, três frações volumétricas: as frações volumétricas que correspondem aos parâmetros  $\Phi = 2,5$ ,  $\Phi = 10$  e  $\Phi = 20$ .

Para cada fração volumétrica de inclusão foram geradas nove malhas formadas por elementos finitos triangulares de 6 nós com distribuição aleatória e uma com distribuição regular. E cada malha gerada foi homogeneizada através de dois métodos de homogeneização: Mori-Tanaka e Auto Consistente. Em seguida, foram feitas as análises do erro de modelagem em termos de norma energia e os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 12 - 14.

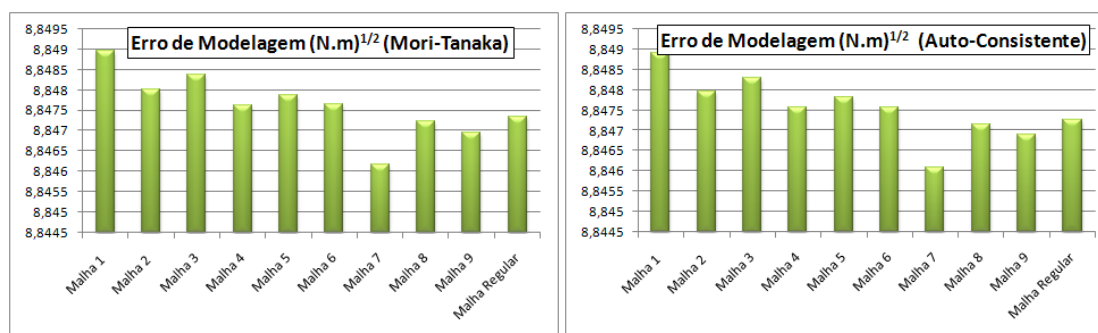


Figura 12 - Erro de modelagem usando os modelos de Mori-Tanaka e de Auto-Consistente com  $\Phi = 20$ .

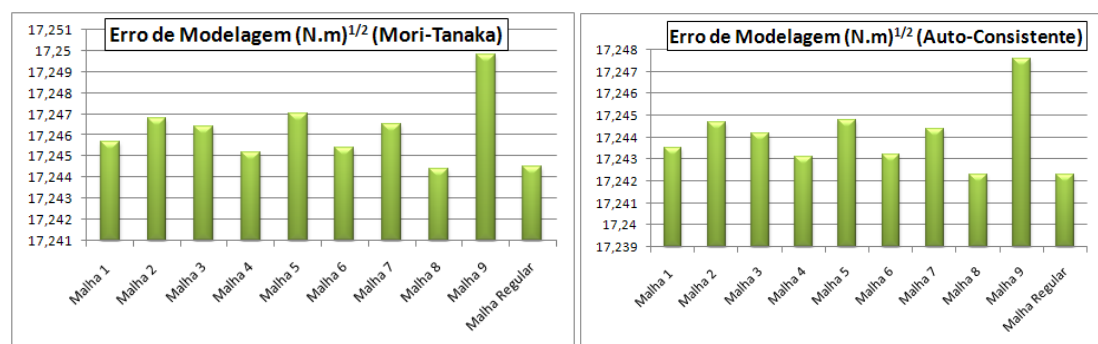


Figura 13 - Erro de modelagem usando os modelos de Mori-Tanaka e de Auto-Consistente com  $\Phi = 10$ .

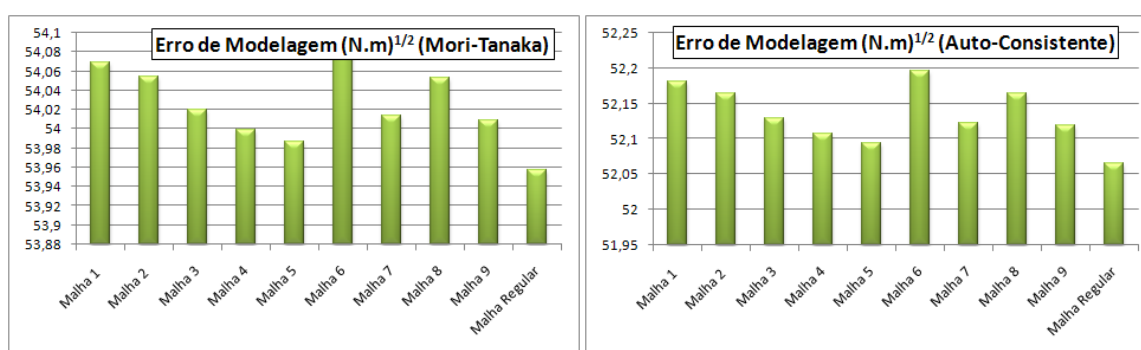


Figura 14 - Erro de modelagem usando os modelos de Mori-Tanaka e de Auto-Consistente com  $\Phi = 2,5$ .

Com os resultados obtidos verifica-se que para  $\Phi = 20$  que corresponde a uma fração volumétrica de fibras de 0,1963% e  $\Phi = 10$  que corresponde a uma fração volumétrica de fibras de 0,7854%, o erro de modelagem só é alterado na terceira casa decimal, ou seja, ocorre uma variação muito pequena do erro de modelagem. Então, pode-se afirmar que para estes casos estudados a distribuição das fibras não influencia no erro de modelagem em termos globais. Para a fração volumétrica de 12,5664% que equivale a  $\Phi = 2,5$  a variação do erro de modelagem já passa a ser na primeira casa decimal para cada malha, apesar de apresentar um erro de modelagem alto nos métodos empregados, a diferença do erro de modelagem entre as malhas com distribuição randômica e as com distribuição regular não foi tão acentuada; sendo a diferença máxima de 0,3% para os métodos de homogeneização utilizados. Vale ressaltar que neste trabalho não é abordado o cálculo do erro de modelagem local em termos de quantidades de interesse.

### 4.3 Análise 3: Estudo de um cilindro de FGM

Entre os materiais heterogêneos existem aqueles Materiais com Gradação Funcional, ou FGMs (*Functionally Graded Materials*), esse tipo de material se caracteriza por ser formado por dois materiais sendo que as faces são 100% de um material e a transição de uma face para outra é dada de forma gradativa, ou seja, as propriedades termomecânicas do material muda gradativamente ao longo da seção transversal. Os FGMs surgiram sobre tudo por conta da necessidade de um material que não tivesse uma variação brusca de suas propriedades termomecânicas, visto que outros materiais, como os materiais heterogêneos laminados, apresentavam a transição entre os materiais bem definidas e nesta parte apresenta-se alguns problemas. Um exemplo claro desses problemas ocorre quando há influência da temperatura, já que por suas propriedades térmicas serem diferentes, cada material se comporta de forma distinta, o que proporciona o surgimento de fissuras.

Salzar et al.(1996) se propuseram a uma metodologia para que a análise de um tubo em FGM (Figura 15) fosse feita utilizando um material laminado, ou seja, substituir o compósito FGM por outro não mais com a alteração gradativa, e sim constituído por laminas discretas homogeneizadas. Nesse procedimento naturalmente acontecem erros decorrentes da substituição do material real pelo laminado homogeneizado.

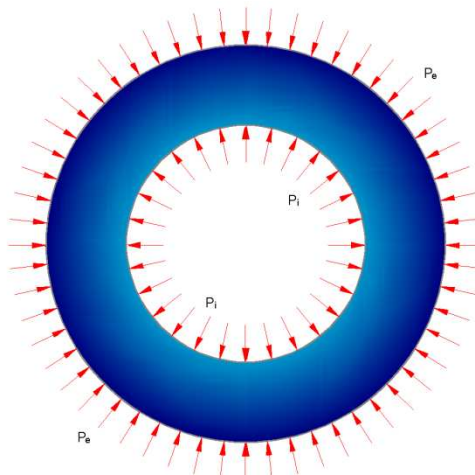


Figura 15 – Tubo em FGM.

Seguindo a metodologia usada por Salzar et al.(1996) foram realizadas duas aplicações para avaliar o erro de modelagem em FGM. Nesta primeira aplicação foi analisado um tubo de FGM com 1in de raio interno e 2in de raio externo (Figura 16). As constantes elásticas do material obedecem uma lei de variação definidas pelas equações a seguir:

$$E(r) = E_0 \cdot r^m \text{ e } \nu(r) = \nu_0 \quad (10)$$

onde  $E_0$  e  $\nu_0$  representam os valores de referência para o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, e  $m$  uma constante que define o grau da heterogeneidade do material.  $E_0$  e  $\nu_0$  têm valores  $4,35 \cdot 10^7$  psi e 0,2 respectivamente. Foi adotado um grau de heterogeneidade linear, portanto  $m = 1$ . É exercida sobre a parede interna do tubo uma pressão equivalente a 10000psi e uma pressão de 1000psi sobre a parede externa. O tubo foi dividido em lâminas homogêneas, como foi sugerido por Salzar et al.(1996), e foi analisado o erro de modelagem que ocorre quando o número de malhas é aumentado.

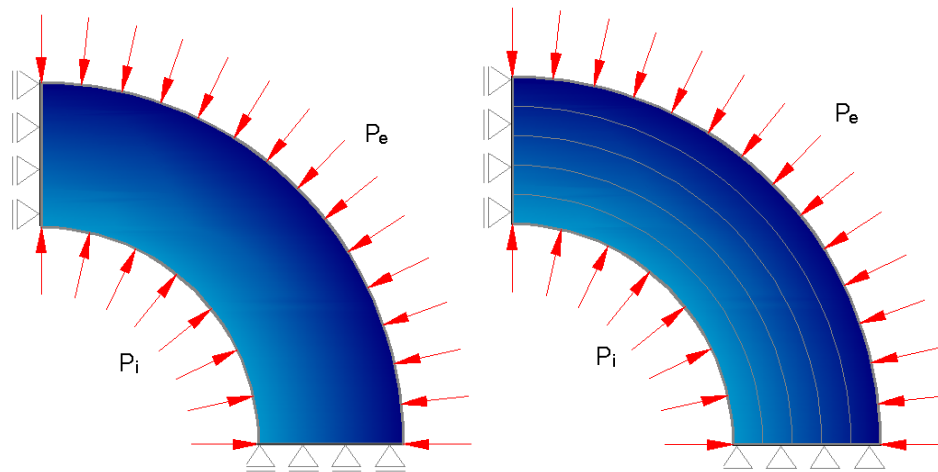


Figura 16 – Ilustração do material estudado.

Com os parâmetros do tubo definidos foi então determinada a malha de elementos finitos quadrangulares de 8 nós usada pra a análise do MODERE. A mesma estratégia de utilização de um quarto do material usada no exemplo da análise 1 foi utilizada nesse exemplo, tirando proveito da simetria do tubo para reduzir o tempo de processamento. O tubo foi subdividido em 100 elementos na direção radial e o número de elementos na direção circunferencial variam de 1 a 50.

Para a segunda aplicação, usaram-se as mesmas propriedades do tubo, porém o número de faixas foi fixado em 100 e variou-se o grau de heterogeneidade de 1 até 3 em intervalos de 0,5. Os resultados obtidos nessas análises estão nas Figuras 17 e 18.

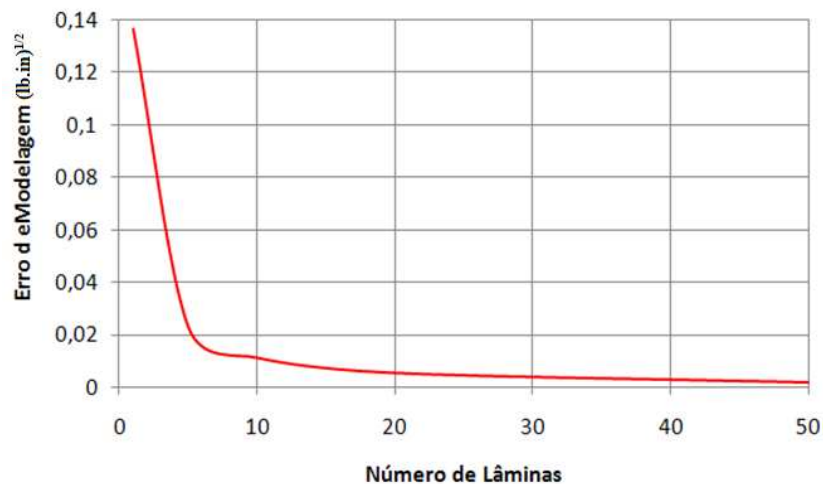


Figura 17 – Variação do erro de modelagem com o número de lâminas.

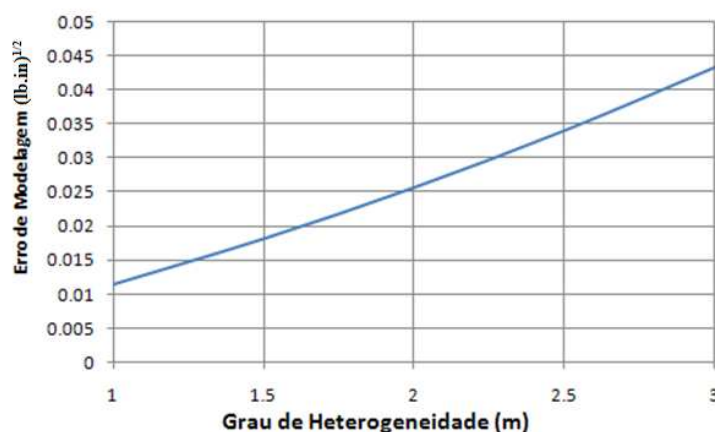


Figura 18 – Variação do erro de modelagem com o grau de heterogeneidade.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foram usados modelos da micromecânica para estudar o problema proposto por Eshelby, tentando avaliar o raio da inclusão que representasse bem este problema. Com os resultados obtidos verificou-se que para  $\Phi$  maior ou igual a 20,0 todos os modelos estudados se aproximaram bastante do modelo heterogêneo. Sendo assim,  $\Phi=20$ , é um bom estimador para o problema estudado.

Para o segundo problema estudado, pode-se observar que para os valores de  $\Phi$  usados nas análises, o tipo de distribuição das fibras, seja ela randômica ou regular, não influencia no erro de modelagem obtido para os modelos de homogeneização estudados. Porém quando  $\Phi = 2,5$  o erro de modelagem é bastante elevado.

Para o terceiro exemplo, observou-se que o erro de modelagem global é sensível ao número de camadas, de forma que este diminui ao passo que o número de camadas aumenta (Figura 17). Assim, colocando um número razoável de camadas, o laminado homogeneizado pode ser analisado em substituição ao FGM (material heterogêneo). Esse fato também é verificado em Santos Júnior (2008). Quanto ao grau de heterogeneidade, a variação desse parâmetro reflete diretamente no erro, de forma que este, como visto no gráfico da Figura 18 aumenta quando o grau de heterogeneidade aumenta.

## REFERÊNCIAS

- Benveniste, Y., 1987. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of materials*. North-Holland, v. 6, p. 147-157.
- Bornert, M., Bretheau, T. and Gilormini, P., 2001. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, I and II, Hermes-Science, Paris.
- Eshelby, J. D., 1957. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*. Proceedings royal society of London. London, A241, p. 376 - 396.
- Hori, M. and Nemat-Nasser, S., 1999. *On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids*. Mech. Mat., v. 31, p. 667-82.
- Oden, J. T.; Vemaganti, K. S., 2000. *Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials i. error estimates and adaptive algorithms*. Journal of Computational Physics, v. 164, n. 1, p. 22-47.
- Salzar, R. S.; Pindera, M. J.; Barton, F. W., 1996. *Elastoplastic analysis of layered metal matrix composite cylinders .2. numerical results*. Journal of Pressure Vessel Technology-Transactions of the Asme, v. 118, n. 1, p. 21-26.
- Santos Júnior, A., 2008. *Um Estudo sobre Estimativas de Erro de Modelagem em Estruturas*

*de Materiais Heterogêneos*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Alagoas, Alagoas.

Zohdi, T. I.; Oden, J. T.; Rodin, G. J., 1996. *Hierarchical modeling of heterogeneous bodies*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 138, n. 1-4, p. 273–298.