

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS HETEROGÊNEOS

Maicon R. Correa^a e Márcio R. Borges^b

^a*Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil, mrcorrea@ice.ufjf.br*

^b*Coordenação de Mecânica Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica, Brasil, mrborges@lncc.br*

Palavras Chave: Métodos Numéricos, escoamentos em Meios Porosos, Meios Porosos Heterogêneos

Resumo. Neste trabalho apresentamos uma metodologia numérica localmente conservativa para a simulação computacional do escoamento bifásico (água e óleo) em um reservatório rígido altamente heterogêneo. Este problema é modelado por um sistema de equações diferenciais parciais, basicamente composto por um subsistema elíptico para a determinação do campo de velocidades e uma equação hiperbólica não linear para o transporte das fases que escoam (equação da saturação). Do ponto de vista numérico, propomos a aplicação de um método de elementos finitos localmente conservativo para a velocidade da mistura e um método de volumes finitos não-oscilatório de alta ordem, baseado em esquemas centrais, para a equação de hiperbólica não-linear que governa a saturação das fases. Simulações numéricas serão apresentadas para ilustrar as características de precisão e estabilidade da metodologia proposta.

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de modelos matemáticos e métodos computacionais para a simulação de escoamentos em meios porosos é um tema de grande interesse devido à sua aplicação em diversas áreas da engenharia e ciências aplicadas. Em relação à Engenharia do Petróleo, a otimização dos processos de recuperação de hidrocarbonetos está intimamente relacionada com a simulação precisa destes processos. Para tanto, a troca de massa e momento linear das fases que escoam, suas relações de capilaridade e mobilidade, a ocorrência de deformações na matriz porosa, a estabilidade dos poços de produção e injeção, dentre inúmeros outros, devem ser adequada e precisamente considerados nos modelos físico-matemáticos e numéricos.

Uma importante característica, em tais modelos, é a alta heterogeneidade dos campos de permeabilidade e de porosidade do reservatório (Borges et al., 2008, 2009). Naturalmente a metodologia numérica empregada deve ser capaz de capturar fenômenos tais como o surgimento de “dedos” na região de mistura, no processo de extração secundária, devido à heterogeneidade do meio e aos efeitos de não-linearidade resultantes da diferença entre as mobilidade das fases (Ribeiro, 2007; Abreu et al., 2009; Malta et al., 2000). Do ponto de vista numérico, a representação precisa deste fenômeno exige o desenvolvimento de novos esquemas computacionais capazes de simular a interação entre os acoplamentos fluido-mecânicos e a heterogeneidade da formação. Em particular, tais esquemas numéricos devem ser capazes de lidar com coeficientes heterogêneos descontínuos e de preservar propriedades de conservação locais.

Neste sentido, neste trabalho apresentamos uma metodologia numérica localmente conservativa para a simulação computacional do escoamento bifásico (água e óleo) em um reservatório rígido altamente heterogêneo. Este problema é modelado por um sistema de equações diferenciais parciais, basicamente composto por um subsistema elíptico para a determinação do campo de velocidades e uma equação hiperbólica não-linear para o transporte das fases que escoam (equação da saturação). Do ponto de vista numérico, propomos a aplicação de um método de elementos finitos localmente conservativo para a velocidade da mistura e desenvolvemos um método de volumes finitos não-oscilatório de alta ordem, baseado em esquemas centrais, para a equação de hiperbólica não-linear que governa a saturação das fases. Simulações numéricas serão apresentadas para ilustrar as características de precisão e estabilidade da metodologia proposta.

2 O PROBLEMA MODELO

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ ($n_{sd} = 1, 2$ ou 3) um domínio limitado com contorno regular $\partial\Omega = \Gamma$ de normal exterior \mathbf{n} representando um meio poroso rígido, no qual ocorre o escoamento de duas fases incompressíveis e imiscíveis, denotadas por $\alpha = w$ (água) e $\alpha = o$ (óleo), e $T > 0$ um número fixo. A lei de conservação da massa da fase α , no caso de ausência de troca de massa entre as fases e de fontes externas, é escrita como

$$\phi \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}_\alpha = 0 \quad (1)$$

onde $\phi : \Omega \rightarrow (0, 1)$ é a porosidade, $s_\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow [s_\alpha^{\min}, s_\alpha^{\max}] \subset [0, 1]$ é a saturação da fase α , satisfazendo a relação

$$\sum_{\alpha=w,o} s_\alpha = 1, \quad (2)$$

e $\mathbf{v}_\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{sd}}$ é a velocidade de Darcy da fase. Esta velocidade mede o fluxo da fase no meio poroso e é dada, no caso bifásico, pela lei

$$\mathbf{v}_\alpha = -k \frac{k_{r\alpha}(s_\alpha)}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha$$

onde $k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a permeabilidade intrínseca do meio poroso, $k_{r\alpha} : \text{Im}(s_\alpha) \rightarrow (0, 1)$ é a permeabilidade relativa da fase α , $\mu_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ sua viscosidade e $p_\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ a pressão que atua na fase. Utilizaremos também o conceito de mobilidade da fase, $\lambda_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida como a razão

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}(s_\alpha)}{\mu_\alpha}.$$

Neste trabalho, assumimos que a pressão nas fases é a mesma, ou seja $p_\alpha = p$ (para $\alpha = w, o$), o que equivale a considerar a pressão capilar nula. Com isso, tomando $s = s_w$, a velocidade da mistura $\mathbf{v} = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}_o$ pode ser escrita em termos da pressão p como

$$\mathbf{v} = -k\lambda(s)\nabla p$$

onde $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$ é a mobilidade total da mistura. A relação entre a velocidade da mistura e a velocidade das fases é dada pela função fracionária de fluxo

$$f_\alpha(s) = \frac{\lambda_\alpha(s)}{\lambda(s)}$$

através da relação

$$\mathbf{v}_\alpha = f_\alpha(s)\mathbf{v}.$$

2.1 O Sistema Acoplado

Por simplicidade, neste trabalho consideramos o caso bidimensional ($n_{sd} = 2$). O problema modelo para o escoamento bifásico no meio poroso rígido pode ser então estabelecido como:

Problema: Encontrar a pressão $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, a velocidade de Darcy da mistura $\mathbf{v} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a saturação da água $s : \Omega \times [0, T] \rightarrow (0, 1)$ tais que

$$\mathbf{v} = -k\lambda(s)\nabla p \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (4)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} [f_w(s)\mathbf{v}] = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (5)$$

satisfazendo a condição de contorno

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (6)$$

$$p = \bar{p} \quad \text{sobre } \Gamma_p \quad (7)$$

onde $\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_p$, e a condição inicial $s(\mathbf{x}, 0) = s_0(\mathbf{x})$.

onde a equação (4) representa a conservação de massa da mistura, dada pela soma da equação (1) escrita para as fases água e óleo.

2.2 Os Problemas da Velocidade e da Saturação

O problema modelo pode ser visto como um subsistema elíptico, formado pelas equações (3) e (4), acoplado a uma lei de conservação de natureza hiperbólica (5). No contexto de escoamentos em meios porosos, o subsistema elíptico é usualmente denominado problema de Darcy e a equação hiperbólica é denominada equação da saturação. Do ponto de vista numérico, utilizamos o fato de que a escala de tempo do problema elíptico é maior do que a do problema hiperbólico, e adotamos uma estratégia de desacoplamento no tempo, onde um passo evolutivo do sistema é dado da seguinte forma:

- (i) Dado um campo de saturações, determinar a dinâmica do escoamento através do cálculo do campo de velocidades (resolução do Problema de Darcy)
- (ii) Fixado o campo de velocidades, determinar o transporte (resolução da equação da Saturação) até o fim do passo.

Assim os passos seguem sucessivamente até o instante final da simulação. Neste contexto, é natural o emprego de métodos numéricos distintos para os problemas da velocidade e da saturação, o que será descrito nas Seções 3 e 4, respectivamente.

3 MÉTODO NUMÉRICO PARA O PROBLEMA DE DARCY

O subproblema da velocidade, em sua representação contínua, pode ser escrito como:

Problema de Darcy: Dada a saturação no instante t^n , $s^n = s(t^n)$, e denotando $\lambda = \lambda(s^n)$, calcular a velocidade e a pressão tais que

$$\mathbf{v} = -k\lambda\nabla p \quad \text{em } \Omega \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (9)$$

satisfazendo as condições de contorno (6) e (7).

Do ponto de vista da aproximação numérica, apesar da aparente simplicidade deste sistema, escoamentos em meios anisotrópicos e heterogêneos representam uma área de pesquisa de grande interesse da análise numérica e modelagem computacional (Cordes e Kinzelbach, 1992; Durlofsky, 1994; Nakshatrala et al., 2006; Correa e Loula, 2007b; Loula et al., 2008; Correa e Loula, 2008). Aproximações por elementos finitos para o sistema de Darcy são essencialmente baseadas em formulações em um único campo para a pressão (equação de Poisson) e em formulações mistas para a velocidade e a pressão.

A principal característica dos métodos de elementos finitos mistos é o uso de diferentes espaços de aproximação para a pressão e a velocidade, requerendo uma condição de compatibilidade entre estes eles (Brezzi, 1974), o que reduz a flexibilidade na escolha de espaços de elementos finitos estáveis. Uma aproximação bem sucedida para o escoamento em um meio poroso é a formulação mista dual desenvolvida por Raviart e Thomas (Raviart e Thomas, 1977), utilizando espaços de elementos finitos vetoriais baseados no operador divergente para a velocidade, combinados com espaços Lagrangianos descontínuos para o potencial. Para contornar esta condição de compatibilidade, diversos métodos de elementos finitos estabilizados vêm sendo desenvolvidos (eg. Loula e Toledo, 1988; Masud e Hughes, 2002; Loula e Correa, 2006; Correa e Loula, 2008, 2007a; Barrenechea et al., 2007; Brezzi et al., 2005; Hughes et al., 2006).

Neste trabalho aproximamos o Problema de Darcy através de uma formulação de elementos finitos posta unicamente em termos da velocidade, onde introdução de uma pequena compressibilidade permite a eliminação da variável associada à pressão. Tal formulação é livre de condições de compatibilidade, sendo descrita a seguir.

3.1 Formulação Variacional

Para estabelecer a formulação variacional que será utilizada como base para a construção do método dos elementos finitos que empregaremos na resolução do problema de Darcy, admitimos uma pequena “compressibilidade” no sistema e buscamos a velocidade \mathbf{v}_ε e a pressão p_ε tais que

$$\mathbf{v}_\varepsilon = -k\lambda\nabla p_\varepsilon \quad \text{em } \Omega \quad (10)$$

$$\text{div } \mathbf{v}_\varepsilon = -\varepsilon p_\varepsilon \quad \text{em } \Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (12)$$

$$p_\varepsilon = \bar{p} \quad \text{sobre } \Gamma_p \quad (13)$$

onde ε é um parâmetro pequeno. Multiplicando a equação (10) por uma função \mathbf{w} pertencente ao espaço $\mathcal{V} = \{\mathbf{w} \in H(\text{div}); \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_v\}$ e integrando por partes, temos:

$$\frac{1}{k\lambda} \int_{\Omega} \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} p_\varepsilon \text{div } \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_\varepsilon \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0. \quad (14)$$

Utilizando as condições de contorno e o fato de que

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \text{div } \mathbf{v}_\varepsilon,$$

reescrevemos a equação (14) como o seguinte problema variacional, posto unicamente em termos da velocidade:

Formulação com Compressibilidade : Encontrar a velocidade $\mathbf{v}_\varepsilon \in \bar{\mathcal{V}}$ tal que

$$\frac{1}{k\lambda} \int_{\Omega} \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_\varepsilon \text{div } \mathbf{w} \, d\Omega = - \int_{\Gamma_p} \bar{p} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \quad (15)$$

onde definimos o conjunto $\bar{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \text{ sobre } \Gamma_v\}$. Da equação (15) vemos que o inverso da compressibilidade atua como uma penalização sobre o divergente. É possível mostrar que a solução penalizada \mathbf{v}_ε converge para a solução original, com dependência linear do parâmetro ε (Girault e Raviart, 1986).

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H(\text{div})} \leq C_\varepsilon \varepsilon. \quad (16)$$

3.2 Método dos Elementos Finitos

Para a construção do método dos elementos finitos, utilizaremos o espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas de mais baixa ordem para a velocidade (Raviart e Thomas, 1977; Brezzi e Fortin, 1991). As funções base desse espaço são especialmente desenvolvidas para a aproximação de funções no espaço $H(\text{div}, \Omega)$, possuindo incógnitas associadas aos lados dos elementos. No caso do cálculo de campos de velocidade, o emprego desse espaço conduz a soluções que fornecem continuidade da componente da velocidade normal à face de cada elemento, conforme indica a Figura 1 e que permitem a descontinuidade da componente tangencial, típica do campo de velocidade em meios heterogêneos. Assim, denotando por \mathcal{V}_h o espaço de Raviart-Thomas para a velocidade, temos o seguinte método dos elementos finitos para o Problema de Darcy:

Encontrar a velocidade $\mathbf{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}_h$ tal que

$$\frac{\mu}{k} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_h \text{ div } \mathbf{w}_h \, d\Omega = - \int_{\Gamma_p} \bar{p} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h. \quad (17)$$

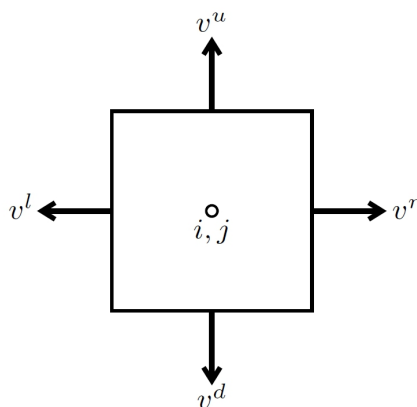


Figura 1: Incógnitas associadas ao elemento de Raviart-Thomas.

Para o uso de funções de Raviart-Thomas, é bem conhecido que a velocidade aproximada converge linearmente para a solução do problema, com relação ao parâmetro de malha h , ou seja

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_h\|_{H(\text{div})} \leq C_h h. \quad (18)$$

Com isso, temos a convergência da solução aproximada para a solução do problema original dada por

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{H(\text{div})} \leq C(\varepsilon + h). \quad (19)$$

4 MÉTODO NUMÉRICO PARA A EQUAÇÃO DA SATURAÇÃO

Da mesma forma que apresentamos o problema de Darcy, podemos apresentar o problema da saturação, definido sobre um intervalo de tempo (t^n, t^{n+1}) , como

Problema da Saturação: Dada a velocidade \mathbf{v} no instante t^n , calcular o campo de saturações s tal que

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \mathbf{f}(s) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (t^n, t^{n+1}) \quad (20)$$

satisfazendo a condição inicial $s(\mathbf{x}, t^n) = s^n$.

No desenvolvimento deste trabalho, consideramos o caso geral onde a função de fluxo é dada por

$$\mathbf{f}(s) = \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \end{bmatrix}$$

cujos casos particulares $\mathbf{f}(s) = f_w(s)\mathbf{v}$ modela o escoamento bifásico. Dentre a vasta gama de métodos para a aproximação de leis de conservação não-lineares (ver [LeVeque, 2002](#)), tais como a equação (20), focamos neste trabalho sobre o método de volumes finitos de alta ordem de [Kurganov e Tadmor \(2000\)](#), que consiste em um esquema central de alta resolução que apresenta baixa dissipação numérica, podendo ser escrito através de uma formulação semidiscreta, contínua no tempo. Em seguida construímos uma variação deste método, incorporando a heterogeneidade do campo de porosidade ϕ , fundamental para a simulação de meios porosos altamente heterogêneos. Tal extensão permite ainda a consideração de campos de porosidade variáveis com o tempo, comuns na simulação de meios porosos deformáveis ([Murad e Loula, 1992](#); [Murad et al., 1996](#)).

4.1 Esquemas Centrais de Alta Ordem

Seja uma discretização do domínio Ω em volumes $\mathcal{C}_{i,j} = \mathcal{C}_i \times \mathcal{C}_j$, onde $\mathcal{C}_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ é um intervalo com comprimento Δx na direção x e $\mathcal{C}_j = (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ é um intervalo com comprimento Δy na direção y . Consideramos $\phi(x)$ como sendo uma função constante por partes, variando de volume para volume

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_{i,j} \quad \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_{i,j},$$

e denotamos por $S_{i,j}^n$ uma aproximação para a média da saturação sobre o volume $\mathcal{C}_{i,j}$ no instante t^n . Uma base para a construção de diversos esquemas numéricos do tipo de Godunov para leis de conservação é o algoritmo REA (Reconstruct, Evolve, Average), consistindo basicamente nas seguintes etapas:

Reconstruct-Evolve-Average (REA)

- **Reconstrução:** A partir dos valores médios sobre as células $S_{i,j}^n$, reconstrua uma função polinomial por partes definida para todo \mathbf{x}
- **Evolução:** Evolua a equação hiperbólica de forma exata ou aproximada com os dados iniciais estabelecidos no passo anterior e obtenha $S_{\mathcal{D}_{i,j}}^{n+1}$ após o intervalo de tempo transcorrido Δt , onde $\mathcal{D}_{i,j}$ designa uma célula de um novo domínio.
- **Projeção:** Projete $S_{\mathcal{D}_{i,j}}^{n+1}$ (ou sua reconstrução) sobre cada célula da malha original para obter os novos valores médios $S_{i,j}^{n+1}$.

Reconhecido como protótipo dos esquemas centrais, o método de Lax-Friedrichs ([Lax, 1954](#)) possui estrutura simples, onde não é necessária a resolução de problemas de Riemann para a avaliação do transporte. No contexto do algoritmo REA, este método pode ser derivado utilizando as funções constantes por partes $S_{i,j}^n$, onde a evolução é realizada sobre a malha dual (malha centrada nos nós)

$$\bar{\mathcal{C}}_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1}).$$

A Figura 2 ilustra o esquema de Lax-Friedrichs (LxF) em uma dimensão. Apesar de sua simplicidade, a excessiva dissipação numérica introduzida, de ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2/\Delta t)$, compromete

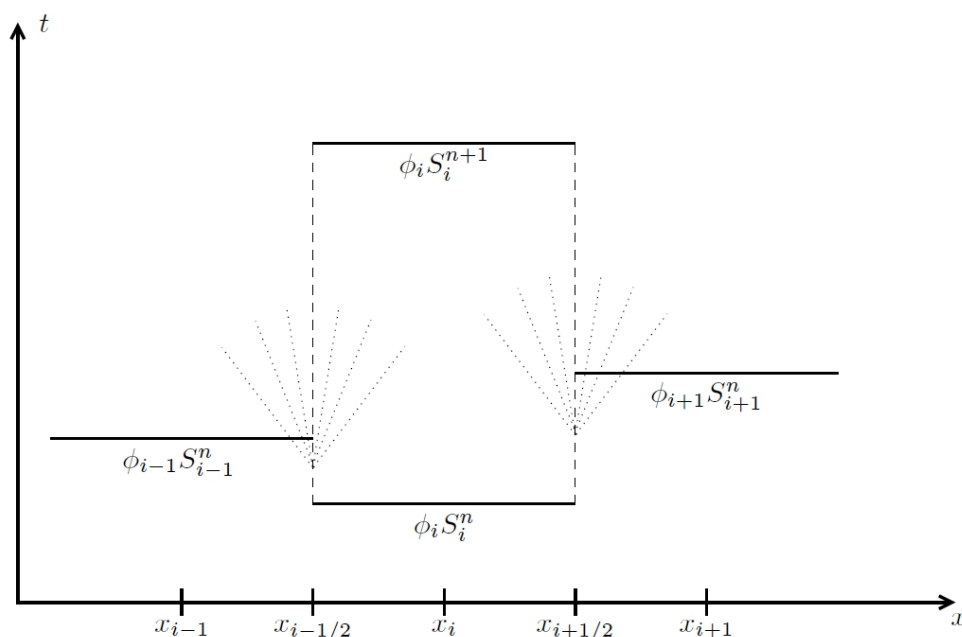


Figura 2: Esquema de Lax-Friedrichs.

fortemente a representação de ondas de choque e rarefação. Uma alternativa para reduzir tal dissipação, é o emprego de esquemas de alta ordem, tal como o desenvolvido por [Nessyahu e Tadmor \(1990\)](#), onde as aproximações (de primeira ordem) constantes por partes do esquema LxF são substituídas por aproximações (de segunda ordem) lineares por partes do tipo MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) reconstruídas a partir de tais valores constantes, através de uma expressão da forma

$$L_{i,j}^n(\mathbf{x}) = S_{i,j}^n + (S_x^n)_{i,j} (x - x_i) + (S_y^n)_{i,j} (y - y_j) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_{i,j} \quad (21)$$

onde as derivadas discretas $(S_x^n)_{i,j}$ e $(S_y^n)_{i,j}$ satisfazem

$$(S_x^n)_{i,j} = \left. \frac{\partial S^n}{\partial x} \right|_{(x_i, y_j)} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad \text{e} \quad (S_y^n)_{i,j} = \left. \frac{\partial S^n}{\partial y} \right|_{(x_i, y_j)} + \mathcal{O}(\Delta y). \quad (22)$$

Para garantir a conservação, as funções (21) são construídas de modo a satisfazer a relação

$$\frac{1}{|\mathcal{C}_{i,j}|} \int_{\mathcal{C}_{i,j}} L_{i,j}^n(\mathbf{x}) d\Omega = S_{i,j}^n$$

onde $\mathcal{C}_{i,j} = \Delta x \Delta y$. Assim como o esquema LxF, o método de Nessyahu-Tadmor (NT) é obtido pela evolução sobre a malha dual $\bar{\mathcal{C}}_{i,j}$. Sob certas limitações de CFL, o método satisfaz a propriedade de diminuição da variância total (TVD, ver [Nessyahu e Tadmor \(1990\)](#)). Por ser de segunda ordem, o esquema NT possui dissipação numérica $\mathcal{O}(\Delta x^4 / \Delta t)$, consideravelmente menor do que a do esquema LxF. Contudo, isto não contorna as dificuldades com passos de tempo pequenos que surgem, por exemplo, por restrições do tipo CFL.

Uma possibilidade para superar essa dificuldade é utilizar uma formulação semidiscreta (contínua no tempo e discreta no espaço), que pode ser acoplada a uma método para resolução de sistemas equações diferenciais adequado (os métodos LxF e NT não admitem formulações

semidiscretas). Neste sentido Kurganov e Tadmor (2000) apresentaram um esquema central que usa mais precisamente as informações sobre as velocidades de propagação nas faces dos volumes, permitindo calcular o passo de evolução não sobre as células da malha dual (de dimensão fixa), mas sim sobre novas células, de tamanho proporcional a tais velocidades, como indica a Figura 3. Com isso, as médias são tomadas sobre leques de Riemann de tamanhos variados, o que permite, no limite $\Delta t \rightarrow 0$, reescrever o esquema de diferenças como um sistema de equações diferenciais. Esta formulação semidiscreta possui dissipação numérica $\mathcal{O}(\Delta x^3)$ (Kurganov e Tadmor, 2000), não padecendo da excessiva dissipação presente no método NT quando passos de tempo pequenos são empregados. Comparações entre os esquemas NT e de Kurganov-Tadmor (KT) na simulação de escoamentos bifásicos em meios porosos com permeabilidade intrínseca heterogênea, podem ser encontradas, por exemplo em Ribeiro (2007); Abreu et al. (2009).

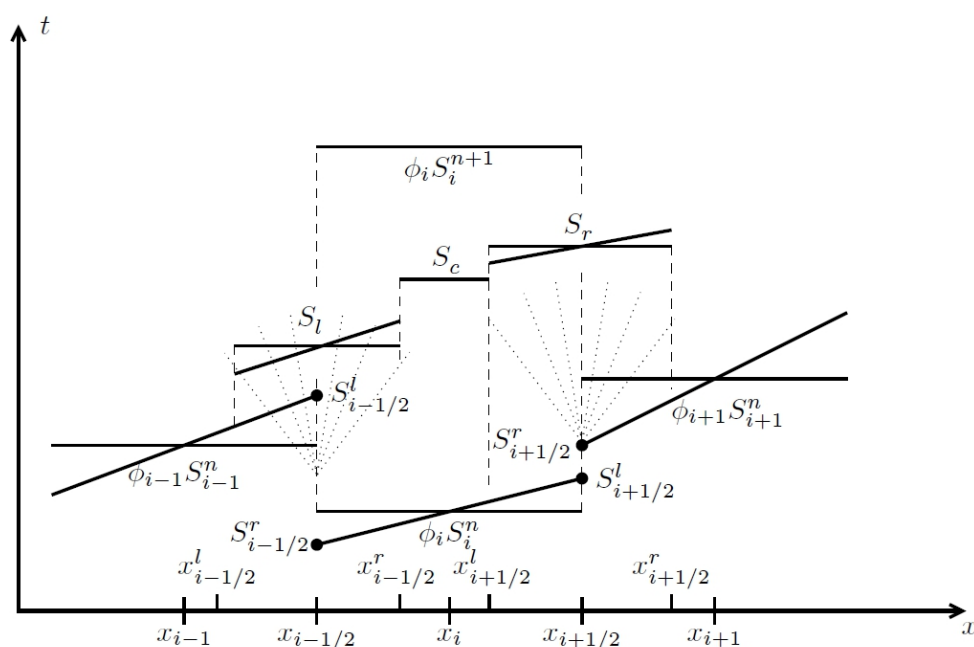


Figura 3: Esquema de Kurganov-Tadmor.

O método KT foi desenvolvido para leis de conservação não-lineares da forma da equação (20), sem a função ϕ . Sua extensão para o caso em que ϕ é uma função constante é imediata. Contudo, até o momento, não está estabelecida na literatura uma extensão da formulação para o caso onde $\phi = \phi(\mathbf{x})$, ou seja, para o caso em que a porosidade é função da posição. Tal formulação é de suma importância para a simulação de meios porosos heterogêneos, bem como para a consideração de campos de porosidade variáveis com o tempo, comuns na simulação de meios porosos deformáveis (Murad e Loula, 1992; Murad et al., 1996). Neste sentido, desenvolvemos na próxima seção uma extensão da formulação de Kurganov e Tadmor (2000) para o caso de porosidade variável.

4.2 Um Esquema Central de Alta Ordem Para o Caso de Porosidade Variável

Para a dedução do esquema central de alta ordem que será utilizado na simulação de meios porosos heterogêneos com a permeabilidade e a porosidade variáveis, utilizaremos o algoritmo REA. Os índices l, r, u e d serão utilizados tanto para representar os volumes à esquerda, à

direita, superior e inferior ao volume central (designado pelo índice c), respectivamente, quanto para representar os lados deste volume. A notação que será introduzida ao longo da dedução explicitará qual dos dois casos está representado.

4.2.1 Reconstrução

As aproximações lineares por partes são construídas, a partir das médias sobre cada volume, com base na equação (21). Para o cálculo das derivadas numéricas, foram utilizados os limitadores MinMod

$$(S_x^n)_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta x} \text{MM} \left\{ \alpha(S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n), \frac{1}{2}(S_{i+1,j}^n - S_{i-1,j}^n), \alpha(S_{i+1,j}^n - S_{i,j}^n) \right\} \quad (23)$$

$$(S_y^n)_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \text{MM} \left\{ \alpha(S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n), \frac{1}{2}(S_{i,j+1}^n - S_{i,j-1}^n), \alpha(S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n) \right\} \quad (24)$$

onde

$$\text{MM}\{a, b\} = \text{MinMod}\{a, b\} = \frac{1}{2} [\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)] \cdot \min(|a|, |b|) \quad (25)$$

e o parâmetro α varia entre o valor $\alpha = 1$, que corresponde ao limitador MinMod básico (o valor central é descartado), e valores dependentes de condições CFL. Em geral, o valor $\alpha = 2$ é tomado como limite superior (Nessyahu e Tadmor, 1990; Kurganov e Tadmor, 2000).

4.2.2 Evolução

Para a definição da malha auxiliar sobre a qual se dá o passo evolutivo, é necessário obter informações sobre a velocidade de propagação nas faces do volume. Iniciamos com a definição da saturação nas faces:

$$\begin{aligned} S_l^+ &= L_{i,j}^n(x_{i-1/2}, y_j) & S_l^- &= L_{i-1,j}^n(x_{i-1/2}, y_j) \\ S_r^+ &= L_{i+1,j}^n(x_{i+1/2}, y_j) & S_r^- &= L_{i,j}^n(x_{i+1/2}, y_j) \\ S_d^+ &= L_{i,j}^n(x_i, y_{j-1/2}) & S_d^- &= L_{i,j-1}^n(x_i, y_{j-1/2}) \\ S_u^+ &= L_{i,j+1}^n(x_i, y_{j+1/2}) & S_u^- &= L_{i,j}^n(x_i, y_{j+1/2}). \end{aligned}$$

onde os índices representam as faces do volume central. Assim, podemos avaliar as velocidades de propagação, através de

$$\begin{aligned} a_l^+ &= \frac{1}{\phi_c} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_l^+} & a_l^- &= \frac{1}{\phi_l} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_l^-} & a_r^+ &= \frac{1}{\phi_r} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_r^+} & a_r^- &= \frac{1}{\phi_c} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_r^-} \\ a_d^+ &= \frac{1}{\phi_c} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_d^+} & a_d^- &= \frac{1}{\phi_d} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_d^-} & a_u^+ &= \frac{1}{\phi_u} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_u^+} & a_u^- &= \frac{1}{\phi_c} \frac{df}{ds} \Big|_{s=S_u^-} \end{aligned}$$

onde ϕ_β é a porosidade avaliada no volume β ($\beta = c, l, r, u, d$). A velocidade de propagação na face β é então definida como

$$a_\beta = \max \{ |a_\beta^-|, |a_\beta^+| \}. \quad (26)$$

Assumindo que esta velocidade é constante para cada passo no tempo, temos que a informação que parte da face esquerda, por exemplo, percorre a metade da célula na direção x em um tempo dado por

$$\Delta t_l = \frac{\Delta x}{2a_l}.$$

Estendendo este raciocínio para as outras faces, temos uma restrição do tipo CFL para o passo de tempo, dada por:

$$\Delta t \leq \min \{ \Delta t_l, \Delta t_r, \Delta t_d, \Delta t_u \}. \quad (27)$$

Tomando, a partir do instante t^n , um passo de tempo $\Delta \bar{t}$ satisfazendo a restrição (27), podemos definir os seguintes pontos de referência:

$$\begin{aligned} x_{ln} &= x_{i-1/2} - a_l \Delta \bar{t} & x_{lc} &= x_{i-1/2} + a_l \Delta \bar{t} \\ x_{rn} &= x_{i+1/2} + a_r \Delta \bar{t} & x_{rc} &= x_{i+1/2} - a_r \Delta \bar{t} \\ y_{dn} &= y_{j-1/2} - a_d \Delta \bar{t} & y_{dc} &= y_{j-1/2} + a_d \Delta \bar{t} \\ y_{un} &= y_{j+1/2} + a_u \Delta \bar{t} & y_{uc} &= y_{j+1/2} - a_u \Delta \bar{t}, \end{aligned}$$

onde os índices c e n indicam se os pontos são relativos ao volume central (c) ou a um dos seus vizinhos (n). Tais pontos estão representados na Figura 4. Desta figura, podemos ver claramente a formação de cinco novas células, de tamanhos distintos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_l &= (x_{ln}, x_{lc}) \times (y_{j-1/2}, y_{j+1/2}) & \mathcal{C}_r &= (x_{rc}, x_{rn}) \times (y_{j-1/2}, y_{j+1/2}) \\ \mathcal{C}_d &= (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_{dn}, y_{dc}) & \mathcal{C}_u &= (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_{uc}, y_{un}) \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{C}_c = (x_{lc}, x_{rc}) \times (y_{dc}, y_{uc}).$$

O passo evolutivo se dá pela integração da lei de conservação (20) nas células \mathcal{C}_β do instante t^n ao $\bar{t} = t^n + \Delta \bar{t}$, ou seja

$$\int_{\mathcal{C}_\beta} \phi(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, \bar{t}) d\Omega = \int_{\mathcal{C}_\beta} \phi(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t^n) d\Omega - \int_{t^n}^{\bar{t}} \int_{\Gamma_{\mathcal{C}_\beta}} \mathbf{f}(w(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} d\Gamma dt \quad (28)$$

onde $w(\mathbf{x}, t)$ é uma função composta pelas reconstruções lineares. A seguir apresentaremos o desenvolvimento desse passo para a célula \mathcal{C}_l .

Evolução sobre a célula \mathcal{C}_l . Iniciemos pela avaliação da primeira integral do lado direito da equação (28), ou seja, a integral no espaço.

$$\int_{\mathcal{C}_l} \phi(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t^n) d\Omega = \int_{\mathcal{C}_{ln}} \phi_l L_{i,j-1}^n(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\mathcal{C}_{lc}} \phi_c L_{i,j}^n(\mathbf{x}) d\Omega$$

com $\mathcal{C}_{ln} = \mathcal{C}_l \cap \mathcal{C}_{i-1,j}$ e $\mathcal{C}_{lc} = \mathcal{C}_l \cap \mathcal{C}_{i,j}$. Usando as reconstruções lineares podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_l} \phi(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t^n) d\Omega &= \frac{|\mathcal{C}_l|}{2} \left\{ \phi_l \left[S_{i-1,j}^n + \frac{\Delta x}{2} (S_x^n)_{i-1,j} \right] + \phi_c \left[S_{i,j}^n - \frac{\Delta x}{2} (S_x^n)_{i,j} \right] \right\} + \mathcal{O}(\Delta \bar{t}^2) \\ &= \frac{|\mathcal{C}_l|}{2} \{ \phi_l S_l^- + \phi_c S_l^+ \} + \mathcal{O}(\Delta \bar{t}^2) \end{aligned}$$

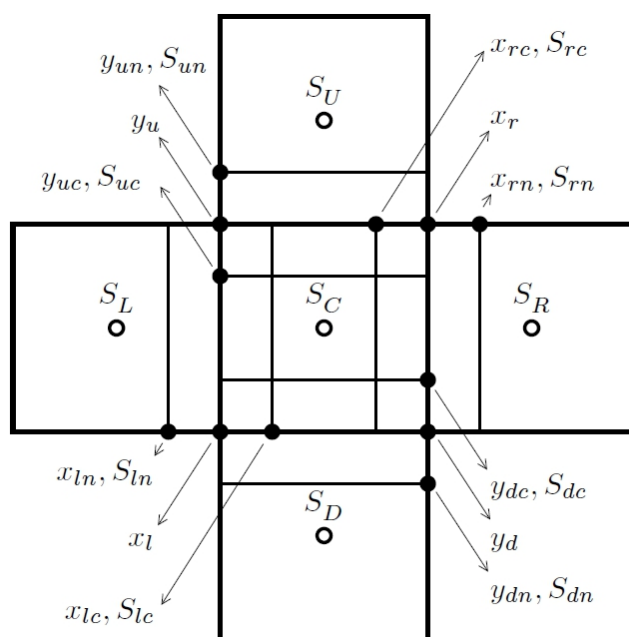


Figura 4: Esquema de Kurganov-Tadmor 2D.

onde $|\mathcal{C}_l| = 2a_l \Delta \bar{t} \Delta y$.

Para a aproximação do termo de fluxo, representado pela segunda integral do lado direito da equação (28), tomamos o valor do integrando no instante t^n e os valores da saturação no ponto médio da face, escrevendo:

$$\int_{t^n}^{\bar{t}} \int_{\Gamma_{C_\beta}} \mathbf{f}(w(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma dt \approx \Delta \bar{t} \Delta y \{f(S_{lc}, t^n) - f(S_{ln}, t^n)\} + \mathcal{O}(\Delta \bar{t}^2)$$

onde $S_{lc} = L_{i,j}^n(x_{lc}, y_j)$ e $S_{ln} = L_{i-1,j}^n(x_{ln}, y_j)$. Tomando a média da equação (28) sobre a célula \mathcal{C}_l , temos

$$\frac{1}{|\mathcal{C}_l| \phi_{C_l}} \int_{\mathcal{C}_l} \phi(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, \bar{t}) \, d\Omega \approx \frac{1}{2\phi_{C_l}} \{\phi_l S_l^- + \phi_c S_l^+\} - \frac{1}{2a_l \phi_{C_l}} \{f(S_{lc}, t^n) - f(S_{ln}, t^n)\} + \mathcal{O}(\Delta \bar{t})$$

com $\phi_{C_l} = (\phi_c + \phi_l)/2$. Assim, podemos definir a saturação média sobre a célula \mathcal{C}_l , obtida após a evolução em um intervalo de tempo $\Delta \bar{t}$, como sendo

$$S_{C_l} = \frac{1}{2\phi_{C_l}} \left\{ (\phi_c S_l^+ + \phi_l S_l^-) - \frac{1}{a_l} [f(S_{lc}, t^n) - f(S_{ln}, t^n)] \right\} + \mathcal{O}(\Delta \bar{t}). \quad (29)$$

Evolução sobre as outras células. Realizando um desenvolvimento análogo para as outras células, obtemos:

$$S_{C_r} = \frac{1}{2\phi_{C_r}} \left\{ (\phi_c S_r^- + \phi_r S_r^+) - \frac{1}{a_r} [f(S_{rn}, t^n) - f(S_{rc}, t^n)] \right\} + \mathcal{O}(\Delta \bar{t}) \quad (30)$$

$$S_{C_d} = \frac{1}{2\phi_{C_d}} \left\{ (\phi_c S_d^+ + \phi_d S_d^-) - \frac{1}{a_d} [g(S_{dc}, t^n) - f(S_{dn}, t^n)] \right\} + \mathcal{O}(\Delta \bar{t}) \quad (31)$$

$$S_{C_u} = \frac{1}{2\phi_{C_u}} \left\{ (\phi_c S_u^- + \phi_u S_u^+) - \frac{1}{a_u} [g(S_{un}, t^n) - f(S_{uc}, t^n)] \right\} + \mathcal{O}(\Delta\bar{t}) \quad (32)$$

$$S_{C_c} = S_{i,j}^n + \Delta\bar{t} \frac{|C_{i,j}|}{|C_c|} \left\{ \frac{1}{2} [(a_l - a_r) (S_x^n)_{i,j} + (a_d - a_u) (S_y^n)_{i,j}] - \frac{[f(S_{rc}, t^n) - f(S_{lc}, t^n)]}{\phi_c \Delta x} - \frac{[g(S_{uc}, t^n) - g(S_{dc}, t^n)]}{\phi_c \Delta y} \right\} + \mathcal{O}(\Delta\bar{t}^2) \quad (33)$$

onde $|C_{i,j}| = \Delta x \Delta y$ e $|C_c| = [\Delta x - (a_l + a_r)\Delta\bar{t}][\Delta y - (a_d + a_u)\Delta\bar{t}]$. Com isso, está concluída a etapa de evolução.

4.2.3 Projeção e Formulação Semidiscreta

Uma vez conhecidas as soluções sobre as células da malha não-uniforme gerada a partir de informações sobre as velocidades de propagação nas faces do volume, procedemos à projeção sobre o volume $C_{i,j}$ da malha original, no instante \bar{t} , ou seja

$$\bar{S}_{i,j} = \frac{1}{2|C_{i,j}|} \{ |C_l| S_{C_l} + |C_r| S_{C_r} + |C_d| S_{C_d} + |C_u| S_{C_u} + 2|C_c| S_{C_c} \} - I_{C_\beta \cap C_\theta}$$

onde o termo $I_{C_\beta \cap C_\theta}$ corrige a duplicidade da projeção sobre a região de interseção entre as células C_β e C_θ ($\beta, \theta = l, r, d, u$). É direta a verificação de que $I_{C_\beta \cap C_\theta} = \mathcal{O}(\Delta\bar{t}^2)$. Utilizando este fato e as expressões para $|C_\beta|$, temos:

$$\bar{S}_{i,j} = \frac{\Delta\bar{t}}{\Delta x} \{ a_l S_{C_l} + a_r S_{C_r} \} + \frac{\Delta\bar{t}}{\Delta y} \{ a_d S_{C_d} + a_u S_{C_u} \} + \frac{|C_c|}{|C_{i,j}|} S_{C_c} + \mathcal{O}(\Delta\bar{t}^2). \quad (34)$$

O termo da projeção relativo à célula central pode ser escrito, a partir da equação (33), como:

$$\frac{|C_c|}{|C_{i,j}|} S_{C_c} = \frac{|C_c|}{|C_{i,j}|} S_{i,j}^n + \Delta\bar{t} \left\{ \frac{1}{2} [(a_l - a_r) (S_x^n)_{i,j} + (a_d - a_u) (S_y^n)_{i,j}] - \frac{[f(S_{rc}, t^n) - f(S_{lc}, t^n)]}{\phi_c \Delta x} - \frac{[g(S_{uc}, t^n) - g(S_{dc}, t^n)]}{\phi_c \Delta y} \right\} + \mathcal{O}(\Delta\bar{t}^2). \quad (35)$$

Adicionalmente,

$$\frac{|C_c|}{|C_{i,j}|} S_{i,j}^n = S_{i,j}^n \left\{ 1 - (a_l + a_r) \frac{\Delta\bar{t}}{\Delta x} - (a_d + a_u) \frac{\Delta\bar{t}}{\Delta y} \right\} + \mathcal{O}(\Delta\bar{t}^2) \quad (36)$$

o que nos permite escrever, através da substituição de (36) em (35) e da definição das saturações nas faces do volume:

$$\frac{|C_c|}{|C_{i,j}|} S_{C_c} = S_{i,j}^n - \frac{\Delta\bar{t}}{\Delta x} \left\{ (a_l S_l^+ + a_r S_r^-) + \frac{1}{\phi_c} [f(S_{rc}, t^n) - f(S_{lc}, t^n)] \right\} - \frac{\Delta\bar{t}}{\Delta y} \left\{ (a_d S_d^+ + a_u S_u^-) + \frac{1}{\phi_c} [g(S_{uc}, t^n) - g(S_{dc}, t^n)] \right\} + \mathcal{O}(\Delta\bar{t}^2).$$

Substituindo este resultado na equação (34), temos

$$\begin{aligned} \frac{\bar{S}_{i,j} - S_{i,j}^n}{\Delta \bar{t}} &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ a_l (S_{c_l} - S_l^+) + a_r (S_{c_r} - S_r^-) - \frac{1}{\phi_c} [f(S_{rc}, t^n) - f(S_{lc}, t^n)] \right\} \\ &+ \frac{1}{\Delta y} \left\{ a_d (S_{c_d} - S_d^+) + a_u (S_{c_u} - S_u^-) - \frac{1}{\phi_c} [g(S_{uc}, t^n) - g(S_{dc}, t^n)] \right\} \\ &+ \mathcal{O}(\Delta \bar{t}). \end{aligned}$$

Esta equação é a base para obtermos a formulação semidiscreta. Para tal, tomemos o limite $\Delta \bar{t} \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} \frac{\bar{S}_{i,j} - S_{i,j}^n}{\Delta \bar{t}} &= \frac{1}{\Delta x} \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} [a_l (S_{c_l} - S_l^+) + a_r (S_{c_r} - S_r^-)] \\ &- \frac{1}{\phi_c \Delta x} \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} [f(S_{rc}, t^n) - f(S_{lc}, t^n)] \\ &+ \frac{1}{\Delta y} \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} [a_d (S_{c_d} - S_d^+) + a_u (S_{c_u} - S_u^-)] \\ &- \frac{1}{\phi_c \Delta y} \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} [g(S_{uc}, t^n) - g(S_{dc}, t^n)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Notando que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{lc} &= S_l^+ & \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{ln} &= S_l^- & \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{rc} &= S_r^- & \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{rn} &= S_r^+ \\ \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{dc} &= S_d^+ & \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{dn} &= S_d^- & \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{uc} &= S_u^- & \lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} S_{un} &= S_u^+ \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta \bar{t} \rightarrow 0} \frac{\bar{S}_{i,j} - S_{i,j}^n}{\Delta \bar{t}} = \frac{dS_{i,j}}{dt}$$

substituindo as equações (29-32) em (37) e simplificando as expressões, chegamos à formulação semidiscreta:

$$\begin{aligned} \frac{dS_{i,j}}{dt} &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{a_l \phi_l}{\phi_c + \phi_l} (S_l^- - S_l^+) + \frac{a_r \phi_r}{\phi_c + \phi_r} (S_r^+ - S_r^-) \right. \\ &- \frac{1}{\phi_c + \phi_l} [f(S_l^+, t^n) - f(S_l^-, t^n)] - \frac{1}{\phi_c + \phi_r} [f(S_r^+, t^n) - f(S_r^-, t^n)] \\ &- \left. \frac{1}{\phi_c} [f(S_r^-, t^n) - f(S_l^+, t^n)] \right\} \\ &+ \frac{1}{\Delta y} \left\{ \frac{a_d \phi_d}{\phi_c + \phi_d} (S_d^- - S_d^+) + \frac{a_u \phi_u}{\phi_c + \phi_u} (S_u^+ - S_u^-) \right. \\ &- \frac{1}{\phi_c + \phi_d} [g(S_d^+, t^n) - g(S_d^-, t^n)] - \frac{1}{\phi_c + \phi_u} [g(S_u^+, t^n) - g(S_u^-, t^n)] \\ &- \left. \frac{1}{\phi_c} [g(S_u^-, t^n) - g(S_d^+, t^n)] \right\}. \end{aligned}$$

Esta formulação pode ser escrita na forma de fluxos numéricos através da expressão

$$\frac{dS_{i,j}}{dt} = \frac{H_r - H_l}{\Delta x} + \frac{H_u - H_d}{\Delta y} \quad (38)$$

com

$$H_\alpha = \frac{1}{\phi_c + \phi_\alpha} \left\{ a_\alpha (S_\alpha^+ - S_\alpha^-) - \left[\varphi(S_\alpha^+, t^n) + \frac{\phi_\alpha}{\phi_c} \varphi(S_\alpha^-, t^n) \right] \right\} \quad (39)$$

onde φ representa a função $f(s, t)$ ou $g(s, t)$. Para o caso particular de ϕ constante, recaímos sobre o fluxo numérico do método de Kurganov-Tadmor:

$$H_\alpha = \frac{a_\alpha}{2} (S_\alpha^+ - S_\alpha^-) - \frac{1}{2\phi} [\varphi(S_\alpha^+, t^n) + \varphi(S_\alpha^-, t^n)].$$

5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentamos alguns estudos com o objetivo de testar numericamente a metodologia proposta. Iniciamos com uma seqüência de testes em geometria Slab. Em seguida apresentamos um estudo em geometria Five-Spot. Como o objetivo é avaliar características de precisão e estabilidade dos métodos numéricos, trabalharemos com exemplos ilustrativos, onde omitiremos as dimensões das variáveis. Em todos os experimentos consideramos um domínio quadrado unitário discretizado em uma malha de 100×100 volumes, inicialmente com 79% de óleo e 21% de água. A razão entre a viscosidade óleo e da água é 10 e as permeabilidades relativas são dadas por

$$k_{rw}(s) = (s - s_{rw})^2(1 - s_{rw})^{-2} \quad k_{ro}(s) = (1 - (1 - s_{ro})^{-1}s)^2$$

onde $s_{rw} = 0.2$ e $s_{ro} = 0.15$ são a saturação residual da água e do óleo, respectivamente. O parâmetro de penalização tomado foi $\varepsilon = 10^{-7}$ e para o limitador MinMod, utilizamos $\alpha = 2$, com Courant prescrito no valor $Cr = 0.25$.

5.1 Geometria Slab

Neste estudo, são tomadas condições de contorno de velocidade prescrita $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 1.0$ no bordo esquerdo (bordo de injeção de água), $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0.0$ nos bordos superior e inferior e a pressão nula $p = 0.0$ no bordo direito. Iniciamos com a simulação em um meio homogêneo com os valores $k = 1.0$ e $\phi = 0.2$, conforme ilustrado na Figura 5 para $t = 0.04$. Em seguida, é adicionada uma região menos porosa, com $\phi = 0.1$, definida por um quadrado de lado 0.2 centrado em (0.2; 0.5). A Figura 7 mostra o efeito desta região menos porosa sobre o escoamento. Como não consideramos a variação da permeabilidade em função da redução da porosidade, vemos um avanço da frente de onda, com a formação de um dedo. Tomando agora o valor $\phi = 0.4$ para esta região, podemos ver na Figura 8 vemos o efeito de retardo ocasionado pela maior capacitância deste subdomínio. Finalmente, como último teste, mantemos a porosidade $\phi = 0.2$ nesta região heterogênea e variamos a permeabilidade, tomando o valor $k = 0.001$. Esta mudança tem efeito mais direto sobre o problema elíptico, resultando numa drástica redução da velocidade de escoamento e, conseqüentemente, tornando a região praticamente impermeável.

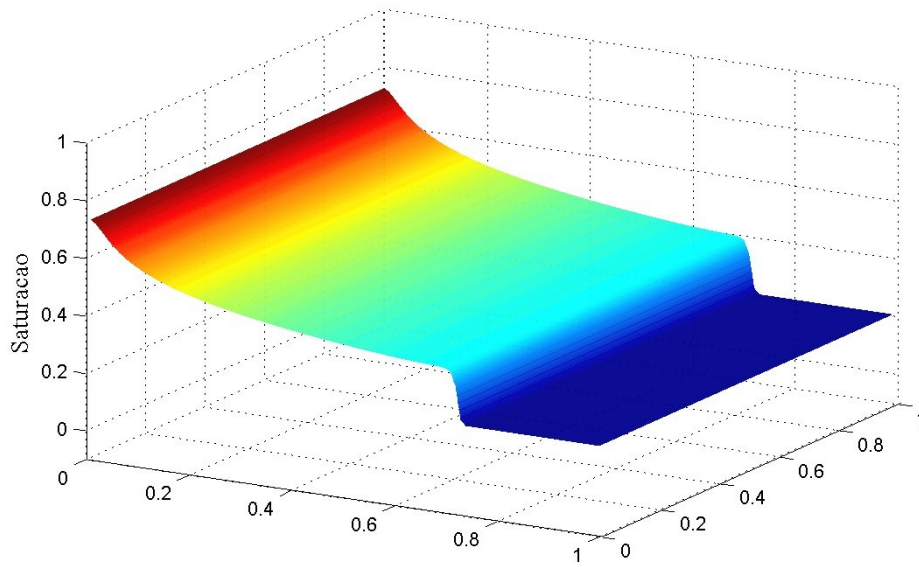
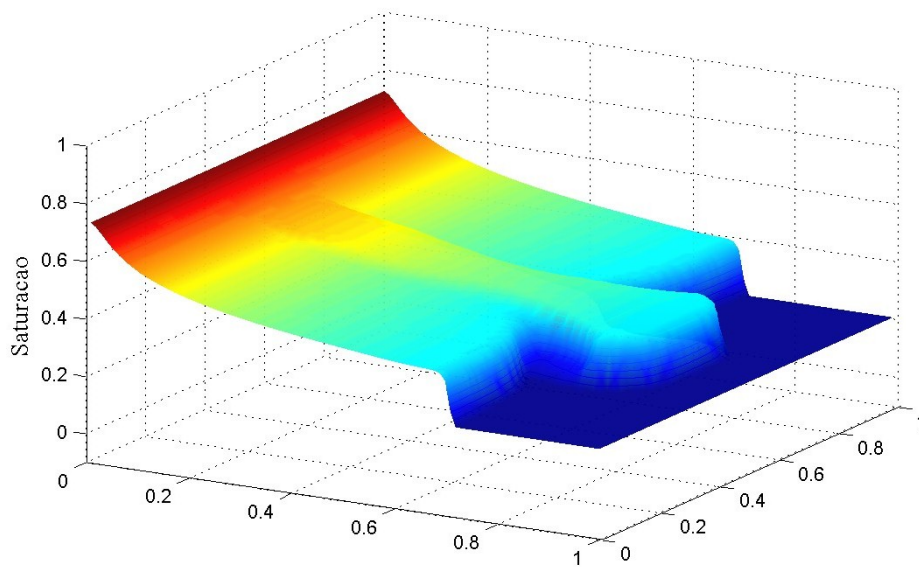


Figura 5: Caso homogêneo.

Figura 6: Região com porosidade $\phi = 0.1$.

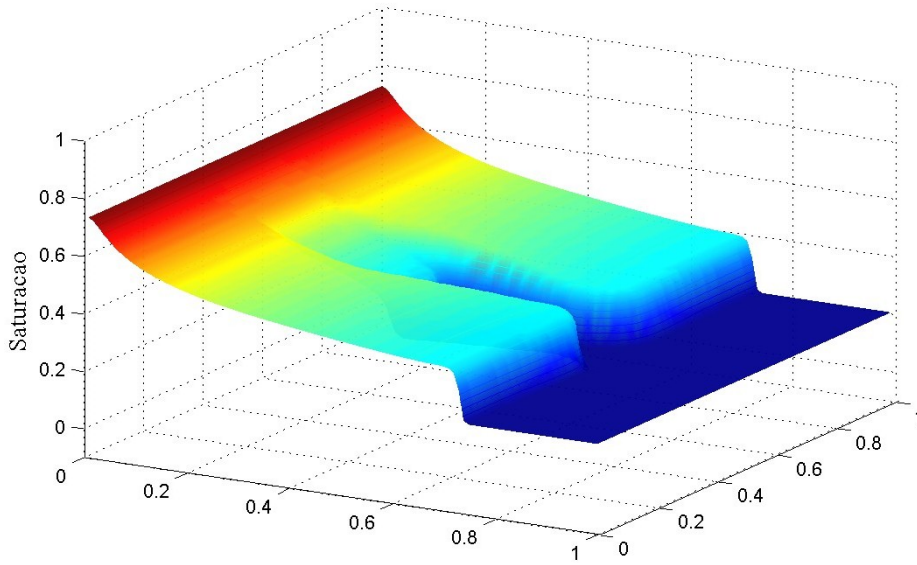


Figura 7: Região com porosidade $\phi = 0.4$.

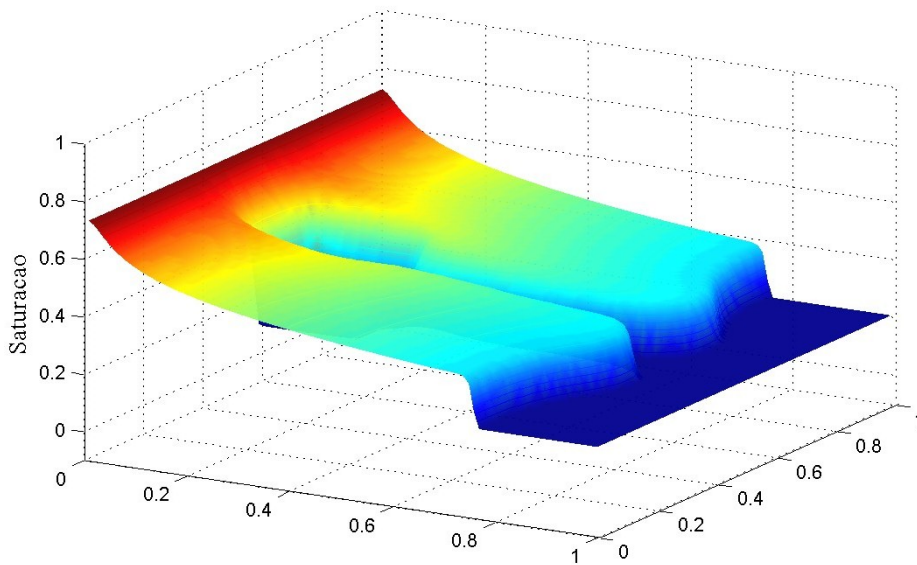


Figura 8: Região com permeabilidade $k = 0.001$.

5.2 Five-Spot

Neste exemplo, estudamos o escoamento em uma geometria de um quarto do clássico problema dos cinco poços. Basicamente os mesmos dados do exemplo anterior são mantidos, sendo modificada apenas as condições de contorno, tomadas como de fluxo nulo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre toda a fronteira, a menos dos poços de injeção e produção. Na Figura 9 é apresentada a simulação no instante $t = 0.08$ para o meio homogêneo com $\phi = 0.2$ e $k = 1.0$. Para realizar o estudo em um caso heterogêneo, utilizamos um campo de permeabilidades log-normal com coeficiente de variação $cv = 1.5$. Os resultados deste estudo estão apresentados na Figura 10.

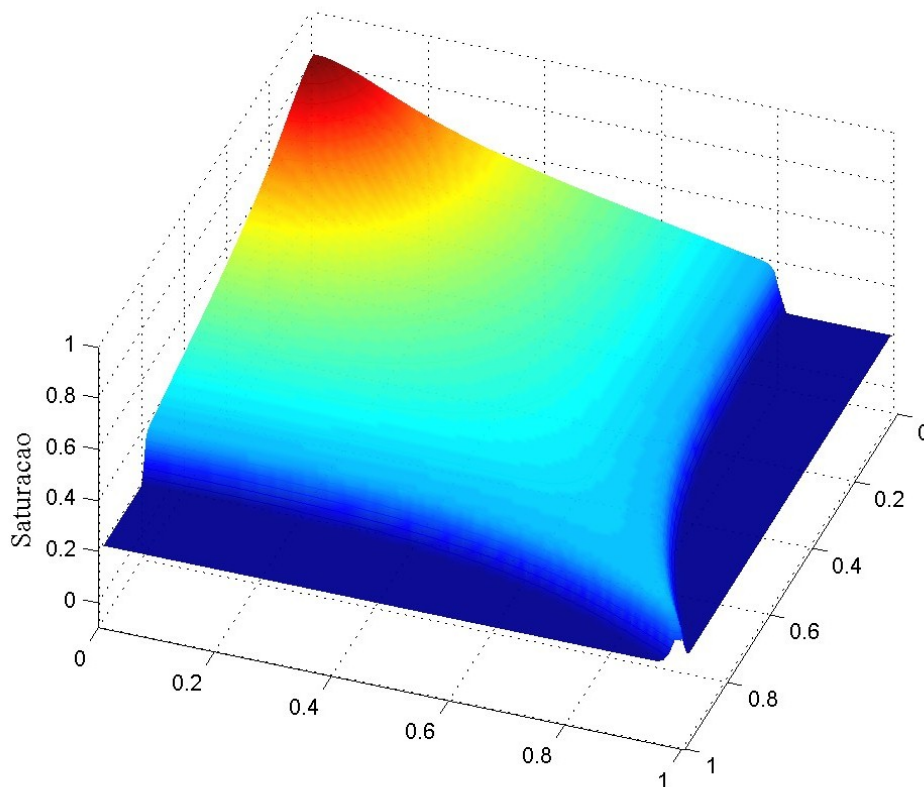


Figura 9: Geometria Five-Spot: caso homogêneo.

REFERÊNCIAS

- Abreu E., Pereira F., e Ribeiro S. Central schemes for porous media flows. *Computational and Applied Mathematics*, 28(1):87–110, 2009.
- Barrenechea G., Franca L.P., e Valentin F. A Petrov-Galerkin enriched method: A mass conservative finite element method for the darcy equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2449–2464, 2007.
- Borges M.R., Furtado F., Pereira F., e Souto H.P.A. Scaling analysis for the tracer flow problem in self-similar permeability fields. *Multiscale Modeling & Simulation*, 7(3):1130–1147, 2008. doi:10.1137/070710044.
- Borges M.R., Murad M.A., Furtado F., e Pereira F. A new multiscale scheme for computing

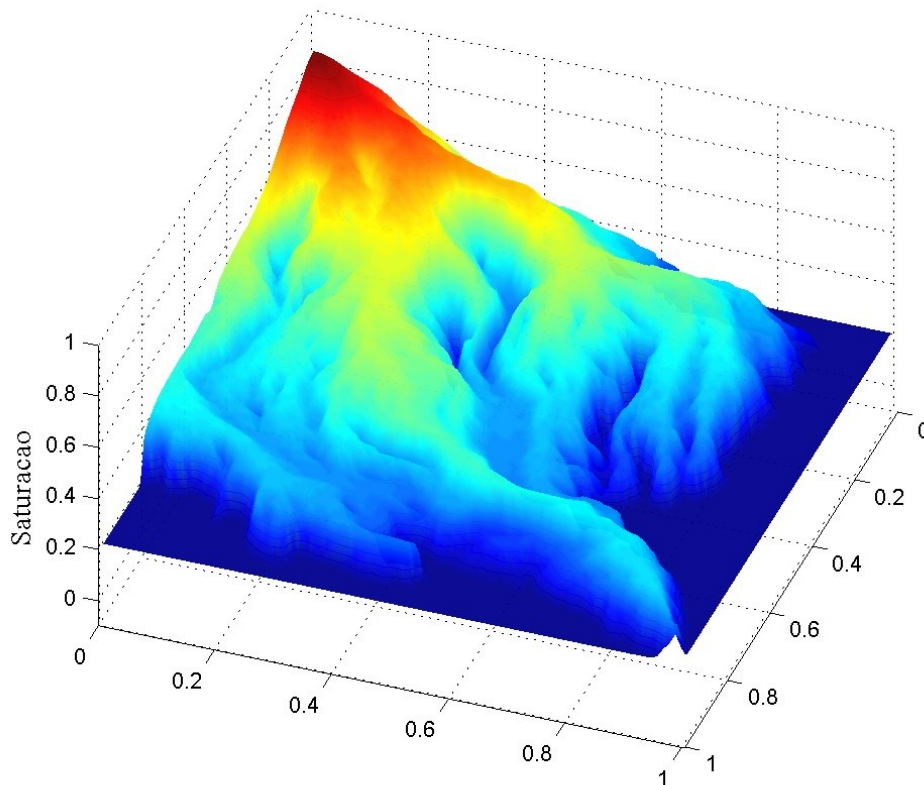


Figura 10: Geometria Five-Spot: caso heterogêneo.

statistical moments in single phase flow in heterogeneous porous media. *Advances in Water Resources*, 32:361–382, 2009.

Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrange multipliers. *RAIRO Analyse numérique/Numerical Analysis*, 8(R-2):129–151, 1974.

Brezzi F. e Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

Brezzi F., Hughes T.J.R., Marini L.D., e Masud A. A mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow. *SIAM J. Scientific Comput.*, 22-23:119–145, 2005.

Cordes C. e Kinzelbach W. Continuous groundwater velocity fields and path lines in linear, bilinear and trilinear finite elements. *Water Resources Research*, 28(11):2903–2911, 1992.

Correa M.R. e Loula A. An adjoint stabilized mixed finite element method for porous media flow (in Portuguese). In *XXVIII CILAMCE – Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Porto, Portugal, 2007a. (In Portuguese).

Correa M.R. e Loula A.F.D. Stabilized velocity post-processings for Darcy flow in heterogenous porous media. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23:461–489, 2007b.

Correa M.R. e Loula A.F.D. Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1525–1540, 2008.

Durlowsky L.J. Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to Darcy velocity and related quantities. *Water Resources Research*, 30(4):965–973, 1994.

Girault V. e Raviart P. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algo-*

- rithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, 1986.
- Hughes T.J.R., Masud A., e Wan J. A stabilized mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3347–3381, 2006.
- Kurganov A. e Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J. Comput. Phys*, 160:241–282, 2000.
- Lax P.D. Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7:159–193, 1954.
- LeVeque R.J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- Loula A.F.D. e Correa M.R. Numerical analysis of stabilized mixed finite element methods for Darcy flow. In *III European Conference on Computational Mechanics – ECCM 2006*. Lisbon, Portugal, 2006.
- Loula A.F.D., Correa M.R., Guerreiro J.N.C., e Toledo E.M. On finite element methods for heterogeneous elliptic equations. *International Journal of Solids and Structures*, 45:6436–6450, 2008.
- Loula A.F.D. e Toledo E.M. *Dual and Primal Mixed Petrov-Galerkin Finite Element Methods in Heat Transfer Problems*. LNCC - Technical Report 048/88, 1988.
- Malta S.M.C., Loula A.F.D., e Garcia E.L.M. Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187:119–136, 2000.
- Masud A. e Hughes T.J.R. A stabilized finite element method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4341–4370, 2002.
- Murad M.A. e Loula A.F.D. Improved accuracy in finite element analysis of biot’s consolidation problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 95(3):359–382, 1992. ISSN 0045-7825. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90193-N](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(92)90193-N).
- Murad M.A., Thomée V., e Loula A.F.D. Asymptotic behavior of semidiscrete finite-element approximations of biot’s consolidation problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1065–1083, 1996. ISSN 0036-1429. doi:<http://dx.doi.org/10.1137/0733052>.
- Nakshatrala K.B., Turner D.Z., Hjelmstad K.D., e Masud A. A stabilized finite element method for Darcy flow based on a multiscale decomposition of the solution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4036–4049, 2006.
- Nessyahu H. e Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys*, 87:408–463, 1990.
- Raviart P.A. e Thomas J.M. A mixed finite element method for second order elliptic problems. In *Math. Aspects of the F.E.M.*, número 606 in Lectute Notes in Mathematics, páginas 292–315. Springer-Verlag, 1977.
- Ribeiro S. *Novos Esquemas Centrais de Diferenças Finitas para a Simulação de Escoamentos Multifásicos em Reservatórios de Petróleo*. Tese de D.Sc., IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, RJ, Brasil, 2007.