

SIMULACIÓN INTERACTIVA DE DINÁMICA DE FLUIDOS CON TRANSFERENCIA DE CALOR MEDIANTE MÉTODOS DE PARTÍCULAS

Alejandro C. Limache, Sebastián Rojas Fredini y Victor D. Fachinotti

*International Center of Computational Methods in Engineering (CIMEC).
INTEC-CONICET. Santa Fe, Argentina., <http://www.cimec.gov.ar/>*

Palabras Clave: particle methods, Navier-Stokes Equations, heat transfer, smoothed particle hydrodynamics, SPH, real-time.

Resumen. Este trabajo esta dedicado a mostrar los primeros resultados obtenidos en simulación de problemas acoplados de dinámica de fluidos y de transferencia de calor usando el método de partículas llamado Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). La técnica empleada consiste en la solución simultánea de las ecuaciones de dinámica de fluidos y de transferencia de calor en formulación Lagrangiana usando una discretización tipo SPH desarrollada en el CIMEC. Aquí se presentan las primeras validaciones del modelo y los primeros ejemplos de su aplicación. En el trabajo se podrá apreciar como influyen los fenómenos de advección en la transferencia de calor. Los ejemplos y el código han sido corridos en una plataforma de simulación también desarrollada en el CIMEC. La plataforma permite cambiar interactivamente propiedades físicas del fluido, condiciones de contorno como el movimiento de paredes, o su temperatura, todo ello interactivamente mientras transcurre la simulación. El desarrollo permitirá la solución y simulación interactiva de variados e interesantes problemas de convección natural y transferencia de calor.

1. INTRODUCCIÓN

Smoothed particle hydrodynamics (SPH) es un método de partículas basado en la convolución de propiedades puntuales de un campo y un kernel de interpolación. Fue inventado para simular fenómenos astrofísicos (Lucy, 1977; Gingold y Monaghan, 1977). En los últimos años el método ha sido extendido con singular éxito al campo de la mecánica de los fluidos Liu y Liu (2003); Monaghan (1992, 2005). También se ha utilizado dicho método en la solución de la Ecuación del Calor Jeong et al. (2003); Cleary (1998); Cleary et al. (1998); Cleary y Monaghan (1999); Rook et al. (2008). Además, se han realizado aplicaciones recientes en simulación de fenómenos de escalas múltiples Koumoutsakos (2005). SPH posee interesantes características que lo hacen extremadamente atractivo: 1) Puede ser aplicado a diversas ecuaciones diferenciales, 2) Es de sencilla formulación, 3) Permite incorporar complicados fenómenos físicos, 4) Es un método sin mallas, 5) Su formulación permite desarrollar códigos en paralelo con mayor facilidad que otros métodos clásicos.

En este trabajo se describe una formulación SPH desarrollada por los autores orientada a resolver problemas acoplados de mecánica de fluidos y de transferencia, transporte y conducción del calor. Esto implica la solución simultánea de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la Ecuación de Calor en forma Lagrangiana. Para presentar los resultados se utiliza una plataforma de simulación y visualización que permite configurar experimentos que validan y dan soporte al método. En particular, aquí se ha procedido a realizar las primeras validaciones comparadas con soluciones numéricas obtenidas usando el Método de Elementos Finitos para el caso de conducción del calor pura (fluido en reposo) y se muestran los efectos en la distribución de temperatura debido a los fenómenos de transporte y advección. Los experimentos se han realizado en la famosa cavidad cuadrada.

2. SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS

SPH se basa en la aplicación sucesiva de dos conceptos fundamentales a los términos de una ecuación diferencial: representación integral y aproximación de partículas. El primero se refiere a la representación de una cantidad física mediante la convolución con un Kernel o función de suavizado. El segundo concepto es la aproximación que permite llevar al mundo discreto la representación integral. Para más detalles sobre la formulación que aquí será presentada ver Limache y Rojas-Fredini (Dec 2010). Para detalles sobre la implementación en paralelo ver Rojas-Fredini y Limache (Jan 2011).

2.1. Representación Integral

Una función $f(x)$ puede ser representada en un entorno de radio h alrededor de x utilizando una función de suavizado, más comunmente llamado, Kernel W de la siguiente manera:

$$\langle f(x) \rangle = \int_V f(x')W(x - x', h)dV' \quad (1)$$

h es el soporte de la función de Kernel. Si el kernel W se elige igual a la función Delta de Dirac $\delta(x - x')$ entonces la representación es exacta en x :

$$\langle f(x) \rangle = \int_V f(x)\delta(x - x')dV' = f(x) \quad (2)$$

De la misma forma, es posible aproximar el gradiente de una función, mediante la convolución con el gradiente de la función de Kernel:

$$\langle \nabla f(x) \rangle = - \int_V f(x') [\nabla' W(x - x', h)] dV' \quad (3)$$

2.2. Aproximación de partículas

En SPH los fluidos se representan como un conjunto finito de partículas donde cada partícula P_i posee una masa m_i y ocupa un volumen dV_i . Por conservación de masa dicho volumen puede ser representado en función de la densidad alrededor de P_i de la siguiente manera:

$$dV_i = \frac{m_i}{\rho_i} \quad (4)$$

La aproximación de partículas consiste en calcular las representaciones integrales de la sección 2.1 como una sumatoria de las contribuciones de los volúmenes discretos alrededor de cada partícula. Entonces las integrales discretas de las Ecs. (1) y (3) evaluadas sobre P_i se calculan como:

$$\langle f_i \rangle = \langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} W_{ij} \quad (5)$$

$$\langle \nabla f_i \rangle = \langle \nabla f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij}, \quad (6)$$

respectivamente donde:

$$f_j = f(x_j) \quad (7)$$

$$W_{ij} = W(x_i - x_j, h) \quad (8)$$

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} [W(x_i - x_j, h)] \quad (9)$$

Existen otras aproximaciones discretas al gradiente (Liu y Liu (2003); Monaghan (2005)). Las más comúnmente usadas son:

$$\langle \nabla f_i \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j - f_i}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} \quad (10)$$

$$\langle \nabla f_i \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{f_j + f_i}{\rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (11)$$

$$\langle \frac{1}{\rho} \nabla f_i \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{f_i}{\rho_i^2} + \frac{f_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (12)$$

NOTA: En general, de aquí en adelante, denotaremos por f_{ij} a la diferencia de cantidades es decir: $f_{ij} = f_i - f_j$.

2.3. Funciones de Kernel

Existen varias alternativas para la elección del kernel. Cuanto más parecido sea a la función Delta más correcta será nuestra aproximación ya que como se mostró en [Monaghan \(2005\)](#) el error crece cuadráticamente con h . Para el presente trabajo se utilizan dos kernels. El *spiky* Kernel definido como:

$$W(r, h) = \frac{K_d}{h^{n_d}} \begin{cases} (2 - q)^3, & 0 \leq q \leq 2 \\ 0, & 2 < q \end{cases} \quad (13)$$

Y el *cubic* kernel definido de la siguiente manera:

$$W(r, h) = \frac{K_d}{h^{n_d}} \begin{cases} (2 - q)^3 - 4(1 - q)^3, & 0 \leq q \leq 1 \\ (2 - q)^3, & 1 \leq q \leq 2 \\ 0, & 2 < q \end{cases} \quad (14)$$

donde q se define como $\frac{r}{h}$. En 2 dimensiones $n_d = 2$ las constantes de normalización son $K_d = \frac{5}{16\pi}$ y $K_d = \frac{5}{(14\pi)}$, respectivamente. El soporte de ambos kernels es de $2h$. El uso de dos kernels diferentes ha mostrado reducir notablemente inestabilidades en la presión. Para más detalles ver [Limache y Rojas-Fredini \(Dec 2010\)](#).

3. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES Y DE TRANSFERENCIA DE CALOR

3.1. Forma SPH de Conservación de Masa

Usando la descripción lagrangiana y bajo la aproximación de pseudo-incompresibilidad, la ecuación de conservación de masa se escribe de manera explícita mediante el cómputo de la densidad. Si se aplica la aproximación (5) a la densidad se obtiene que la misma puede ser determinada mediante la suma ponderada de la masa de las partículas en el soporte del Kernel:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (15)$$

3.2. Forma SPH de las Ecuaciones Navier-Stokes

Por otro lado, la ecuación de Navier-Stokes propiamente dicha escrita en forma de divergencia [Limache et al. \(2008\)](#) es:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau \quad (16)$$

donde $\tau = \mu \frac{\nabla v + \nabla v^T}{2}$ es el tensor viscoso. Se ha asumido que las fuerzas externas de volumen son nulas para simplificar la presentación de las ecuaciones. Usando (11) para computar la divergencia se obtiene:

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_{j=1}^N m_j \frac{\tau_i^{\alpha\beta} + \tau_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (17)$$

donde las letras griegas α, β se usan para denotar las componentes cartesianas de vectores y tensores. De este modo, v_i^α denota la componente $\alpha = \{1, 2 \text{ ó } 3\}$ del vector velocidad de la

partícula i , $\tau_i^{\alpha\beta}$ se refiere a la componente (α, β) del tensor viscoso τ . Las componentes cartesianas (α, β) del gradiente de velocidad $\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_i^\beta}$ necesario para calcular $\tau_i^{\alpha\beta}$ se computan usando la aproximación (10)

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_i^\beta} = - \sum_{j=1}^N m_j \frac{v_{ij}^\alpha}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (18)$$

3.3. Ecuación de estado

En fluidos compresibles y pseudo-incompresibles la presión y la densidad se encuentran relacionadas a través de la ecuación de estado. En este trabajo se utilizó la siguiente forma para dicha ecuación:

$$p = \kappa \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (19)$$

donde κ se define en función de la velocidad del sonido c_s como:

$$\kappa = \frac{\rho_0 c_s^2}{\gamma} \quad (20)$$

Nótese que la inversa de dicha ecuación es:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{\kappa} + 1 \right)^{1/\gamma} \quad (21)$$

La ecuación de estado (19) es la forma más comúnmente usada en SPH para aproximar el límite incompresible. Y tiene la ventaja que se reduce a la ecuación de gases ideales con una apropiada elección de las constantes γ y κ .

3.4. Forma SPH de las Ecuaciones de Transferencia de Calor

La ecuación de conducción y transporte de calor puede ser escrita en forma Lagrangiana Cleary y Monaghan (1999) de la siguiente manera:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (22)$$

donde T es la temperatura, c_p es la capacidad de calor por unidad de masa y κ es el coeficiente de conductividad térmica. Usando expresiones similares a las presentadas en la Sección 2.2 para discretizar el término $\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$ puede llegarse a la siguiente forma discreta para la velocidad de cambio de la temperatura:

$$c_p \frac{DT_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \frac{T_i - T_j}{\rho_i \rho_j} (\kappa_i + \kappa_j) F_{ij} \quad (23)$$

where F_{ij} es definida como $F_{ij} r_{ij} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha}$ con $r_{ij} = x_i - x_j$.

3.5. Viscosidad artificial

En SPH es común agregar un término de viscosidad artificial a la ecuación de momento. Basado en los trabajos de Cleary (1996) y Monaghan (2005) este término se define como:

$$f_i^\alpha = - \sum_{j=1}^N m_j \Pi_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (24)$$

con Π_{ij} dado por

$$\Pi_{ij} = -\nu \left(\frac{v_{ij} \cdot r_{ij}}{|r_{ij}|^2 + \eta^2} \right) \quad (25)$$

dónde

$$\nu = \frac{\bar{h}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \left(\alpha c_s - \beta \frac{\bar{h}_{ij} v_{ij} \cdot r_{ij}}{|r_{ij}|^2 + \eta^2} \right) \quad (26)$$

3.6. Condicion de borde

En SPH generalmente se utilizan partículas artificiales para simular las condiciones de borde (Liu y Liu, 2003). Para evitar la interpenetración algunos autores utilizan una fuerza artificial ejercida por las partículas de borde sobre las de fluido (Monaghan, 2005; Becker y Teschner, 2007). Los autores han seguido el trabajo de (Thiagarajan y Rafiee, 2009) que permite simular las condiciones de borde mediante partículas *ghost*. Una de las grandes ventajas de este método es que se evita el uso de fuerzas sin significado físico. El incremento de presión debido a dichas partículas de borde es el que naturalmente permite que las partículas reales no traspasen la frontera. Los autores implementaron partículas *ghost* reflejando las partículas reales usando conceptos similares a los utilizados en el método de las imágenes en electrostática. Es decir, se realiza un espejado a lo largo de la frontera de manera tal que las partículas fuera de la misma sean un espejo tanto en posición como en propiedades de las partículas internas. Las densidades de las partículas *ghost* se calculan como:

$$\rho_{ghost} = \rho_a$$

siendo ρ_a la densidad de la partícula real. Mientras que sus velocidades v_{ghost} y temperaturas se fijan de acuerdo a la siguiente extrapolación:

$$v_{ghost} = 2u_{wall} - v_a$$

$$T_{ghost} = 2T_{wall} - T_a$$

donde u_{wall} y T_{wall} son las velocidades y temperaturas impuestas de la pared, respectivamente, y donde v_a y T_a son las velocidades y temperaturas de la partícula real, respectivamente. Si la pared se encuentra en reposo entonces: $u_{wall} = 0$. Debe notarse que sólo es necesario crear partículas fantasmas de las partículas q estan a una distancia menor igual que el soporte del Kernel (h). Por lo tanto, el número de partículas *ghost* varía dinámicamente, pero el espesor de la capa de partículas es siempre menor que h .

4. RESULTADOS NUMERICOS

A continuación se presentan resultados numéricos obtenidos usando nuestra plataforma de simulación interactiva. Mediante la plataforma uno puede interactuar y cambiar las propiedades físicas y numéricas del problema a medida que la computadora simula el proceso. Si el número de partículas es de 10000 se ha logrado correr simulaciones interactivas que también transcurren en tiempo real mediante computadoras con 6 cores/12 threads o más. Por ejemplo usando una computadora con procesador Intel i7-980X extreme edition. El flujo en una cavidad cuadrada es un problema clásico de la mecánica de fluidos así como también lo es su equivalente en conducción de calor. La configuración y geometría típica de ambos problemas se muestran en la Fig. 1. Aunque la formulación presentada aquí permite la solución acoplada de dinámica de fluidos con transferencia de calor. A modo de validación de la metodología SPH y del código

implementado primero se considera el problema de la solución del problema clásico puro de conducción del calor. En las simulaciones presentadas, las propiedades físicas del fluido son: $\rho = 1000$, $\mu = 100$, $c_p = 1$ and $\kappa = 20$, todas ellas expresadas en el Sistema Internacional de Medidas. La cavidad tiene dimensiones unitarias.

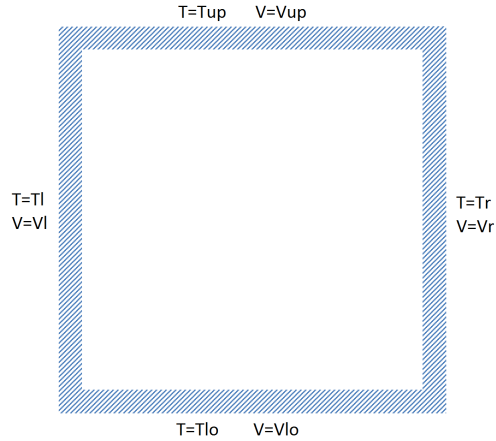


Figura 1: Square Cavity: Flow and Heat Conduction

4.1. Validación de SPH usando Conducción del Calor

En este caso, el material dentro la cavidad está en reposo. Las paredes de la cavidad no se mueven $V_{up} = 0$, $V_{left} = 0$, $V_{lower} = 0$ and $V_{right} = 0$. El fluido se asume que tiene inicialmente temperatura $T = 0$. Las paredes de la cavidad son isotérmicas e inicialmente tienen temperatura igual a cero ($T_{up} = 0$, $T_{left} = 0$, $T_{lower} = 0$ and $T_{right} = 0$). A partir de un tiempo $t > t_0$, la pared de la derecha se pone a una temperatura $T_{right} = 80$. Después de aproximadamente dos minutos, la distribución de temperaturas alcanza la solución estacionaria, como se muestra en la Fig. 2. En la figura las partículas han sido coloreadas de acuerdo a su distribución final de temperaturas.

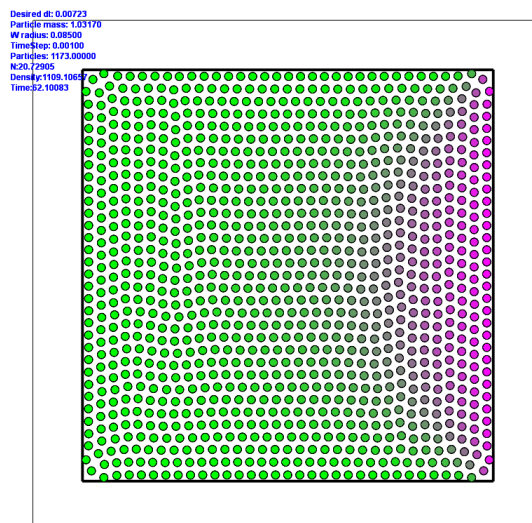


Figura 2: Solución estacionaria del problema puro de conducción del calor. Las paredes son isoterms con temperaturas: $T_{up} = 0$, $T_{left} = 0$, $T_{lower} = 0$ y $T_{right} = 80$

En la Fig. 3, se muestran el perfil de temperaturas alcanzado en el sector medio de la cavidad que corresponde a una línea horizontal en $y = 0,5$. Con el propósito de validar nuestra formulación, el perfil de temperaturas se compara con el obtenido usando el método de Elementos Finitos. Se muestra la gran concordancia entre ambas soluciones.

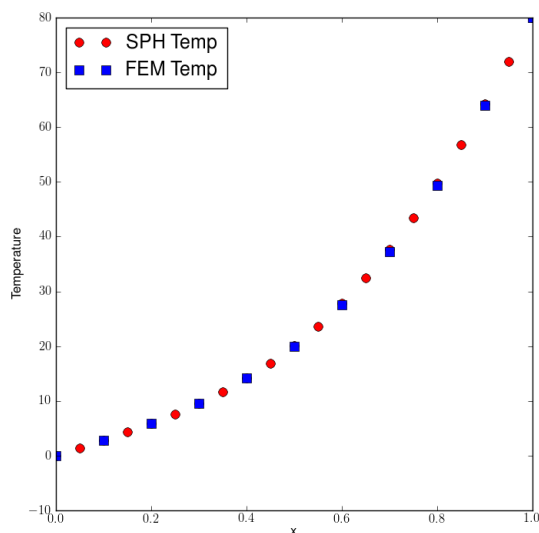


Figura 3: Perfil de temperaturas del problema puro de conducción del calor en $y = 0,5$. Las paredes son isotermas con temperaturas: $T_{up} = 0$, $T_{left} = 0$, $T_{lower} = 0$ y $T_{right} = 80$

Un segundo ejemplo fue corrido, seleccionando una distribución no-simétrica de temperaturas: $T_{up} = 20$, $T_{left} = 40$, $T_{lower} = 60$ and $T_{right} = 80$. En la Fig. 4 se muestra la distribución estacionaria de temperaturas resultante con las partículas coloreadas de acuerdo a su temperatura.

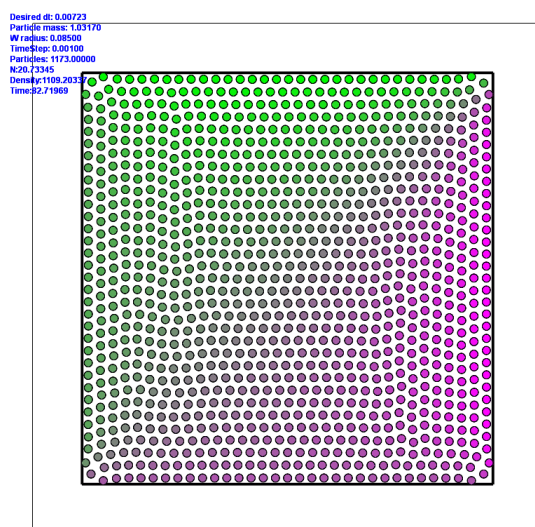


Figura 4: Solución estacionaria del problema puro de conducción del calor. Las paredes son isotermas con temperaturas: $T_{up} = 20$, $T_{left} = 40$, $T_{lower} = 60$ y $T_{right} = 80$

En la Fig. 5, se muestran el perfil de temperaturas alcanzado en el sector medio de la cavidad que corresponde a una línea horizontal en $y = 0,5$. Con el propósito de validar nuestra formulación el perfil de temperaturas se compara con el obtenido usando el método de Elementos Finitos. Se muestra la gran concordancia entre ambas soluciones.

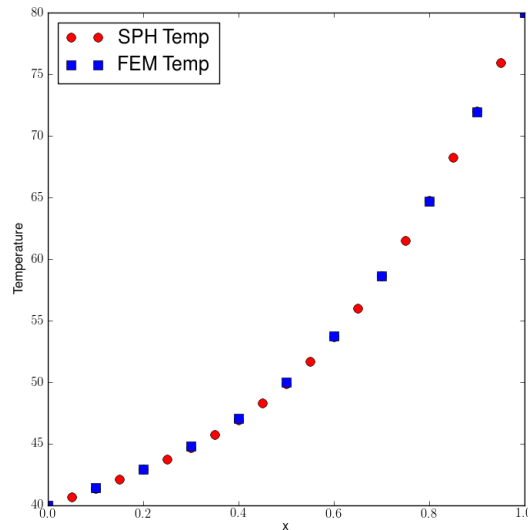


Figura 5: Perfil de temperaturas del problema puro de conducción del calor en $y = 0,5$. Las paredes son isotermas con temperaturas: $T_{up} = 20$, $T_{left} = 40$, $T_{lower} = 60$ y $T_{right} = 80$

4.2. Soluciones numéricas con dinámica de fluidos y transferencia del calor

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones obtenidas donde ahora el fluido dentro de la cavidad sí está moviéndose de acuerdo a las leyes de movimiento (i.e. de acuerdo a las ecuaciones de Navier-Stokes). En este caso la transferencia de calor no solo ocurre por conducción sino también por advección. En los casos que se presentan el fluido se mueve como en el problema clásico de la cavidad cuadrada, es decir: $V_{up} = 1$, $V_{left} = 0$, $V_{lower} = 0$ y $V_{right} = 0$. En la Fig. 6 se muestra la distribución de temperaturas resultante para el caso en que $T_{up} = 0$, $T_{left} = 0$, $T_{lower} = 0$ y $T_{right} = 80$ (compárese este caso con el caso de fluido en reposo mostrado en Fig. 2). La diferencia en el comportamiento termico puede apreciarse más claramente en la Fig. 7 donde puede compararse el perfil de temperaturas resultantes en el sector medio de la cavidad para el caso de fluido en movimiento (en rojo) con el caso de fluido en reposo (en azul).

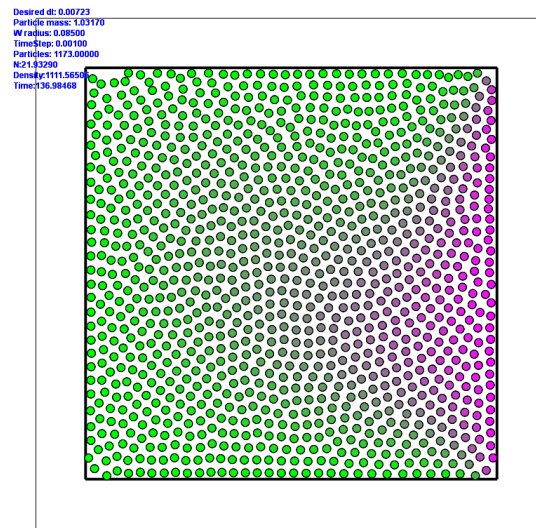


Figura 6: Solución pseudo-estacionaria del problema mixto de dinámica de fluidos con transferencia del calor. Las paredes son isotermas con temperaturas: $T_{up} = 0$, $T_{left} = 0$, $T_{lower} = 0$ y $T_{right} = 80$

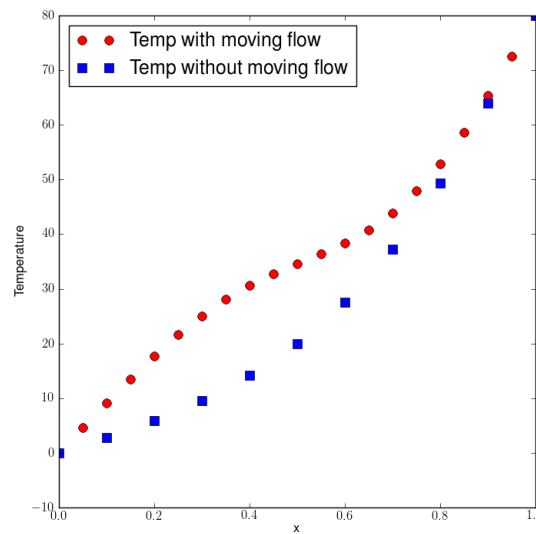


Figura 7: Perfil de temperaturas del problema mixto de dinámica de fluidos con transferencia del calor en $y = 0,5$. Las paredes son isotermas con temperaturas: $T_{up} = 0$, $T_{left} = 0$, $T_{lower} = 0$ y $T_{right} = 80$

Similarmente, en la Fig. 8 se muestra la distribución de temperaturas resultante para el caso de distribución no simétrica de temperaturas en que $T_{up} = 20$, $T_{left} = 40$, $T_{lower} = 60$ y $T_{right} = 80$ (compárese este caso con el caso de fluido en reposo mostrado en Fig. 4). La diferencia en el comportamiento termico puede apreciarse más claramente en la Fig. 9 donde puede compararse el perfil de temperaturas resultantes en el sector medio de la cavidad para el caso de fluido en movimiento con el caso de fluido en reposo.

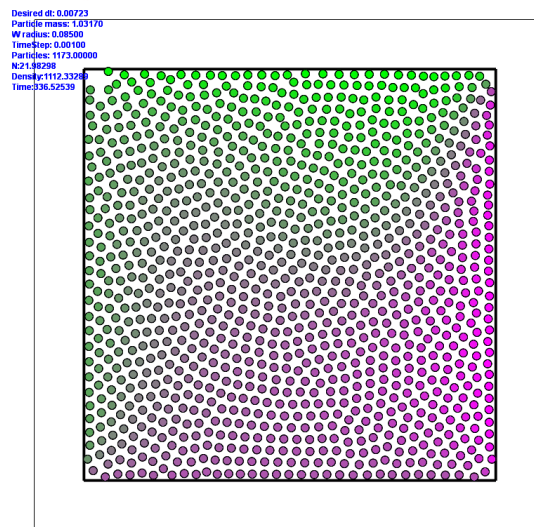


Figura 8: Solución pseudo-estacionaria del problema mixto de dinámica de fluidos con transferencia del calor. Las paredes son isotermas con temperaturas: $T_{up} = 20$, $T_{left} = 40$, $T_{lower} = 60$ y $T_{right} = 80$

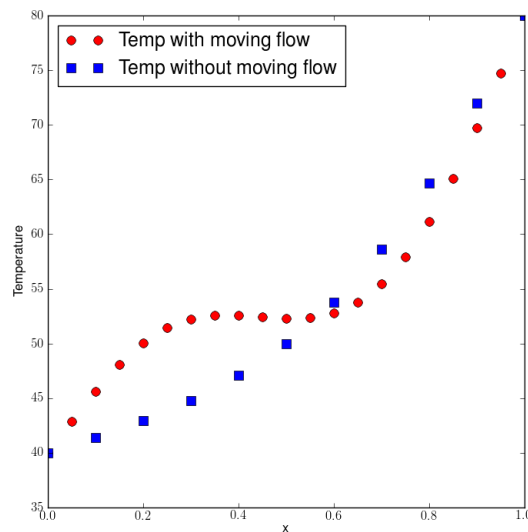


Figura 9: Perfil de temperaturas del problema mixto de dinámica de fluidos con transferencia del calor en $y = 0,5$. Las paredes son isotermas con temperaturas: $T_{up} = 20$, $T_{left} = 40$, $T_{lower} = 60$ y $T_{right} = 80$

5. CONCLUSIONES

Se presentó una formulación basada en SPH para simular problemas de dinámica de fluidos y de transferencia del calor. La formulación ha sido valida en el problema clásico de conducción del calor en la cavidad cuadrada y aplicada exitosamente cuando ambos fenómenos, dinámica de fluidos y transferencia de calor, se combinan a través de advección. Los resultados son realmente promisorios con grandes perspectivas si se tienen en cuenta la simplicidad de la formulación,

su extensibilidad y su cómputo en paralelo usando más de un procesador. Se planea continuar el presente trabajo, realizando más validaciones y simulaciones numéricas en problemas que incluyen convección natural, geometrías más complejas y condiciones de contorno mixtas.

REFERENCIAS

- Becker M. y Teschner M. Weakly compressible sph for free surface flows. En J. Popovic y D. Metaxas, editores, *SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*. 2007.
- Cleary P., HA J., Mooney J., y Ahujal V. Effect of heat transfer and solidification on high pressure die casting. *13th Australasian Fluid Mechanics Conference*, 1:1–4, 1998.
- Cleary P. y Monaghan J. Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 148:227–264, 1999.
- Cleary P.W. Sph technical note #8. new implementation of viscosity: Tests with couette flows. Informe Técnico, CSIRO Division of Mathematics and Statistics, 1996.
- Cleary P.W. Modelling confined multi-material heat and mass flows using sph. *Applied Mathematical Modelling*, 22:981–993, 1998.
- Gingold R.A. y Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, 1977.
- Jeong J., Jhona M., Halowb J., y van Osdol. Smoothed particle hydrodynamics: Applications to heat conduction. *Computer Physics Communications*, 153:71–84, 2003.
- Koumoutsakos P. Multiscale flow simulations using particles. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37:457–487, 2005.
- Limache A. y Rojas-Fredini P. Validation of a new sph variant using analytical solutions of planar taylor-couette flows. *computers & fluids*, in review, Dec 2010.
- Limache A., Sanchez P., Dalcin L., y Idelsohn S. Objectivity tests for navier-stokes simulations: the revealing of non-physical solutions produced by laplace formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1703–1759, 2008.
- Liu M. y Liu G. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003.
- Lucy L.B. Numerical approach to testing the fission hypothesis,. *Astronomical Journal*, 82:1013–1024, 1977.
- Monaghan J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 30:543–574, 1992.
- Monaghan J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68:1703–1759, 2005.
- Rojas-Fredini P. y Limache A. Parallel sph performance study. *IEEE transactions on Parallel and Distributed Systems*, submitted, Jan 2011.
- Rook R., Yildiz M., y Dost S. Modeling transient heat transfer using sph and implicit time integration. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 51:1–23, 2008.
- Thiagarajan K.P. y Rafiee A. An sph projection method for simulating fluid-hypoelastic structure interaction. *Comput. Methods Appl. Mecha. Engrg.*, 198:2785–2795, 2009.