

DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS COMPUESTAS LAMINADAS SUJETAS A CARGAS INCIERTAS

Florencia Reguera^{a,b,c} y Víctor H. Cortínez^{a,b}

^a *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), 11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

^b *CONICET, Argentina*

^c *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

Palabras clave: Diseño óptimo, incertidumbre, vigas de paredes delgadas, materiales compuestos.

Resumen. En el presente trabajo se formula un modelo de diseño óptimo de vigas de pared delgada construidas con material compuesto que considera la incertidumbre de las cargas actuantes. Desde el punto de vista matemático, el problema de optimización se plantea en dos niveles, uno de ellos busca la situación de carga más desfavorable y el otro la mejor configuración para soportar dicha carga. El método de diseño propuesto hace uso de una formulación unidimensional con el correspondiente análisis de elementos finitos, incluye un análisis de pandeo local simplificado y es resuelto aplicando la técnica de optimización *simulated annealing*.

1 INTRODUCCIÓN

Frecuentemente se presentan situaciones en las cuales las cargas actuantes sobre una estructura no son conocidas de manera precisa, sino que existe una familia de posibles estados de carga solicitando a la estructura. Por ello, la misma debe diseñarse a los efectos de poder resistir la peor condición inducida por la carga incierta considerada. El problema de optimización estructural debe contemplar adecuadamente tal situación para no caer en alternativas de diseño que ofrezcan máxima seguridad ante las cargas nominales, la cual no logra alcanzarse en la realidad debido a la incertidumbre mencionada.

En el presente trabajo se realiza el diseño óptimo de vigas bisimétricas ortótropas maximizando una función de diseño adimensional contemplando el caso de carga más desfavorable, en problemas en los que existe incertidumbre en la información disponible sobre la carga aplicada. El problema de optimización permite hallar las dimensiones de la sección transversal óptimas y la laminación óptima maximizando la carga crítica de pandeo y minimizando el peso de la viga. El dominio de incertidumbre se define como una variación en la aplicación de la carga en la viga, asumiendo que pueden existir cargas accidentales. El espacio de soluciones factibles se encuentra restringido por condiciones de resistencia, pandeo global y local, condiciones geométricas y seccionales.

El análisis estructural se realiza en base al modelo desarrollado Cortínez y Piovan (2006) el cual considera en forma completa efectos de flexibilidad por corte. Se emplean formulaciones numéricas establecidas a partir del método de elementos finitos para la resolución de problemas estáticos, dinámicos y de inestabilidad lineal de vigas de pared delgada compuestas. Además, se incluyen efectos de distorsión seccional contemplados en forma simplificada, siguiendo la metodología desarrollada en Kollár (2003). Para ello, se obtienen soluciones analíticas para estimar las resultantes de tensión de pandeo en placas compuestas sometidas a cargas distribuidas linealmente.

2 PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

A los efectos de explicar la metodología propuesta se considera una viga tipo I bisimétrica doblemente empotrada sometida a cargas de flexión en el plano, como se muestra en la Figura 1. Sin embargo debe tenerse en cuenta que la misma resulta aplicable a vigas de pared delgada de sección arbitraria.

Se pretende determinar las dimensiones de la sección transversal y la secuencia de laminación, para lograr una resistencia máxima. Como indicador de resistencia se adopta la carga de pandeo global (flexo-torsional) considerando que para estas estructuras éste es el modo de falla dominante en muchas ocasiones. Simultáneamente se busca obtener el diseño que minimice el área de la sección transversal. Estos objetivos resultan contrapuestos. Para obtener un criterio de diseño que signifique un compromiso entre ambos objetivos, aquí se adopta una función de diseño compuesta adimensional definida como

$$F = \frac{M_{cr}}{a_{11} A^{3/2}} \quad (1)$$

donde A es el área de la sección transversal, a_{11} es el módulo de elasticidad longitudinal equivalente del laminado y M_{cr} es el momento crítico dado por la siguiente expresión:

$$M_{cr} = \lambda M_0^{ref} = \lambda \frac{Q_0 L^2}{12} \quad (2)$$

λ es el factor que debe aplicarse sobre la carga actuante para alcanzar la inestabilidad

elástica global de la estructura.

Debe observarse que la función (1) aumenta si lo hace el multiplicador de carga λ o si disminuye el área de la sección transversal. Por lo tanto, la maximización de la función (1) constituye el objetivo del problema de diseño.

En este trabajo se considera que las cargas actuantes en la estructura presentan cierta incertidumbre. En particular, se analizan dos tipos de cargas inciertas. En el primer caso (C1), se supone que la carga vertical nominal puede desviarse cierto ángulo α respecto de la vertical, generando a su vez una carga distribuida horizontal. En un segundo caso (C2) se supone una carga nominal vertical distribuida y, actuando simultáneamente, una carga accidental en dirección horizontal (de magnitud menor a la carga nominal). Estos estados de carga definen el dominio de incertidumbre de las variables (N_z, N_y). Es decir, las variables de incertidumbre son α en el caso C1 y β en el caso C2.

Para efectuar el diseño óptimo según la función objetivo (1), considerando la incertidumbre aludida, se aplica el criterio min-max. Éste es un problema de optimización en dos niveles consistente en determinar la condición más desfavorable con respecto a las cargas, es decir, el mínimo valor de la carga de pandeo expresada mediante el multiplicador λ , y el resultado obtenido utilizarlo en la función objetivo (1) para maximizarla con respecto a las variables de diseño. El problema de optimización interno es a veces denominado anti-optimización y el externo optimización.

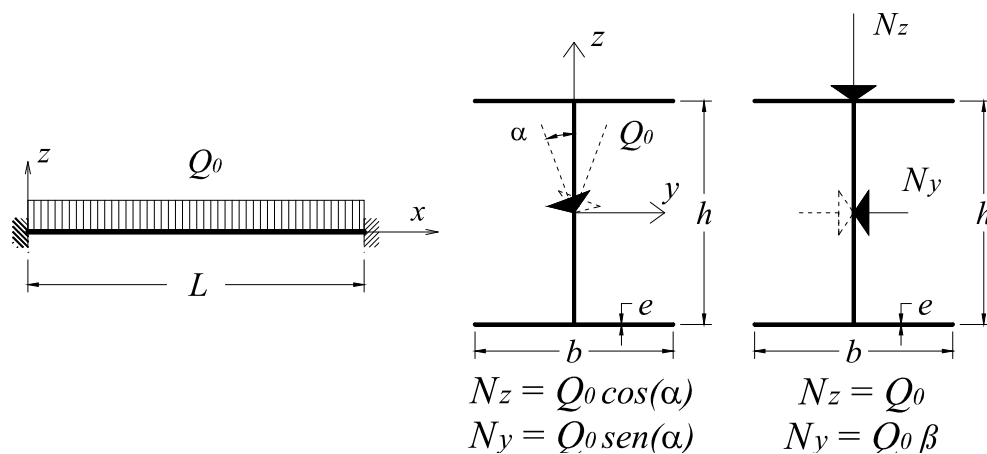


Figura 1: Condiciones de borde y estados de carga.

De acuerdo a lo explicado, el problema de diseño óptimo puede ser formulado matemáticamente de la siguiente manera:

$$(\theta_k^*, b^*, h^*, e^*, N^*) = \arg \max_{(\theta_k, b, h, e)} \left(\min_{N=(N_z, N_y)} \frac{M_{cr}}{a_{11} A^{3/2}} \right) \quad (3)$$

donde, los ángulos θ_k indican la orientación de las fibras longitudinales de la capa k-esima, (b, h, e) son las dimensiones de la sección que se indican en la Figura 1.

El problema de diseño se encuentra sujeto a restricciones geométricas y estructurales que se describen a continuación.

$$\begin{aligned} (b, h, e) > 0, \quad \min(b, h)/e \geq 10, \quad A \leq A_{\max} \\ \lambda \geq 1, \quad N_x \leq N_{xcr}, \\ R_{\min} \geq 1, \quad \delta \leq \delta_{\max} \end{aligned} \quad (4)$$

En cuanto a las restricciones geométricas se solicita que las dimensiones de la sección (b , h , e) sean positivas en todo el dominio y, a su vez, deben verificar la condición de vigas de pared delgada. Además, se establece que el área transversal de la viga no supere un valor máximo (A_{max}).

Respecto a las verificaciones estructurales, se requiere que el desplazamiento total no supere un valor máximo pre-establecido (δ_{max}) y que la estructura cumpla con las condiciones de resistencia (R), pandeo global (λ) y pandeo local (N_{xcr}). La manera en que se obtienen estos parámetros se detalla en la sección siguiente.

3 ECUACIONES BÁSICAS Y MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

3.1 Modelo de viga de pared delgada

El análisis estructural se realiza en base al modelo desarrollado por Cortínez y Piovan (2006), empleando formulaciones numéricas establecidas a partir del método de elementos finitos. El modelo permite el análisis lineal de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos, a partir del cual se hallan los valores de los desplazamientos, las tensiones y las cargas de pandeo empleados en el diseño óptimo de la estructura. El desarrollo de esta teoría ha sido presentado y validado en otras publicaciones, donde puede verse en más detalle (Cortínez y Piovan, 2006; Piovan y Cortínez, 2007).

De acuerdo a las hipótesis del modelo estructural mencionado, se utiliza un elemento finito de viga recta que consta de dos nodos con siete grados de libertad cada uno, se obtiene el siguiente sistema de autovalores:

$$([K] + \lambda[K_G])\{W\} = \{0\} \quad (5)$$

Las cargas críticas de pandeo global de la estructura se obtienen resolviendo el problema de autovalores dado anteriormente, donde $\{W\}$ es el vector global de desplazamientos, $[K]$ y $[K_G]$ son las matrices de rigidez y de rigidez geométrica globales, respectivamente, siendo λ el parámetro de pandeo global que relaciona la carga crítica con la carga de referencia inicial. De esta manera, la función objetivo y la condición de estabilidad global de la estructura quedan establecidas.

A fin de establecer una condición de resistencia, el estado límite de tensión a partir del cual el laminado presenta daños se define, en forma aproximada, a partir de la falla de la primera lámina. La carga para la cual esto ocurre se predice a través de los criterios de falla de laminados simples (Barbero, 1998). En este caso, se utiliza el criterio de falla de Tsai-Wu, el cual establece la siguiente condición:

$$R = \frac{1}{a}(-b + \sqrt{b^2 + a}) \quad (6)$$

donde,

$$a = f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + f_{66}\sigma_6^2 + f_{44}\sigma_4^2 + f_{55}\sigma_5^2 \quad (7)$$

$$b = \frac{1}{2}(f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2) \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}}, & f_2 &= \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}}, & f_{11} &= \frac{1}{F_{1t}F_{1c}}, & f_{22} &= \frac{1}{F_{2t}F_{2c}}, \\
 f_4 &= \frac{1}{(F_4)^2}, & f_5 &= \frac{1}{(F_5)^2}, & f_6 &= \frac{1}{(F_6)^2}, & f_{12} &= -\frac{1}{2\sqrt{F_{1t}F_{1c}F_{2t}F_{2c}}}
 \end{aligned} \quad (9)$$

Donde R es el factor de seguridad del laminado en un determinado punto de la sección, σ_i son las tensiones en las direcciones principales del laminado ($i = 1, 2, \dots, 6$), F_{1t} es la resistencia a tracción longitudinal, F_{1c} es la resistencia a compresión longitudinal, F_{2t} es la resistencia a tracción transversal, F_{2c} es la resistencia a compresión transversal, F_4 y F_5 son las resistencias a corte interlaminares y F_6 es la resistencia a corte membranal. El factor de seguridad se evalúa en diferentes puntos de la sección transversal, en las zonas superior e inferior de cada capa del laminado y en distintos puntos sobre la longitud de la viga (Reguera et al., 2009). Luego, la condición de resistencia se verifica cuando el valor mínimo de R es superior a 1.

3.2 Modelo de placa para el pandeo local

La inestabilidad local es una restricción importante que debe considerarse al plantear el problema de diseño cuando se trata de vigas de paredes delgadas. La carga crítica de pandeo local se evalúa en forma simplificada, haciendo referencia a las hipótesis adoptadas por Kollár (2003). En dicho análisis se modela cada segmento de la sección transversal como una placa de gran longitud, asumiendo que los ejes comunes a dos o más placas permanecen rectos. Luego, la resultante de tensión de pandeo se determina considerando a cada pared de la viga como una placa individual restringida rotacionalmente por el segmento adyacente. Finalmente, estos valores son comparados con las resultantes de tensión en el espesor de la viga en la dirección x , obtenidas de acuerdo al modelo estructural adoptado.

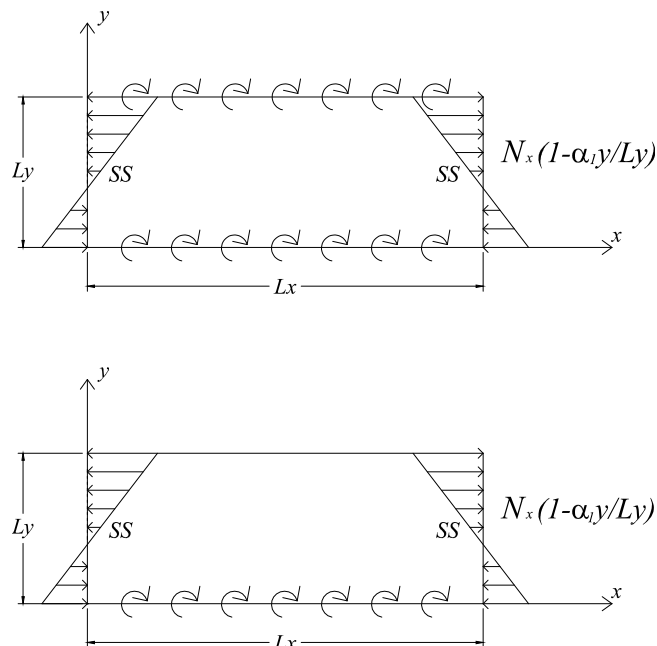


Figura 2: Geometría y condiciones de borde de placas ortótropas.

Se consideran placas ortótropas bajo cargas axiales distribuidas linealmente sobre los bordes simplemente apoyados, para dos condiciones de borde en los ejes descargados:

empotradas elásticamente en ambos extremos (RR) ó empotradas elásticamente en un único extremo (RF), como se indica en la Figura 2. El problema de autovalores que permite obtener una expresión analítica para la resultante de tensión de pandeo crítica surge a partir de aplicar el método de Ritz al siguiente funcional de energía:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \dots \\ & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_L \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_R \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} N_x \left(1 - \frac{\alpha_1 y}{L_y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

donde, los parámetros D_{ij} son las rigideces flexionales del laminado (Kollár, 2003), k_R y k_L son las rigideces rotacionales de los empotramientos elásticos en $y = 0$ y en $y = b$, respectivamente. En el caso de placas empotradas-libres, $k_L = k$ y $k_R = 0$. Se propone una función de desplazamiento general que tiene la siguiente forma:

$$w(x, y) = \phi(y) \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L_x} \quad (11)$$

La función $\phi(y)$ debe satisfacer las condiciones de borde de la placa. En el caso de placas restringidas rotacionalmente en sus dos bordes, la función $\phi(y)$ adoptada (Qiao, 2005) y las condiciones de borde que debe cumplir son las siguientes:

$$\text{Si } \alpha_1 \leq 1,7 \text{ ó } \alpha_1 \geq 2,5$$

$$\phi(y) = \frac{y}{L_y} + \psi_1 \frac{y^2}{L_y^2} + \psi_2 \frac{y^3}{L_y^3} + \psi_3 \frac{y^4}{L_y^4} \quad (12)$$

$$w(x, 0) = 0$$

$$w(x, L_y) = 0$$

$$M_y(x, 0) = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k_L \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (13)$$

$$M_y(x, L_y) = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=L_y} = k_R \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=L_y}$$

Para ciertos casos de carga, se adopta una función de desplazamiento con un orden de magnitud mayor al anterior, la cual se muestra a continuación y se agrega la siguiente condición dependiente del valor de α_1 :

$$\phi(y) = \frac{y}{L_y} + \psi_1 \frac{y^2}{L_y^2} + \psi_2 \frac{y^3}{L_y^3} + \psi_3 \frac{y^4}{L_y^4} + \psi_4 \frac{y^5}{L_y^5}$$

$$\text{Si } 2 \leq \alpha_1 < 2,5, \quad w(x, 0, 40L_y) = 0$$

$$\text{Si } 1,7 < \alpha_1 < 2, \quad w(x, 0, 60L_y) = 0 \quad (14)$$

Por lo tanto, la función de desplazamiento adoptada en el caso de placas bi-empotradas elásticamente es distinta según la pendiente de la carga aplicada (α_1) y se define de la siguiente manera:

Si $\alpha_1 \leq 1,7$ ó $\alpha_1 \geq 2,5$

$$\phi(y) = \frac{y}{L_y} + \frac{k_L y^2}{2D_{22}L_y} - \frac{12D_{22}^2 + 5D_{22}k_L L_y + 3D_{22}k_R L_y + k_L k_R L_y^2}{D_{22}(6D_{22} + k_R L_y)} \frac{y^3}{L_y^3} - \dots$$

$$\dots - \frac{12D_{22}^2 + 4D_{22}k_L L_y + 4D_{22}k_R L_y + k_L k_R L_y^2}{2D_{22}(6D_{22} + k_R L_y)} \frac{y^4}{L_y^4}$$
(15)

Si $2 \leq \alpha_1 < 2,5$

$$\phi(y) = \frac{y}{L_y} + \frac{k_L y^2}{2D_{22}L_y} - \frac{3(488D_{22}^2 + 80D_{22}k_L L_y + 57D_{22}k_R L_y + 9k_L k_R L_y^2)}{4D_{22}(28D_{22} + 3k_R L_y)} \frac{y^3}{L_y^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{1141D_{22}^2 + 147D_{22}k_L L_y + 147D_{22}k_R L_y + 18k_L k_R L_y^2}{2D_{22}(28D_{22} + 3k_R L_y)} \frac{y^4}{L_y^4} - \dots$$

$$\dots - \frac{5(186D_{22}^2 + 22D_{22}k_L L_y + 27D_{22}k_R L_y + 3k_L k_R L_y^2)}{4D_{22}(28D_{22} + 3k_R L_y)} \frac{y^5}{L_y^5}$$
(16)

Si $1,7 < \alpha_1 < 2$

$$\phi(y) = \frac{y}{L_y} + \frac{k_L y^2}{2D_{22}L_y} - \frac{(1636D_{22}^2 + 345D_{22}k_L L_y + 164D_{22}k_R L_y + 33k_L k_R L_y^2)}{18D_{22}(11D_{22} + k_R L_y)} \frac{y^3}{L_y^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{2368D_{22}^2 + 381D_{22}k_L L_y + 256D_{22}k_R L_y + 39k_L k_R L_y^2}{18D_{22}(11D_{22} + k_R L_y)} \frac{y^4}{L_y^4} - \dots$$

$$\dots - \frac{5(186D_{22}^2 + 27D_{22}k_L L_y + 22D_{22}k_R L_y + 3k_L k_R L_y^2)}{18D_{22}(11D_{22} + k_R L_y)} \frac{y^5}{L_y^5}$$
(17)

En el caso de placas empotradas elásticamente-libres, la función que define el desplazamiento es idéntica para todo α_1 y tiene la siguiente expresión:

$$\phi(y) = (1 - \omega) \frac{y}{L_y} + \omega \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{L_y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{L_y} \right)^3 \right]$$
(18)

Las condiciones de borde que debe cumplir están dadas por:

$$w(x, 0) = 0$$

$$M_y(x, 0) = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$M_y(x, L_y) = \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=L_y} = 0$$

$$V_y(x, L_y) = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]_{y=L_y} = 0$$
(19)

El valor de ω se determina de manera que cumpla con las condiciones de borde, obteniendo la siguiente función de desplazamiento para placas empotradas elásticamente-

libres:

$$\phi(y) = \left(1 - \frac{kL_y}{3D_{22} + kL_y}\right) \frac{y}{L_y} + \frac{kL_y}{3D_{22} + kL_y} \left(\frac{3y^2}{2L_y^2} - \frac{y^3}{2L_y^3}\right) \quad (20)$$

Reemplazando las ecuaciones (15), (16), (17) y (20) en (11) y luego, reemplazando la función obtenida ($w(x,y)$) en el funcional (10), se obtiene la solución al problema de autovalores, correspondiente a la resultante de tensión de pandeo de la placa (N_x , por unidad de longitud), en función de la relación de lados de la placa ($c = L_x/L_y$). Minimizando la expresión de N_x respecto a la relación de lados (es decir, $dN_x/dc = 0$), se obtiene la resultante de tensión de pandeo mínima.

Las expresiones analíticas halladas para el caso de placas restringidas en ambos bordes son muy extensas y no serán escritas aquí, siendo además de poca utilidad para su uso práctico. Sin embargo, a continuación se muestran las expresiones de las resultantes de tensión críticas para placas para las siguientes condiciones de borde: un extremo restringido rotacionalmente y el otro libre (RF), un borde simplemente apoyado y el otro libre (SF) y ambos bordes simplemente apoyados (SS).

$$N_{x,cr}^{RF} = \frac{96(420D_{22}^2D_{66} - 35D_{22}kL_y(D_{12} - 8D_{66}) - 7k^2L_y^2(D_{12} - 8D_{66}))}{L_y^2(840D_{22}^2(4 - 3\alpha_1) + 56D_{22}kL_y(33 - 26\alpha_1) + k^2L_y^2(264 - 215\alpha_1))} + \dots$$

$$\dots + \frac{\sqrt{35D_{11}D_{22}kL_y(3D_{22} + kL_y)(140D_{22}^2 + 77D_{22}kL_y + 11k^2L_y^2)}}{L_y^2(840D_{22}^2(4 - 3\alpha_1) + 56D_{22}kL_y(33 - 26\alpha_1) + k^2L_y^2(264 - 215\alpha_1))} \quad (21)$$

$$N_{x,cr}^{SF} = \frac{48D_{66}}{L_y^2(4 - 3\alpha_1)} \quad (22)$$

$$\text{Si } \alpha_1 \neq 2, \quad N_{x,cr}^{SS} = \frac{24(51D_{12}\sqrt{D_{11}D_{22}^4} + 2D_{11}\sqrt{651D_{22}^5} + 102D_{66}\sqrt{D_{11}D_{22}^4})}{31L_y^2\sqrt{D_{11}D_{22}^4}(2 - \alpha_1)} \quad (23)$$

$$\text{Si } \alpha_1 = 2, \quad N_{x,cr}^{SS} = \frac{\pi^2}{L_y^2} (13,9\sqrt{D_{11}D_{22}} + 11,1(D_{12} + 2D_{66})) \quad (24)$$

La resultante de tensión $N_{x,cr}^{SF}$ se obtiene a partir de la expresión de $N_{x,cr}^{RF}$ teniendo en cuenta que en el borde simplemente apoyado la constante de rigidez k es nula. Asimismo, la expresión de $N_{x,cr}^{SS}$ surge a partir del caso RR, asumiendo que $k_R = k_L = 0$. Cuando $\alpha_1 = 2$, el denominador de la ecuación (22) se anula, generando una singularidad. Sólo para este caso en particular, adoptamos como solución la expresión (23), dada por Lekhniskii (1968).

Las soluciones obtenidas sólo tienen validez para laminados ortótropos y fueron comparadas con los resultados de modelos tridimensionales de elementos lámina programados en ABAQUS 6.7®, obteniendo diferencias máximas inferiores al 20 %.

Por lo tanto, para analizar el pandeo local en la viga, primero se considera a cada pared de la sección como una placa simplemente apoyada y se calcula la carga crítica para cada una de ellas. En el caso particular de una viga tipo I, se determina la carga de pandeo de las alas como si fueran placas apoyadas-libres ($N_{x,cr,ala}$) y la carga de pandeo del alma suponiéndola simplemente apoyada ($N_{x,cr,alma}$). Luego, se debe evaluar a qué pared corresponde la menor carga crítica y sobre ella realizar el análisis de pandeo como una placa restringida

rotacionalmente, teniendo en cuenta la rigidez que aporta la placa adyacente, de la siguiente forma:

$$\text{si } (N_{x,cr})_{ala} < (N_{x,cr})_{alma}, \quad \tilde{k} = \frac{D_{22}}{h} \left(1 - \frac{(N_{x,cr})_{ala}}{(N_{x,cr})_{alma}} \right) \quad (25)$$

$$\text{si } (N_{x,cr})_{ala} > (N_{x,cr})_{alma}, \quad \tilde{k} = \frac{2D_{22}}{b} \left(1 - \frac{(N_{x,cr})_{alma}}{(N_{x,cr})_{ala}} \right) \quad (26)$$

3.3 Método de optimización

El problema de diseño se resuelve mediante la aplicación del método *simulated annealing*, introducido originalmente por Kirkpatrick et al. (1983), el cual se basa en la generación de soluciones factibles en forma aleatoria y su principal característica es evitar la convergencia local en problemas de gran escala. El esquema general del algoritmo está detalladamente explicado en Kirkpatrick et al. (1983) y ha sido presentado por los autores en otros trabajos (Reguera y Cortínez, 2010). Sin embargo, es conveniente aclarar que la temperatura inicial debe ser lo suficientemente alta para que la solución final sea independiente de la solución inicial y el proceso de optimización no quede atrapado en un mínimo local. Para ello, se adopta como temperatura inicial (T_0) la siguiente expresión expuesta por Dréo y Pétrowski (2006):

$$T_0 = r \cdot \max \Delta C_{ij} \quad (27)$$

Donde ΔC_{ij} es la variación de la función objetivo y r es mucho mayor que 1.

Por otro lado, la función que determina y controla el descenso de la temperatura tiene un papel fundamental en la eficiencia del método, puesto que define el criterio de convergencia del algoritmo. En este trabajo se aplica el siguiente esquema de enfriamiento, desarrollado por Vidal (2003):

$$T_{i+1} = \frac{T_i}{1 + T_i^2} \quad (28)$$

Su implementación logra disminuir los tiempos de cálculo, ya que la temperatura disminuye a mayor velocidad que en el esquema geométrico, aún cuando las temperaturas iniciales son altas.

Por otro lado, el problema de anti-optimización, que define la condición de carga más desfavorable, se resuelve haciendo una búsqueda exhaustiva en el dominio propuesto, debido a que los intervalos de variación propuestos para las cargas inciertas son pequeños.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

A fin de evaluar el diseño propuesto se analiza una viga compuesta de Grafito-Epoxi T300/5208, cuyas propiedades son: $E_1 = 181$ GPa, $E_2 = 10.3$ GPa, $G_{12} = 7.17$ GPa, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_{23} = 0.59$, $F_{1t} = 1500$ MPa, $F_{1c} = 1500$ MPa, $F_{2t} = 40$ MPa, $F_{2c} = 246$ MPa, $F_6 = 68$ MPa. Como se muestra en la Figura 1, el análisis se realiza para una viga de pared delgada tipo I empotrada en sus dos extremos, de 6 metros de longitud. La sección transversal máxima establecida es de 0.01 m^2 , admitiendo un desplazamiento máximo $\delta_{max} = L/400 = 0.015 \text{ m}$.

El problema se resolvió para los dos casos de incertidumbre descritos en la sección 1 (casos C1 y C2) considerando una magnitud de carga $Q_0 = 20$ kN. Las variables de diseño se

definen en los siguientes intervalos: $(b, h) = [0.1:0.02:0.8]$ m, $e = [0.004:0.001:0.1]$ m, $\theta_k = [0, 90, -90]$, adoptando laminaciones con un número fijo de capas.

En primer lugar, se resuelve el problema de diseño sin considerar la incertidumbre en la carga, a fin de evaluar la robustez de los diseños. Para esto, se define la misma carga nominal de referencia, es decir, una carga distribuida en el sentido negativo de z , de magnitud Q_0 . Los resultados obtenidos se muestran en las Tablas 1 y 2.

En el caso C1, se adoptan los siguientes tres intervalos de variación del ángulo de inclinación de la carga (α): $I_{10} = [-10^\circ:5^\circ:10^\circ]$, $I_{20} = [-20^\circ:10^\circ:20^\circ]$, $I_{30} = [-30^\circ:15^\circ:30^\circ]$. Los resultados de este análisis se muestran en la Tabla 1. Se observa que la solución óptima obtenida en el caso C1- I_{30} es diferente a las soluciones halladas en los casos anteriores. Esto se debe a que cuando α supera los 30° no se verifica la restricción de pandeo local con la solución anterior.

Los resultados para el caso de diseño C2 se muestran en la Tabla 2, suponiendo que la magnitud de la carga secundaria N_y adopta distintos valores definidos en relación a la carga nominal ($N_y = I\%N_z$). Para ello, se especifican los siguientes intervalos: $I_{10} = [-0.10:0.05:0.10]$, $I_{20} = [-0.20:0.10:0.20]$, $I_{30} = [-0.30:0.15:0.30]$, $I_{40} = [-0.40:0.20:0.40]$, $I_{50} = [-0.50:0.25:0.50]$. Bajo este estado de carga, el diseño ofrece mayor seguridad frente al pandeo global al considerar la incertidumbre de la carga, dado que la situación más desfavorable se produce siempre que exista la carga horizontal. Para este ejemplo en particular, se observa que cuando la carga accidental supera en más de un 40 % a la carga nominal, se activa la condición de pandeo local.

Casos	N^* [kN]	b^* [m]	h^* [m]	e^* [m]	Laminado	Costo Mínimo
Nominal	-	0.36	0.68	0.007	[0/90/90/0]	31.08
C1 - I_{10}	(-20,0)	0.36	0.68	0.007	[0/90/90/0]	31.08
C1 - I_{20}	(-20,0)	0.36	0.68	0.007	[0/90/90/0]	31.08
C1 - I_{30}	(-20,0)	0.38	0.46	0.008	[0/90/90/0]	34.74

Tabla 1: Diseños óptimos para el caso C1.

Casos	N^* [kN]	b^* [m]	h^* [m]	e^* [m]	Laminado	Costo Mínimo
Nominal	-	0.36	0.68	0.007	[0/90/90/0]	31.08
C2 - I_{10}	(-20, ± 2)	0.36	0.68	0.007	[0/90/90/0]	31.11
C2 - I_{20}	(-20, ± 4)	0.36	0.68	0.007	[0/90/90/0]	31.19
C2 - I_{30}	(-20, ± 6)	0.36	0.68	0.007	[0/90/90/0]	31.32
C2 - I_{40}	(-20, ± 8)	0.36	0.64	0.007	[0/90/90/0]	32.13
C2 - I_{50}	(-20, ± 10)	0.38	0.46	0.008	[0/90/90/0]	36.60

Tabla 2: Diseños óptimos para el caso C2.

Los tiempos de cálculo fueron del orden de 10 minutos en los problemas de optimización min-max resueltos (C1, C2) y de 5 minutos en el caso en que se considera sólo carga nominal, lo cual confirma la eficiencia del algoritmo de optimización implementado. Cabe destacar que se utilizó un procesador DualCore Intel Wolfdale de 2533 MHz, con 2044 MB de memoria RAM.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se formuló y se resolvió un problema de optimización min-max destinado al diseño de vigas compuestas de pared delgada, contemplando cierta incertidumbre en lo que se refiere a la carga nominal de la estructura que puede afectar el comportamiento de la misma. El diseño propuesto fue resuelto satisfactoriamente a través de la aplicación de la técnica de optimización *simulated annealing*, determinando las dimensiones de la sección transversal de la viga y el laminado óptimo que maximizan la seguridad al pandeo global y minimizan el peso de la viga en forma simultánea, siempre considerando la situación más desfavorable. Además, se proponen fórmulas analíticas para determinar la resultante de tensión crítica en placas sujetas a cargas axiales linealmente distribuidas, bajo distintas condiciones de borde.

Se obtuvieron resultados acordes a los esperados, se logró realizar un diseño robusto de la estructura en casos en los que existe incertidumbre en la carga aplicada. El problema de optimización puede plantearse dentro de un dominio de variables más complejo, en el cual se incluyan como variables adicionales la cantidad de capas del laminado y/o distintos ángulos de orientación de las fibras.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y por el CONICET. El presente artículo forma parte del estudio de tesis doctoral realizado por Florencia Reguera, bajo la dirección de Víctor H. Cortínez y Marcelo T. Piovan, en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

REFERENCIAS

- Adali S., Lene F., Duvaut G., Chiaruttini, V. Optimization of laminated composites subject to uncertain buckling loads. *Composite Structures*, 62:261-269, 2003.
- Cortínez V. H., Piovan M. T. Stability of composite thin-walled beams with shear deformability. *Computers and Structures*, 84:978-990, 2006.
- Dréo J., Pétrowski A. *Metaheuristics for hard optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by Simulated Annealing. *Science*, (20)4598:671-680, 1983.
- Kollár L. P., Springer G. S. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, 2003.
- Lekhnitskii S. G. *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publisher, 1968.
- Magnucka-Blandzi E. Effective shaping of cold-formed thin-walled channel beams with double-box flanges in pure bending. *Thin-Walled Structures* 49:121-128, 2011.
- Piovan M. T., Cortínez V. H. Mechanics of shear deformable thin-walled beams made of composite materials. *Thin-Walled Structures*, 45:37-62, 2007.
- Qiao P., Shan L. Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes. *Composite Structures*, 70:468-483, 2005.
- Reguera F., Cortínez V. H., Piovan M. T. Diseño de vigas compuestas mediante elementos finitos. *Mecánica Computacional XXVIII, Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 2009.
- Reguera F., Cortínez V. H. Soluciones analíticas simplificadas para el diseño óptimo de vigas compuestas de paredes delgadas. *Mecánica Computacional XXIX, Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 2010.

Vidal M.C. *Un procedimiento heurístico para un problema de asignación cuadrática*. Tesis Mg. Matemática, Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 2003.