

## **MODELOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE INFILTRACIÓN EN PRESAS DE MATERIAL SUELTO. ANÁLISIS DE SU USO Y SENSIBILIDAD**

**Estela E. Reyna, Santiago M. Reyna**

*Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Mención en Recursos Hídricos, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Av. Vélez Sarsfield 1611 (Ciudad Universitaria), Argentina, estelaeugenia.reyna@gmail.com, santiagoreyna@gmail.com, maestriahidricos.unc@gmail.com*

**Palabras Clave:** Presa material suelto, infiltración, Métodos Analíticos, Método de Elementos Finitos (MEF), Método de Diferencias Finitas (MDF).

**Resumen.** Las presas de material suelto son el tipo de presa más antiguo en la historia del hombre. Estas presas tienen la ventaja de que pueden ubicarse en todo tipo de sitios.

Una de las principales desventajas de las presas de material suelto consiste en la infiltración tanto en el cuerpo de la presa como en su cimentación. La infiltración produce distintos efectos como pérdida de agua, presiones internas con componentes opuestas al efecto estabilizador del peso, y erosión interna progresiva (sifonamiento).

El objeto del presente trabajo fue el estudio de las infiltraciones, y de las presiones desarrolladas en presas de material suelto por medio de Métodos Analíticos y Métodos Numéricos en zona saturada y para régimen permanente. Se tomaron como casos de estudio las presas de La Barranquita y Cipión II. Estas presas se ubican al sur de la Provincia de Córdoba, y forman parte de las obras del Plan Nacional de Recursos Hídricos de la República Argentina.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las presas de material suelto, objeto del presente trabajo tienen varias ventajas: una concepción estructural simple, utilizan materiales disponibles localmente y sin tratamientos abaratando el costo final al no tener que transportar material procesado y cemento, el proceso de construcción es de gran mecanización y continuo sin la adición de ningún agente ligante, tienen gran adaptabilidad a distintos tipos de sitios desde valles anchos hasta cañones con laderas de bajas pendientes y por último se pueden ubicar tanto en rocas como en suelos blandos y compresibles o formaciones de suelos relativamente permeables.

Una de las principales desventajas de las presas de material suelto consiste en la infiltración tanto en el cuerpo de la presa como en su cimentación. La infiltración produce distintos efectos como pérdida de agua, presiones internas con componentes opuestas al efecto estabilizador del peso, disminución de la cohesión y su resistencia al rozamiento y erosión interna progresiva (sifonamiento) de la presa o su cimentación.

El objeto del presente trabajo fue el estudio de las infiltraciones, y de las presiones desarrolladas en presas de material suelto por medio de Métodos Analíticos y Métodos Numéricos en zona saturada y para régimen permanente. Se tomaron como casos de estudio las presas de La Barranquita y Cipión II. Estas presas se ubican al sur de la Provincia de Córdoba, y forman parte de las obras del Plan Nacional de Recursos Hídricos de la República Argentina.

Para el análisis de las Presas, se realizaron modelos simplificados que consistieron en a) considerar la fundación impermeable de manera de estudiar solamente el flujo que se infiltra a través del cuerpo de la presa y b) considerar el cuerpo de la presa impermeable de manera de estudiar el flujo a través de la fundación.

Para el caso a), en el que se considera la fundación impermeable, se determinaron las Líneas de Saturación, y los caudales infiltrados a través del cuerpo de la presa, según los métodos analíticos de Schaffnak – Van Iterson, A. Casagrande, Pavlovsky, Fragmentos (para flujo no confinado), Dupuit, y también con el Programa Plaxis 2D Versión 8 de elementos finitos, para comparar, puesto que la representación de la realidad (su modelo) es simple a pesar de ser el modelo computacional (herramienta de cálculo) complejo. Para el caso b), en el que se considera el cuerpo de la presa impermeable, se determinaron los caudales infiltrados por debajo del cuerpo de la presa, según el método de los Fragmentos (para flujo confinado), y con el Programa Plaxis 2D Versión 8 de elementos finitos.

Los modelos Analíticos tuvieron su apogeo en la década de los sesenta en el siglo pasado y fueron reemplazados debido a su complejidad por los modelos computacionales con el avance de la tecnología en la Informática. Es así que a partir de la década del 90, se dejan en forma casi definitiva la utilización de los métodos analíticos, siendo reemplazados por los métodos numéricos de diferencias finitas y de elementos finitos para la resolución de las ecuaciones diferenciales.

Las soluciones cerradas se conocen para casos donde se realizan simplificaciones, como medio semi infinito, continuo o discontinuo, fronteras lineales etc. Sin embargo los modelos analíticos simplificados resultan interesantes y vigentes en la actualidad ya que dan una orden de magnitud del problema, sirven para cotejar los resultados obtenidos por los métodos numéricos, y acercan al profesional al problema físico. Los métodos Numéricos y Computacionales son los métodos de cálculo en la actualidad, pero es importante comprender que si bien son herramientas muy poderosas para modelos complejos, requieren del conocimiento preciso tanto de las condiciones de borde como de los parámetros a utilizar. Los usuarios deben estar muy bien preparados con un conocimiento preciso de los modelos numéricos utilizados, el campo de aplicación y sus limitaciones. También es importante tener

criterio a la hora de analizar los resultados, ya que por su facilidad en el uso (ingreso de datos y cálculo), pueden tentar al profesional a pensar que todo lo que sale de esa “caja negra” es verdadero y no susceptible de error. Es aquí donde el valor de los métodos analíticos se visualiza como un primer valor de aproximación a la realidad del fenómeno físico. Así es como el principio de la navaja de Ockham sería aplicable para estos casos ya que en condiciones idénticas, serán preferidas las teorías más simples. Los modelos sencillos, tienen así una ventaja importante ya que frente a un problema el modelo más sencillo sería el mejor.

Como conclusión de este trabajo, se pudo observar que las diferencias en los caudales obtenidos están en el mismo orden de magnitud para los distintos métodos analizados, mientras que la incertidumbre en los valores a adoptar de la conductividad hidráulica  $K$ , es en algunos casos de varios órdenes de magnitud, rescatando la vigencia de los métodos analíticos para el cálculo de los caudales infiltrados.

## 2 TEORÍA DE LA INFILTRACIÓN

Existen dos tipos de análisis para infiltración, esto es para flujo permanente o estacionario y flujo impermanente o transitorio.

Como el análisis de flujo permanente no considera la componente tiempo, las ecuaciones que lo gobiernan se simplifican y es el análisis que se realiza en este trabajo.

## 3 ECUACIONES DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS

El movimiento del agua que se produce a través de los poros del material o de las fracturas que se encuentran en el mismo se puede expresar a través de la ley de [Darcy \(1856\)](#). Ésta se puede extender a medios no saturados, en una dimensión, considerando que la conductividad  $K(H)$  es la conductividad hidráulica en función de la succión  $H$  y  $\theta(H)$  es la humedad volumétrica en función de  $H$ . La ecuación de flujo en medios porosos no saturados o *ecuación de Richards* (1931) plantea la relación entre la humedad, la conductividad hidráulica y la succión en un medio poroso no saturado para distintos tiempos. Esta ecuación tiene la característica de ser altamente no lineal debido a la dependencia que tiene la humedad y la conductividad hidráulica con la succión ([Paniconi, 1991](#)). Además, necesita para su solución de la definición de las funciones hidráulicas del suelo. Para definir las funciones hidráulicas de los suelos (curvas de humedad en función de la succión y conductividad hidráulica en función de la succión) es necesario determinar las propiedades hidráulicas del suelo a través de mediciones de laboratorio o de campo.

La ecuación que describe el flujo del agua de un medio anisotrópico saturado o no saturado que considera que el flujo cumple con la ley de Darcy, o ecuación de Richards ([Mein y Larson, 1973](#)) se expresa como:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k_x k_{rw}(H)}{\mu_w} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{k_y k_{rw}(H)}{\mu_w} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{k_z k_{rw}(H)}{\mu_w} \frac{\partial h}{\partial z} \right] \quad (1)$$

donde  $\theta_w$  es la cantidad volumétrica de la fase líquida,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  son las permeabilidades intrínsecas correspondientes a las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente,  $k_{rw}$  es la permeabilidad relativa de la fase líquida,  $\mu_w$  es la viscosidad dinámica de la fase líquida,  $H$  es la succión ( $z-h$ ) y  $h$  es la altura piezométrica.

La ecuación de Richards, o cualquiera de sus formas modificadas, ha sido la piedra angular para el desarrollo de la mayoría de los modelos numéricos del cálculo de infiltración en medios porosos no saturados ([Espinoza, 1993](#)).

Si se considera que el movimiento del aire no produce un efecto apreciable en el movimiento del agua, se puede utilizar sólo la ecuación para describir el flujo en un medio no

saturado (Philip, 1984; Neuman, 1973; Rubin, 1966; Wallace, 1975). La ecuación de Richards para flujo en medios porosos no saturados es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden parabólica no lineal (Paniconi, 1991).

La conductividad hidráulica está dada por la siguiente relación:

$$K_{ii} = \frac{k_{ii} \cdot k_{rw}}{\mu_w} \quad (2)$$

donde  $K_{ii}$  es la conductividad hidráulica, e  $i$  indica las direcciones  $x, y, z$ . La expresión de Richards se puede escribir en función de la conductividad hidráulica como

$$\frac{\partial \theta_w(H)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [K_{xx}(H) \frac{\partial h}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [K_{yy}(H) \frac{\partial h}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [K_{zz}(H) \frac{\partial h}{\partial z}] \quad (3)$$

La no linealidad de la ecuación de Richards se debe a que la conductividad hidráulica es función de  $h$  entonces se tiene el producto de

$$K_{ii}(H) \cdot \frac{\partial h}{\partial i} \quad (4)$$

La conductividad hidráulica no sólo no es una función lineal de la succión sino que además depende de la historia de humedecimiento y secado del suelo (histéresis).

Para resolver numéricamente esta ecuación es necesario resolver un problema de valores de condiciones iniciales y de borde, es decir de condiciones mixtas (Paniconi, 1991). Cuando la conductividad hidráulica no es función de la succión (es una constante) en la ecuación anterior se puede sacar de la derivada parcial y la ecuación de Richards toma la forma matemática de la *ecuación de Laplace*. Esto ocurre en la realidad cuando en el suelo se estudian los fenómenos permanentes o estacionarios.

$$K_{sx} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + K_{sy} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] + K_{sz} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (5)$$

donde  $K_{sx}$ ,  $K_{sy}$ ,  $K_{sz}$  son las conductividades hidráulicas saturadas en las direcciones  $x, y, z$  respectivamente.

Si el medio es isotrópico las conductividades hidráulicas saturadas en las tres direcciones son iguales ( $K_{sx} = K_{sy} = K_{sz}$ ) la ecuación se transforma en:

$$\left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] + \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (6)$$

Y para flujo bidimensional

$$\left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (7)$$

El flujo bidimensional en un medio poroso saturado puede representarse por dos familias de curvas del plano que se intersecan en ángulo recto. Dos funciones conjugadas armónicas  $\phi$  y  $\psi$  satisfacen la ecuación de Laplace y las curvas  $\phi(x, y) = \text{cte}$  y  $\psi(x, y) = \text{cte}$ , son ortogonales (Harr, 1962). Una de estas familias de curvas representa las trayectorias de flujo de las partículas de agua filtrante, o líneas de corriente,  $\psi(x, y)$ . La otra familia está constituida por las curvas representativas de los puntos de igual altura piezométrica y se las denomina líneas equipotenciales,  $\phi(x, y)$ .

Como se dijo, si se busca entender el problema de flujo transitorio en la zona no saturada, es necesario conocer las curvas de humedad en función de la profundidad y del tiempo de un suelo. La pendiente de la curva representa el almacenamiento característico del suelo. La pendiente indica la cantidad de agua tomada o entregada por el suelo como un resultado del cambio succión.

La diferencia de las integrales de las curvas de humedad en el suelo  $\theta(H)$  con respecto al tiempo corresponde a la cantidad de agua que se infiltra, entendiendo que la humedad que se considera en los procesos de infiltración es la humedad volumétrica adimensional, la integral de la humedad en el perfil del suelo para dos tiempos distintos dividido por la variación del tiempo permite determinar la cantidad de agua que se infiltra en un determinado período de tiempo, es decir:

$$f = \frac{\Delta \sum_z \theta_{\Delta z}}{\Delta t} = \frac{\sum_z [\theta_{t+\Delta t}(H) - \theta_t(H)] \Delta}{\Delta t} \quad (8)$$

donde  $\theta(t + \Delta t)$  es la humedad en el tiempo  $t + \Delta t$  y  $\theta$  es función de H, donde H es la succión y z es la profundidad. La ecuación de Richards permite calcular los perfiles de humedad del suelo y por ende la tasa de infiltración.

#### 4 MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA RÉGIMEN PERMANENTE O ESTACIONARIO - SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

La solución para problemas de infiltración en régimen laminar y permanente se obtiene resolviendo la ecuación de Laplace. Varios métodos se han desarrollado para resolver la ecuación de Laplace en forma exacta o aproximada, Radhakrishna (1978) agrupa los métodos según se muestra en la [Tabla 1](#).

<i>ANÁLISIS DE INFILTRACIÓN</i>		
<i>MÉTODOS DE SOLUCIÓN</i>		
<i>MODELOS</i>	<i>MÉTODOS ANALÍTICOS</i>	<i>MÉTODOS NUMÉRICOS Y COMPUTACIONALES</i>
1) Analogía Eléctrica • Solución acuosa o gel. (2D ó 3D) • Seco. (2D ó 3D)	1) Mapeo o Transformación	1) Diferencias Finitas (M. Relajación). (1D, 2D, y 3D)
2) Arena (2D ó 3D)	2) Semi Empírico Método de los Fragmentos	2) Elementos Finitos. (1D, 2D, y 3D)
3) Flujo Viscoso (2D)	3) Forma Cerrada	

Tabla 1: Métodos de Solución para Régimen Permanente. Radhakrishna, 1978

##### 4.1 Condiciones de Frontera

En medios homogéneos hay cuatro posibles clases de líneas de frontera:

- frontera suelo infiltrado-suelo impermeable (frontera impermeable).*
- frontera agua-suelo infiltrado.*
- frontera suelo infiltrado-suelo permeable no infiltrado (línea superior de flujo).*
- frontera suelo infiltrado-aire (línea de descarga libre).*

*Tipos de Flujo:*

Flujo confinado: todas las fronteras del dominio de flujo son conocidas de antemano, fronteras tipos a y b.

Flujo no confinado: para tener completamente especificadas las condiciones de frontera es necesario definir previamente una de las dos fronteras desconocidas (c, línea superior de flujo y d, línea de descarga libre).

#### 4.2 Determinación de la Línea Superior de Flujo y Línea de Descarga

En el caso de flujo no confinado, deben definirse en primer lugar la líneas de de saturación y la de descarga libre.

Existen distintos métodos para la determinación de ambas líneas. Se muestran a continuación los distintos métodos propuestos por el [U.S. Army Corps of Engineers \(1986\)](#).

##### HIPÓTESIS DE DUPUIT

[Dupuit \(1863\)](#) propuso para la solución de problemas de flujo no confinado las siguientes dos hipótesis de trabajo:

1. Para pequeñas inclinaciones de la línea de infiltración, las líneas de corriente son horizontales y las equipotenciales se aproximan a la vertical.
2. En cada sección vertical, el gradiente es igual a la pendiente de la línea superior de flujo e invariante con la profundidad.

$$i = \frac{dy}{dx}$$

Donde  $i$  es el gradiente y el caudal  $q$  por unidad de profundidad para una sección vertical de la presa será:

$$q = -Ky \frac{dy}{dx} \quad (9)$$

e integrando

$$qx = -K \frac{y^2}{2} + C \quad (10)$$

Introduciendo en la ecuación (10) las condiciones de frontera, cuyo significado físico se observa en la [Figura 1](#) (para  $x = 0$ ,  $y = h_1$ ; para  $x = d_0$ ,  $y = h_2$ ), se obtiene para el caudal  $q$  la fórmula de Dupuit

$$q = K \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d_0} \quad (11)$$

y para la línea superior de flujo la ecuación

$$y^2 - h_1^2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{d_0} x \quad (12)$$

que define la llamada parábola de Dupuit ([Figura 1](#)). Es obvio que la ecuación anterior no representa correctamente la línea superior de flujo, pues no cumple las condiciones de entrada ni de salida; más aún, para  $h_2 = 0$  la parábola de Dupuit intersecaría la línea de flujo representada por la frontera impermeable AB. A pesar de estas desviaciones y, en general, de las hipótesis simplistas de Dupuit, se sabe que: a) para presas con taludes verticales, la fórmula de Dupuit es una expresión rigurosa del caudal ([Hantush, 1.962](#)); b) para presas con taludes cualesquiera, la misma fórmula da valores del caudal suficientemente aproximados para fines prácticos. Empíricamente se sabe que en este último caso se obtiene una mejor

aproximación si  $d_0$  se sustituye por  $d$  en la ecuación (11) de Dupuit (Figura 1), quedando

$$q = K \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d} \tag{13}$$

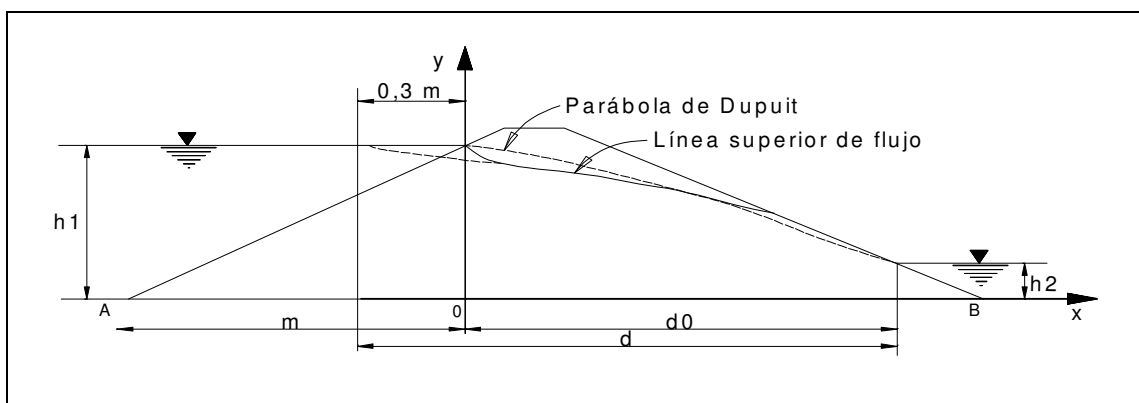


Figura 1: Parábola de Dupuit y Cálculo del caudal según la fórmula de Dupuit, (Marsal y Resendiz Nuñez, 1975)

### SCHAFFERNAK-VAN ITERSON

En la Figura 1 puede verse que la mayor desviación entre la línea superior de flujo y la parábola de Dupuit se debe a que no se satisfacen las condiciones de entrada y de salida. En vista de esto, Schaffernak y van Iterson propusieron en 1916, independientemente, determinar la posición de la línea superior de flujo y mantener las dos hipótesis de Dupuit, pero imponiendo la condición de salida correcta, como se indica en la Figura 2 para el caso de tirante nulo aguas abajo de la presa. Así, se obtiene que la línea superior de flujo es la parábola C'D' (Figura 2)

Mantiene para la línea superior de flujo la ecuación

$$y^2 - h_1^2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{d_0} x \tag{14}$$

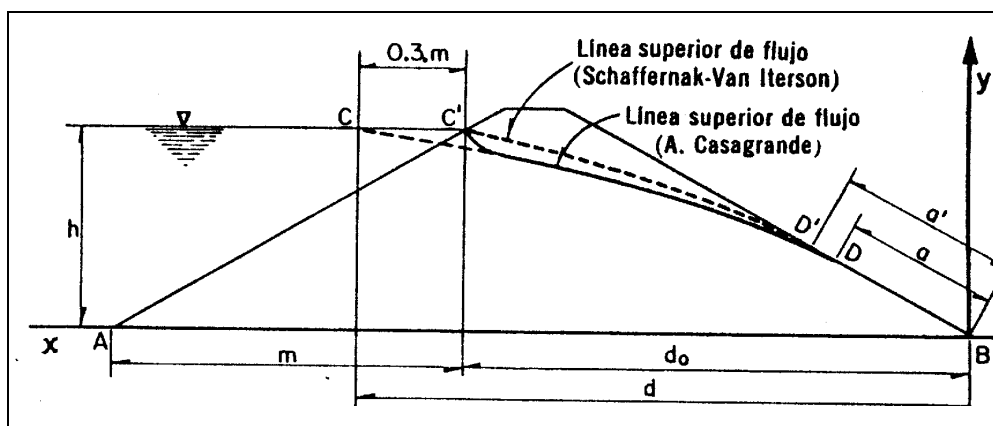


Figura 2: Solución de Schaffernak-Van Iterson modificada por Casagrande, (Marsal y Resendiz Nuñez, 1975)

Cumpliendo la condición de salida con:

$$a' = \frac{d_o}{\cos \alpha} - \sqrt{\frac{d_o^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{h^2}{\sin^2 \alpha}} \quad (15)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo del talud aguas debajo de la presa. Y el caudal infiltrado, función de la pendiente del talud aguas abajo es

$$q = k a \operatorname{sen} \alpha \tan \alpha \quad (16)$$

Esta ecuación da valores suficientemente aproximados para fines prácticos

#### A. CASAGRANDE

Mantiene las dos hipótesis de Dupuit .La línea superior de flujo resulta

$$y^2 = -\frac{h_1^2}{d}x + h_1^2 \quad (17)$$

A. Casagrande (1925-1940) sugiere que, a fin de satisfacer la condición de entrada, con:  $d=0.3 \text{ m} + d_0$ , el punto de arranque de la parábola se tome en C y no en C', corrigiendo después localmente la parábola a la entrada, como se muestra en la [Figura 2](#).

Cumple las condiciones de salida, y como en el caso de la fórmula de Dupuit, en la que resulta de las hipótesis de Schaffernak-Van Iterson debe entonces sustituirse  $d_o$  por  $d$ , de modo que, finalmente.

$$a = \frac{d}{\cos \alpha} - \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{h^2}{\sin^2 \alpha}} \quad (18)$$

Y el caudal

$$q = Ky \frac{dy}{dx} = K a \operatorname{sen} \alpha \tan \alpha \quad (19)$$

Donde el caudal resulta dependiente de de la inclinación del talud de aguas abajo.

Ambas ecuaciones son aproximadamente válidas para  $0 < \alpha < 30^\circ$ .

### 4.3 Métodos Analíticos

#### 1- Transformaciones, mapeos

Harr (1962) explica el uso de transformaciones y mapeos para transferir la geometría de un problema de filtración en un plano complejo en otro plano. De esta manera, la geometría de un problema puede tomarse de un plano donde la solución es desconocida a un plano donde la solución es conocida. Mientras este método se ha usado para obtener las soluciones de problemas generales, no es frecuentemente usado para las soluciones de problemas de infiltración específicos, ya que requiere del uso de teorías sobre variables complejas y la elección de funciones apropiadas para la transformación.

Estas transformaciones o mapeos son del tipo  $w = f(z)$ , donde  $w$  y  $z$  son complejos

Sea la función  $f$  definida en la vecindad de un punto  $z_0$  por medio de la ecuación

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Si existe  $f'(z_0)$  en un punto  $z_0 = x_0 + iy_0$ , entonces las derivadas primeras parciales de  $u$  y  $v$  con respecto a  $x$  e  $y$  existen en  $(x_0, y_0)$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho punto.

Es decir se satisfacen:



$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\end{aligned}\quad (20)$$

Que resultan de igualar las derivadas en cada una de las direcciones

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \text{ además}$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

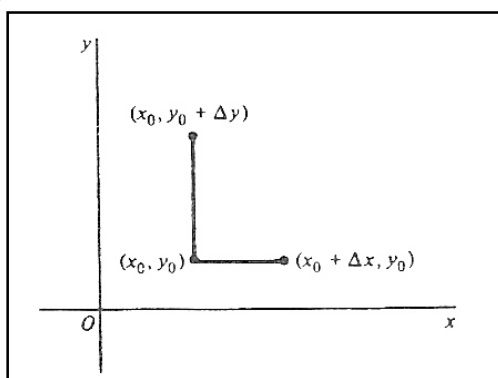


Figura 3: Incrementos del Punto  $z_0$  en  $x$  e  $y$ , (R. V Churchill, 1978).

Ya que las ecuaciones de Cauchy-Riemann (ecuación (20)), son necesarias para la existencia de  $f'(z_0)$ , se suelen utilizar frecuentemente para localizar puntos donde una función no tenga derivada. Es decir que se verifica el no cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ahora bien, una función de valor real  $h$  de dos valores reales  $x$  e  $y$  es *armónica* en un dominio dado del plano  $xy$ , si en todo punto de ese dominio tiene derivadas parciales (primera y segunda) continuas y satisface la ecuación diferencial parcial de Laplace

$$\left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] = 0$$

Si una función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es analítica en un dominio  $D$ , se demuestra que las funciones componentes  $u$  y  $v$  son armónicas en  $D$ . Expresamente si una función de una variable compleja es analítica en un punto, se cumple que sus partes real e imaginaria tienen derivadas parciales de todos los órdenes, continuas en dicho punto.

Ya que  $f$  es analítica en  $D$ , las primeras derivadas parciales de sus componentes satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto  $D$ , es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Al diferenciar los dos miembros de estas ecuaciones respecto a  $x$ , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (21)$$

De igual manera al diferenciar respecto a  $y$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (22)$$

Y al aplicar el teorema del cálculo de variables reales, la continuidad de las derivadas parciales asegura que  $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$  y  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ . Por lo tanto de las ecuaciones (21) y

(22), resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Es decir que, si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es analítica en un dominio  $D$ , sus funciones componentes  $u$  y  $v$  son armónicas en  $D$ .

Un ejemplo de solución analítica a la ecuación de Laplace por mapeo es el encontrado por Kozeny (1971) quien toma como función analítica de mapeo,  $z = Cw^2$ . Kozeny resuelve el problema para infiltración en una presa de tierra sobre una superficie impermeable con un dren ubicado al pie de la misma, aguas abajo. El objeto del dren es controlar la infiltración en el cuerpo de la presa. En el dren se ubican conductos colectores del agua que luego descargan o en el vertedero de la presa o directamente en el río. El coeficiente de conductividad hidráulica del dren es mayor que el del cuerpo de la presa.

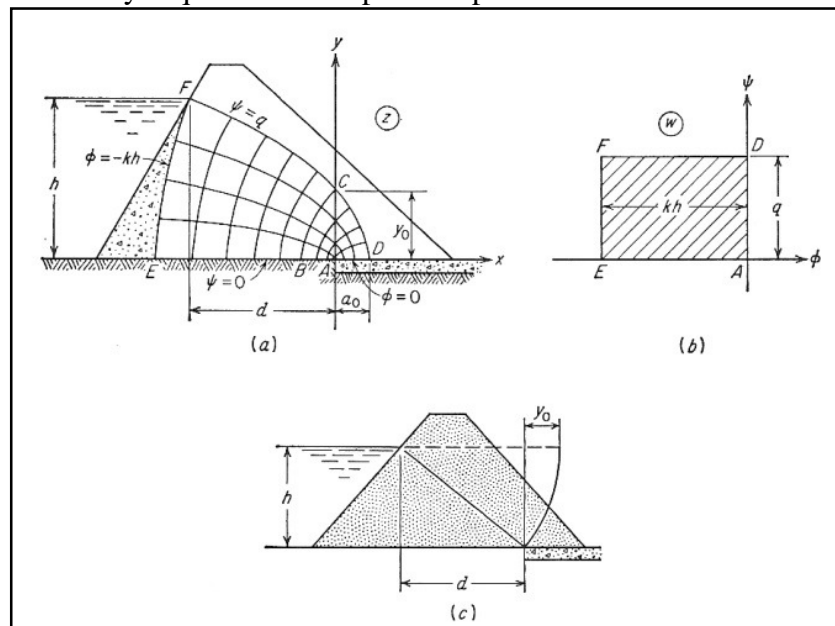


Figura 4: Mapeo con la función  $z = w^2$ , parábola de Kozeny, (Harr, 1991).

Para el análisis del escurrimiento la línea entre el cuerpo de la presa y el dren es una línea equipotencial. Así la región de flujo queda delimitada por una superficie equipotencial en parábola de la presa aguas arriba y a lo largo del dren  $AD$ , y de líneas de corriente en la superficie libre  $FCD$  y del borde impermeable  $AE$  de la Figura 5. De esta forma, la región de flujo en el plano  $w$  resulta:  $\phi = 0$  a lo largo de  $AD$ ,  $\phi = -kh$  a lo largo de  $EF$  (donde  $h$  es la pérdida de carga total en el cuerpo de la presa),  $\psi = 0$  a lo largo de  $AE$ ,  $\psi = q$  en la

superficie libre FD. Tomando como función de mapeo,  $z = Cw^2$ , donde  $C$  es una constante; y a lo largo de la superficie libre,  $\phi = -k y$  y  $\psi = q$

Recordando

$$w = \phi + i\psi$$

$$z = Cw^2 = x + iy$$

Reemplazando

$$C(\phi + i\psi)^2 = x + iy$$

$$C(\phi^2 + i2\phi\psi - \psi^2) = x + iy$$

$$\Rightarrow x = C(\phi^2 - \psi^2) \quad e \quad y = -2C\phi\psi$$

Que reemplazado por  $\phi = -k y$  y  $\psi = q$

$$\Rightarrow x = C(k^2 y^2 - q^2) \quad e \quad y = -2Ck y q \quad (23)$$

y despejando  $C$  de la segunda ecuación (23),

$$C = -\frac{1}{2kq}$$

Y la ecuación de la superficie libre, llamada *Parábola de Kozeny* es:

$$x = -\frac{k y^2}{2q} + \frac{q}{2k} \quad (24)$$

Para  $x = 0$  en la ecuación (24), y llamando  $y_0$  a la intersección de la superficie libre de escurrimiento con el eje  $y$ , el caudal por unidad de longitud de la presa es, despejando:

$$q = k y_0 \quad (25)$$

Y combinando las ecuaciones (24) y (25)

$$y^2 - y_0^2 + 2y_0 x = 0 \quad (26)$$

Y despejando  $y_0$ , se obtiene:

$$y_0 = x \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad (27)$$

Y tomando los valores de coordenadas en el punto de ingreso aguas arriba,  $x = -d$ ,  $y = h$  de la [Figura 5 a](#) se obtiene

$$y_0 = \sqrt{d^2 + h^2} - d \quad (28)$$

En la [Figura 5 c](#), se muestra la solución gráfica de la ecuación (28). Si  $y = 0$  en la ecuación (27), la distancia focal también llamada *longitud mínima de dren*, resulta:

$$a_0 = \frac{y_0}{2}$$

Diferenciando la ecuación (26),  $y^2 - y_0^2 = -2y_0 x$ , respecto a  $y$

$$2y dy = -2y_0 dx$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2y_0}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y_0}{y}$$

Se obtiene que  $-y_0/y$  es la pendiente de la tangente en cualquier punto de la superficie libre de escurrimiento. Por lo tanto la superficie libre entra al dren verticalmente ( $y = 0$ ), y su pendiente en  $y = y_0$  es  $-45^\circ$

De esta manera se observa que se requiere de toda la información disponible para dar una solución analítica del problema.

## 2- Semi empíricos. Método de los fragmentos

Pavlovsky (1936, 1956) comienza con el estudio de un método analítico que daba los caudales en forma aproximada para flujo confinado en un sistema de profundidad finita. Desarrolló este método aproximado, llamado Método de los fragmentos, que permite separar en tramos el problema de flujo para desarrollar la filtración en su totalidad.

El método de los fragmentos es un método de aproximación analítica para el cálculo de los caudales y presiones para aguas subterráneas. La hipótesis de este procedimiento se basa en el supuesto de que las líneas equipotenciales en diversos lugares críticos en la región de flujo son rectas verticales. Estas líneas equipotenciales dividen la región del flujo en partes o fragmentos. Otros supuestos inherentes al método de fragmentos son: (a) la ley de Darcy es válida, (b) se ha alcanzado el estado permanente, y (c) el suelo se aproxima a un estrato homogéneo e isotrópico o una serie de capas isotrópicas y homogéneas.

Este método permite resolver problemas de infiltración bastante complicados fraccionándolos en partes, analizando los modelos de flujo para cada una, y volviendo a montar las partes para proporcionar una solución global. Harr (1962) presenta la explicación del trabajo de Pavlovsky.

Conceptos básicos. El caudal a través de un único fragmento se calcula como:

$$q = \frac{Kh_i}{\Phi_i} \quad (29)$$

Dónde.  $K$ : coeficiente de conductividad

$h_i$  = pérdida de carga a través del fragmento

$\Phi_i$  = Factor de forma adimensional,

Debido a que los bordes de los fragmentos consisten en líneas equipotenciales, el flujo a través de cada fragmento debe ser igual al total del flujo a través del sistema. Así

$$q = \frac{Kh_1}{\Phi_1} = \frac{Kh_2}{\Phi_2} = \dots = \frac{Kh_n}{\Phi_n} \quad (30)$$

Dado que la suma de las pérdidas de carga en cada fragmento es igual a la pérdida total, el caudal total puede ser expresado como

$$q = \frac{Kh}{\sum_{i=1}^n \Phi_i} \quad (31)$$

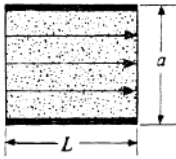
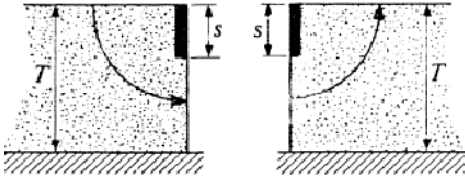
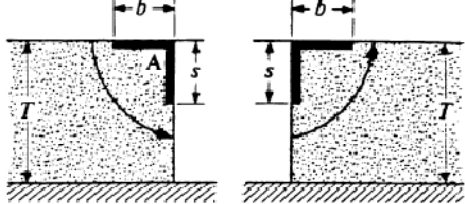
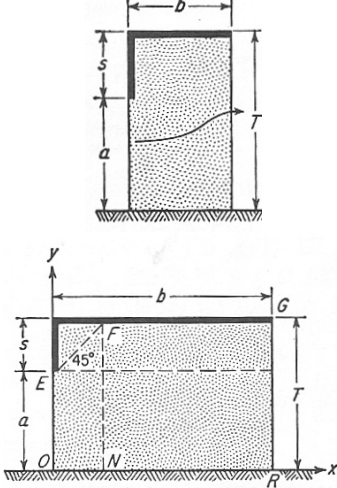
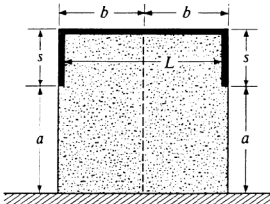
donde  $h$  es la pérdida total de carga a través de la sección. En la misma línea, la pérdida de carga en cada fragmento puede calcularse a partir de

$$h_i = \frac{h\Phi_i}{\sum_{i=1}^n \Phi_i} \quad (32)$$

La pérdida de carga a lo largo de toda la frontera impermeable de un fragmento se asume

que cambia en forma lineal. El concepto básico del método de los fragmentos es fraccionar la región de flujo en partes para las que el factor de forma toma las expresiones que se muestran en la Figura 6, (Harr, 1991).

Hay nueve diferentes tipos de fragmentos desarrollados. De estos, los seis primeros son para flujo confinado, mientras que los tres últimos son para flujo no confinado.

FRAGMENTO O TIPO	ILUSTRACIÓN	FACTOR DE FORMA $\phi$ ( $h$ es la pérdida de carga a través del fragmento)
I		$\Phi = \frac{L}{a}$
II		$\Phi = \frac{1}{2} \left( \frac{Kh}{Q} \right)$
III		$\Phi = \frac{K}{K'}$ $m = \cos \frac{\pi s}{2T} \sqrt{\tanh^2 \frac{\pi b}{2T} + \tan^2 \frac{\pi s}{2T}}$
IV		$b \leq S$ $\Phi = \ln \left( 1 + \frac{b}{a} \right)$ $b \geq S$ $\Phi = \ln \left( 1 + \frac{S}{a} \right) + \frac{b - S}{T}$
V		$L < 2S$ $\Phi = 2 \ln \left( 1 + \frac{L}{2a} \right)$ $L > 2S$ $\Phi = 2 \ln \left( 1 + \frac{S}{a} \right) + \frac{L - 2S}{T}$

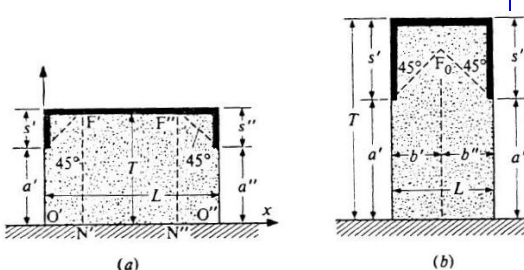
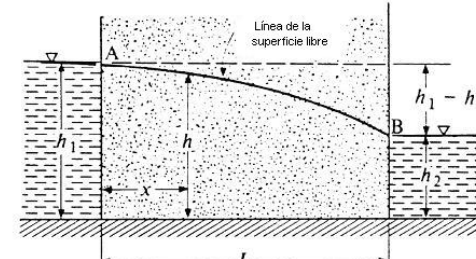
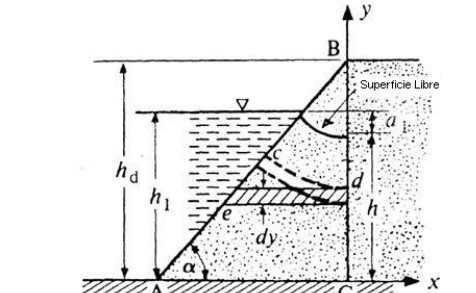
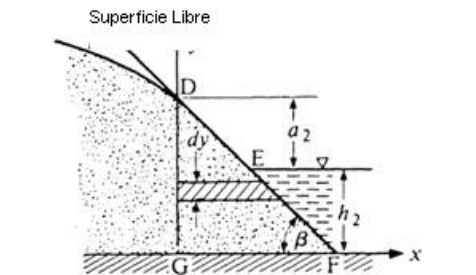
<p><b>VI</b></p>	 <p>(a) (b)</p>	$L > (S' + S'')$ $\Phi = \ln \left[ \left( 1 + \frac{S'}{a'} \right) \left( 1 + \frac{S''}{a''} \right) \right] + \frac{L - (S' + S'')}{T}$ $L \leq (S' + S'')$ $\Phi = \ln \left[ \left( 1 + \frac{b'}{a'} \right) \left( 1 + \frac{b''}{a''} \right) \right] \text{ donde}$ $b' = \frac{L + (S' - S'')}{2}$ $b'' = \frac{L - (S' - S'')}{2}$
<p><b>VII</b></p>		$\Phi = \frac{2L}{h_1 + h_2}$ $q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}$
<p><b>VIII</b></p>		$q = k \frac{h_1 - h}{\cot \alpha} \ln \frac{h_d}{h_d - h}$
<p><b>IX</b></p>		$q = \frac{k a_2}{\cot \beta} \left( 1 + \ln \frac{a_2 + h_2}{a_2} \right)$

Figura 5: Resumen de tipos de fragmentos y factores de forma, (Adaptado del U.S. Army Corps of Engineers, 1993)

Para analizar nuestros casos de estudio usaremos la aproximación de Pavlovsky quien considera la presa dividida en 3 partes

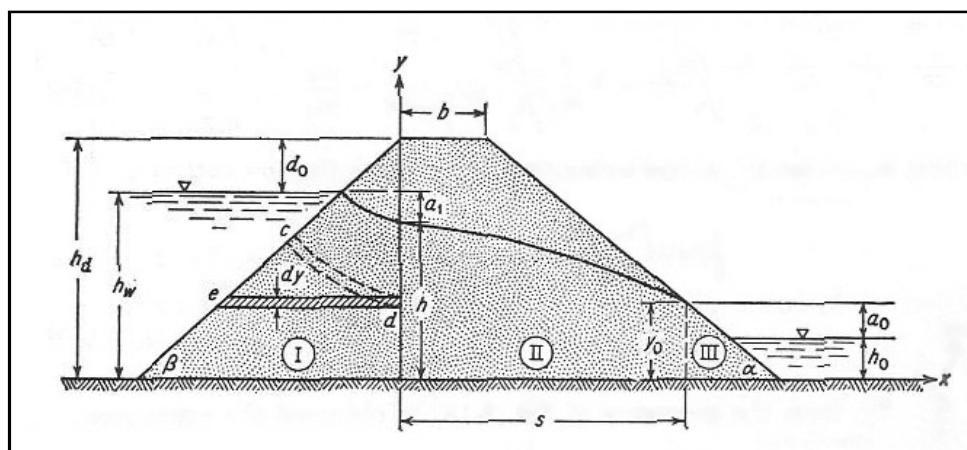


Figura 6: Aproximación de Pavlovsky

En la zona (I) las líneas de corriente se asumen horizontales de longitud equivalente e-d, flujo en dirección horizontal

El caudal infiltrado resulta

$$\frac{q}{k} = \frac{h_w - h}{m} \ln \frac{h_d}{h_d - h}$$

En la zona (II) usa la fórmula de Dupuit

El caudal infiltrado resulta

$$\frac{q}{k} = \frac{h^2 - (a_0 + h_0)^2}{2s}$$

La línea superior de flujo

$$y = (h - (h_0 + a_0)) \sqrt{1 - \frac{x}{s}} + (h_0 + a_0)$$

$$\text{para } h = 0; \quad y = (h - a_0) \sqrt{1 - \frac{x}{s}} + a_0$$

En la zona (III) para  $h_0=0$ , el caudal infiltrado resulta:

$$\frac{q}{k} = \frac{a_0}{m_1}$$

Y teniendo en cuenta la geometría

$$s = b + m_1 [h_d - (a_0 + h_0)]$$

Las incógnitas son:  $h$ ,  $a_0$ ,  $s$ , y  $q$ , las que se obtienen combinando las ecuaciones anteriores, resultando las siguientes funciones:

$$a_0 = \frac{b}{m_1} + h_d - \sqrt{\left(\frac{b}{m_1} + h_d\right)^2 - h^2}$$

y

$$a_0 = \frac{m_1}{m} (h_w - h) \ln \frac{h_d}{h_d - h}$$

Las que graficadas permiten obtener los valores de  $h$  y  $a_0$ , como se muestra en el ejemplo de la [Figura 8](#).

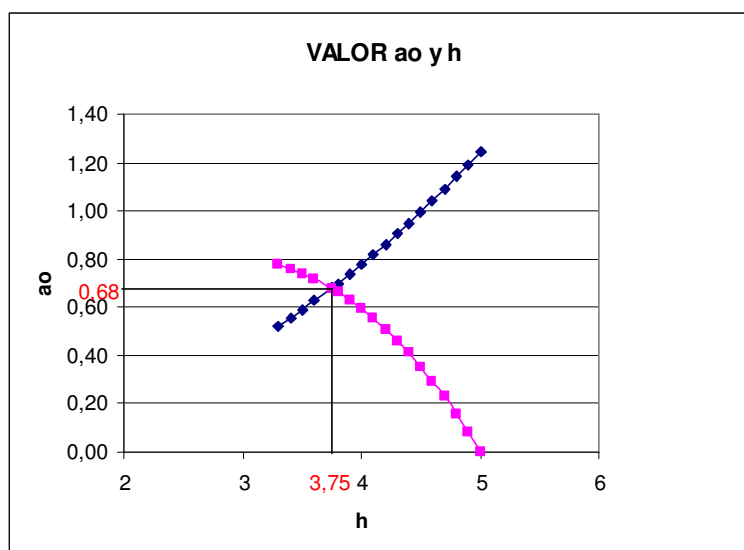


Figura 7: Ejemplo para obtener los valores de  $h$  y  $a_0$

#### 4.4 Soluciones Cerradas

Las soluciones cerradas resuelven el problema de infiltración para casos especiales en términos de funciones y condiciones de contornos particulares. Las soluciones cerradas existen para condiciones de infiltración más simples y se hallan usando las técnicas de mapeo o por el método de los fragmentos, que en síntesis son métodos analíticos para encontrar soluciones al problema de infiltración. Ejemplos de ellas son la expresión de Pavlovsky para una presa impermeable con pantalla para flujo confinado. Los problemas de infiltración asociados a presas típicas requieren soluciones aproximadas debido a las complicadas condiciones del flujo

#### 4.5 Métodos Numéricos y Computacionales

Los métodos computacionales se usan para condiciones del flujo complejas y usan aproximaciones para la solución de la ecuación de Laplace; han reemplazado casi totalmente a los físicos y analíticos.

Los dos métodos de solución numérica son el método de diferencias finitas y el de elementos finitos. Los dos pueden modelar en forma bidimensional o tridimensional.

### 5 MODELACIONES. APLICACIONES, PRESAS LA BARRANQUITA Y CIPIÓN II

Se presentan a continuación dos casos de infiltración en presas, analizados por los distintos métodos de cálculo. Los casos analizados son la Presa La Barranquita y la Presa CipiÓN II, ambos son realizados sobre los Proyectos de la SSRH (Subsecretaría de Recursos Hídricos), dependiente de la Secretaría de Obras Públicas de la Nación. El Proyecto de la Barranquita que se estudia es el desarrollado por la Subsecretaría de Recursos Hídricos de la Provincia de Córdoba (Ex DiPAS) y corresponde a lo realizado hasta el año 2008. Respecto al proyecto de la Presa CipiÓN II, de la misma manera, los estudios que se presentan corresponden a lo desarrollado por la Subsecretaría de Recursos Hídricos de la Provincia de Córdoba (Ex DiPAS) hasta el año 2009.

Se eligen los métodos analíticos de Schaffenak – Van Iterson, A. Casagrande, Pavlovsky, Fragmentos (para flujo no confinado), y Dupuit teniendo en cuenta que los taludes de la Presa La Barranquita y CipiÓN II son menores de  $30^\circ$ . Con ellos se determinará, la Línea de



Saturación, y los caudales infiltrados a través del cuerpo de la presa, considerando la fundación impermeable. Los resultados se compararán con los del Programa Plaxis de elementos Finitos.

También se analizará el caso en el que se considera el cuerpo de la presa impermeable, se determinarán los caudales infiltrados por debajo del cuerpo de la presa, según el método de los Fragmentos (para flujo confinado), y con el programa Plaxis de elementos finitos. Se compararán los resultados.

Tomando la presa y su fundación en forma conjunta resulta que no existen las formas cerradas que permitan su análisis por lo que solamente se podrá realizar su análisis por los métodos de Elementos Finitos con el Programa Plaxis y Diferencias Finitas. En este caso se calcularán los caudales totales infiltrados y se determinarán las líneas equipotenciales para los dos modelos.

El modelo de Diferencias Finitas se utilizará con el método de relajación usando la capacidad de iteración de Excel, discretizando la fundación y el cuerpo de la presa.

### 5.1 Modelos Simplificados

Para el análisis de las Presas La Barranquita y Cipión II, se realizaron dos tipos de modelos:

- I) Modelos Simplificados
- II) Modelos Completos

I) Modelos Simplificados: Los modelos simplificados consistieron en a) considerar la fundación impermeable de manera de estudiar solamente el flujo que se infiltra a través del cuerpo de la presa y b) considerar el cuerpo de la presa impermeable de manera de estudiar el flujo a través de la fundación.

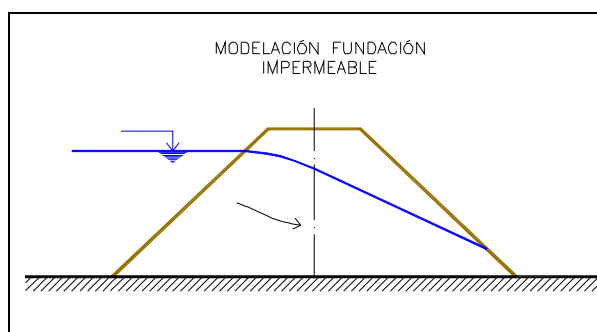


Figura 8: Modelo Simplificado Caso a) Fundación Impermeable

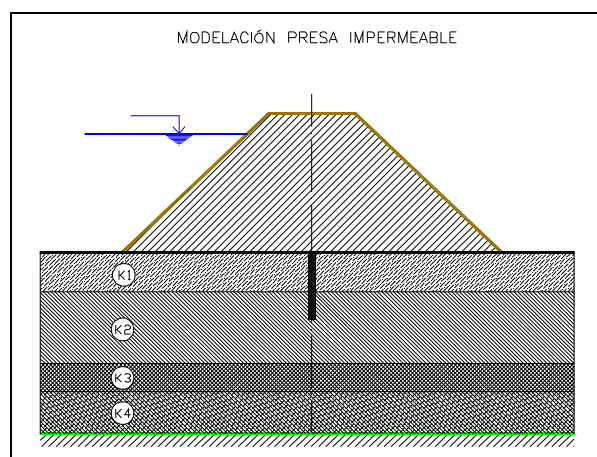


Figura 9: Modelo Simplificado Caso b) Presa Impermeable

Para el **caso a)**, en el que se considera la fundación impermeable, se determinaron las Líneas de Saturación, y los caudales infiltrados a través del cuerpo de la presa, según los métodos de Schaffenk – Van Iterson, A. Casagrande, Pavlovsky, Fragmentos (para flujo no confinado), Dupuit, y también con el programa Plaxis de elementos finitos, para comparar, puesto que la representación de la realidad (su modelo) es simple a pesar de ser el modelo computacional (herramienta de cálculo) complejo. Los métodos utilizados son los estudiados fueron seleccionados tomando en cuenta que los taludes de la Presa La Barranquita y Cipión II son menores de  $30^\circ$ . Los métodos son del tipo analítico exceptuando el numérico mencionado.

Para el **caso b)**, en el que se considera el cuerpo de la presa impermeable, se determinaron los caudales infiltrados por debajo del cuerpo de la presa, según el método de los Fragmentos (para flujo confinado), y con el programa Plaxis de elementos finitos.

Para la modelación con el método de los Fragmentos es necesario determinar una conductividad hidráulica equivalente para los distintos estratos del suelo que forman la fundación de la presa ya que este modelo se aplica a un medio isótropico y homogéneo.

Dependiendo de la dirección predominante del flujo y el modelo adoptado para la simulación, se muestra a continuación que un medio estratificado de suelos homogéneos e isótropicos puede convertirse en un estrato equivalente simple homogéneo e isótropico.

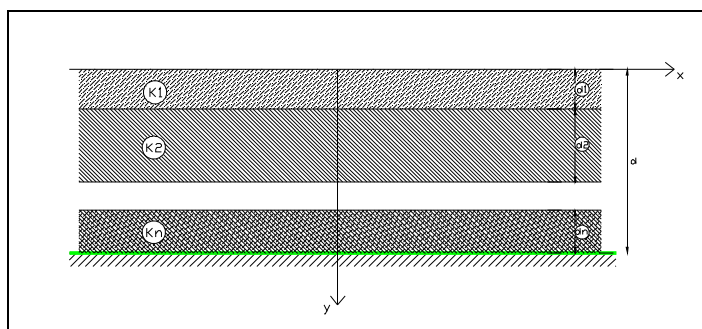


Figura 10: Suelo estratificado. Anisotropía

La Figura 11 representa una sección vertical a través de un suelo estratificado de espesores  $d_1, d_2, \dots, d_N$ , cuyas conductividades hidráulicas son respectivamente  $K_1, K_2, \dots, K_N$ .

Para una dirección del flujo predominantemente horizontal, en la dirección de la estratificación, el caudal a través de todo el paquete de estratos es, (Harr, 1991)

$$q = \sum_{i=1}^N K_i d_i \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (33)$$

Donde  $h_1 - h_2$  es la pérdida de carga a través de los estratos en la distancia  $L$ .

La velocidad en la dirección  $x$  será

$$u = \sum_{i=1}^N \frac{K_i d_i}{D} \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (34)$$

Y la conductividad hidráulica equivalente resulta

$$K_x = \sum_{i=1}^N \frac{K_i d_i}{D} \quad (35)$$

De la misma manera, si se considera el flujo perpendicular a la dirección de la estratificación, de la ecuación de continuidad  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  se deduce que la velocidad vertical en todos los estratos es la misma, es decir

$$v = K_y i = K_1 i_1 = K_2 i_2 = \dots = K_N i_N \quad (36)$$

Donde  $i$  es el gradiente hidráulico a través de todos los estratos, y la pérdida de carga total resulta igual a la suma de las pérdidas de carga en cada estrato

$$i D = i_1 d_1 + i_2 d_2 + \dots + i_N d_N \quad (37)$$

donde  $D = \sum_i^N d_i$

Obteniéndose un valor de conductividad hidráulica equivalente para los distintos estratos del suelo de fundación,

$$K_y = \frac{D}{\sum_i^N \frac{d_i}{K_i}} \quad (38)$$

Para la determinación del caudal por el Método de los Fragmentos, se modelaron dos casos, el primero toma como hipótesis que el movimiento del flujo se realiza según los fragmentos tipo III-III, uno a continuación del otro, como se muestra en la [Figura 12](#). En este caso lo que se está considerando es que la dirección preponderante del flujo es perpendicular a la dirección de la estratificación.

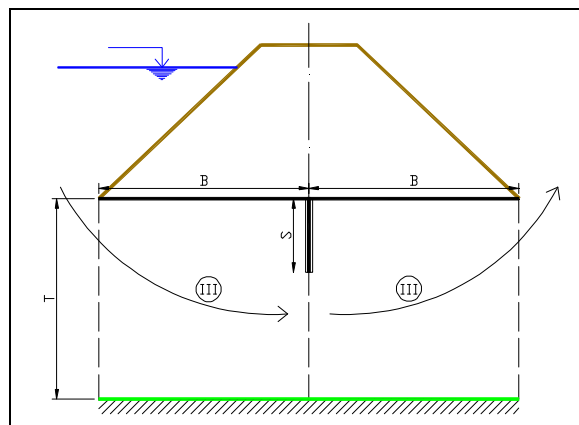


Figura 11: Modelación con Fragmentos – Presa Impermeable Fragmentos III-III

El valor de la conductividad hidráulica adoptado se corresponde con  $K_y$ , ecuación (38) que es la media armónica ponderada de los valores de las conductividades individuales de cada estrato.

El segundo caso toma como hipótesis que el movimiento del flujo se realiza según los fragmentos tipo II-I-IV-IV-I-II como se muestra en la [Figura 13](#). En este caso lo que se está considerando es que la dirección preponderante del flujo es horizontal coincidente con la estratificación.

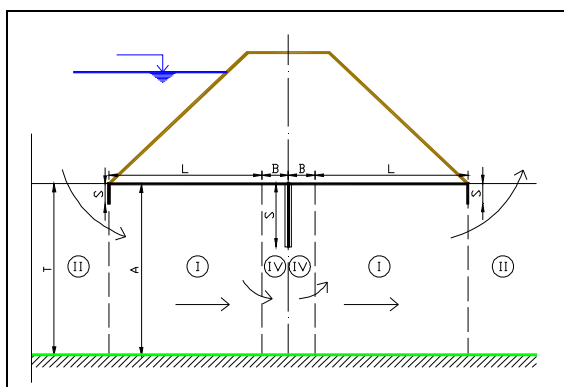


Figura 12 Modelación con Fragmentos – Presa Impermeable Fragmentos II-I-IV-IV-I-II

Para modelar, en este caso, se consideró un valor de conductividad hidráulica equivalente para los distintos estratos del suelo,  $K_x$  ecuación (35). El valor de la conductividad hidráulica  $K_x$  es la media aritmética ponderada de los valores de las conductividades individuales de cada estrato.

Como se puede ver numéricamente, la media armónica de las conductividades destaca los valores bajos de las conductividades hidráulicas, por lo que el valor resultante de la conductividad hidráulica  $K_y$  equivalente resulta menor que para el caso de la conductividad hidráulica  $K_x$ , que destaca los valores altos de las conductividades hidráulicas.

Basta ver el ejemplo que a continuación se presenta.

Ejemplo: si se considera que todos los estratos tienen igual espesor, es decir

$$d_1 = d_2 = \dots = d_i = \frac{1}{N}D$$

$$K_x = \sum_i^N \frac{K_i d_i}{D} \text{ reemplazando, resulta:}$$

$$K_x = \frac{\sum_i^N K_i}{N} \quad (39)$$

$$K_y = \frac{D}{\sum_i^N \frac{d_i}{K_i}} \text{ reemplazando, resulta:}$$

$$K_y = \frac{D}{\sum_i^N \frac{1}{N} \frac{D}{K_i}} = \frac{N}{\sum_i^N \frac{1}{K_i}} \quad (40)$$

Suponiendo tres estratos con los siguientes valores ilustrativos:

Estrato 1:  $K_1 = 1$

Estrato 2:  $K_2 = 2$

Estrato 3:  $K_3 = 100$

$$K_x = \frac{1+2+100}{3} = 34,33$$

$$K_y = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{100}} = 1,99$$

Se observa entonces que la elección de uno u otro modelo afectará los resultados del caudal en forma proporcional por la elección de la conductividad equivalente.

2) **Modelos Completos:** Los Modelos Completos consideran el cuerpo de la presa y su fundación en forma conjunta. Se analizaron ambas presas, La Barranquita y Cipión II, con el modelo de Plaxis de Elementos Finitos y con el modelo de Diferencias Finitas. Se calcularon los caudales totales infiltrados y se determinaron las líneas equipotenciales para los dos modelos.

El modelo de Diferencias Finitas se utilizó con el método de relajación usando la capacidad de iteración de Excel, discretizando la fundación y el cuerpo de la presa.

Para el estudio por el método de Elementos Finitos, para el análisis de filtraciones, se utilizó la versión 8.2 de Plaxis con el que se modeliza la situación a considerar en un estado plano con elementos triangulares con 15 nodos, de la misma manera que se utilizó para los modelos simplificados.

Se impuso las condiciones de borde *La Barranquita*, nivel de embalse 759 m (nivel del labio del vertedero Principal) y para *Cipión II*, nivel de embalse 548,60 m (nivel del labio del vertedero principal del Arroyo La Barranquita). En el modelo se ha considerado a las colchonetas como elementos “transparentes” al escurrimiento, debido a su mayor permeabilidad.

Los valores de conductividad hidráulica adoptados para la fundación fueron los mismos que se usaron para los Métodos Simplificados, para los distintos tipos de suelo. Respecto al valor de la conductividad hidráulica del terraplén compactado, se adoptó el mismo valor que para el limo,  $7,0 \cdot 10^{-6}$ , despreciando la mayor impermeabilidad que le daría al terraplén la compactación (valor conservador para los caudales infiltrados).

## 6 RESULTADOS

PRESA LA BARRANQUITA – PLANILLA RESUMEN					
<b>Perfil N° 13</b>					
CAUDALES INFILTRADOS A TRAVÉS DEL CUERPO DE LA PRESA Q [(m <sup>3</sup> /(s.m))]					
Schaffanak – Van Iterson	A. Casagrande	Fragmentos	Plaxis	Pavlovsky	Dupuit
2,128E-06	1,657E-06	1,585E-06	1,730E-06	1,581E-06	2,059E-06
CAUDALES INFILTRADOS POR DEBAJO DE LA PRESA Q[(m <sup>3</sup> /(s.m))]					
Fragmentos ky	Fragmentos kx	Plaxis			
1,863E-05	1,494E-03	6,010E-04			
<b>Perfil N° 16</b>					
CAUDALES INFILTRADOS A TRAVÉS DEL CUERPO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Schaffanak – Van Iterson	A. Casagrande	Fragmentos	Plaxis	Pavlovsky	Dupuit
4,898E-06	4,126E-06	3,342E-06	4,450E-06	3,357E-06	4,603E-06
CAUDALES INFILTRADOS POR DEBAJO DE LA PRESA Q [(m <sup>3</sup> /(s.m))]					
Fragmentos ky	Fragmentos kx	Plaxis			
2,196E-05	3,123E-05	2,800E-05			
<b>Perfil N° 6</b>					
CAUDALES INFILTRADOS A TRAVÉS DEL CUERPO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Schaffanak – Van Iterson	A. Casagrande	Fragmentos	Plaxis	Pavlovsky	Dupuit

1,384E-06	1,248E-06	1,064E-06	1,420E-06	1,063E-06	1,353E-06
CAUDALES INFILTRADOS POR DEBAJO DE LA PRESA Q [(m <sup>3</sup> /(s.m))]					
Fragmentos ky	Fragmentos kx	Plaxis			
1,757E-05	3,294E-03	3,104E-04			

Tabla 2: Tabla Resumen de los Caudales Calculados por los distintos modelos Simplificados para los Perfiles N° 13,16 y 6 de la Presa La Barranquita

PRESA LA BARRANQUITA – PLANILLA RESUMEN		
MÉTODOS COMPLETOS		
CAUDALES INFILTRADOS Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]		
PERFILES	ELEMENTOS FINITOS	DIFERENCIAS FINITAS
13	32,0 10 <sup>-6</sup>	97,7 10 <sup>-6</sup>
16	75,1 10 <sup>-6</sup>	21,5 10 <sup>-5</sup>
6	2,11 10 <sup>-6</sup>	9,42 10 <sup>-5</sup>

Tabla 3: Tabla Resumen de los Caudales Calculados por los Métodos de Elementos Finitos y Diferencias Finitas para los Perfiles N° 13,16 y 6 de la Presa La Barranquita

PRESA CIPIÓN II – PLANILLA RESUMEN					
Perfil N° 18					
CAUDALES INFILTRADOS A TRAVÉS DEL CUERPO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Schaffenak – Van Iterson	A. Casagrande	Fragmentos	Plaxis	Pavlovsky	Dupuit
3,150E-05	2,283E-05	1,717E-05	1,263E-05	1,717E-05	2,459E-05
CAUDALES INFILTRADOS POR DEBAJO DE LA PRESA Q [(m <sup>3</sup> /(s.m))]					
Fragmentos ky	Fragmentos kx	Plaxis			
7,434E-05	9,303E-05	6,474E-05			
Perfil N° 35					
CAUDALES INFILTRADOS A TRAVÉS DEL CUERPO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Schaffenak – Van Iterson	A. Casagrande	Fragmentos	Plaxis	Pavlovsky	Dupuit
1,448E-05	1,140E-05	9,009E-06	1,335E-05	9,009E-06	1,250E-05
CAUDALES INFILTRADOS POR DEBAJO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Fragmentos ky	Fragmentos kx	Plaxis			
7,106E-05	1,477E-04	8,694E-05			
Perfil N° 36					
CAUDALES INFILTRADOS A TRAVÉS DEL CUERPO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Schaffenak – Van Iterson	A. Casagrande	Fragmentos	Plaxis	Pavlovsky	Dupuit
4,691E-06	3,982E-06	3,291E-06	4,140E-06	3,291E-06	4,364E-06
CAUDALES INFILTRADOS POR DEBAJO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Fragmentos ky	Fragmentos kx	Plaxis			
4,245E-05	9,598E-05	4,897E-05			
Perfil N° 37					
CAUDALES INFILTRADOS A TRAVÉS DEL CUERPO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Schaffenak – Van Iterson	A. Casagrande	Fragmentos	Plaxis	Pavlovsky	Dupuit
3,518E-06	3,028E-06	2,503E-06	3,540E-06	2,503E-06	3,312E-06
CAUDALES INFILTRADOS POR DEBAJO DE LA PRESA Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]					
Fragmentos ky	Fragmentos kx	Plaxis			
3,642E-05	7,899E-05	5,739E-05			

Tabla 4: Tabla Resumen de los Caudales Calculados por los distintos Modelos Simplificados para los Perfiles N° 18, 35, 36 y 37 de la Presa Cipión II

PRESA CIPIÓN II – PLANILLA RESUMEN		
MÉTODOS COMPLETOS		
CAUDALES INFILTRADOS Q [m <sup>3</sup> /(s.m)]		

PERFILES	ELEMENTOS FINITOS	DIFERENCIAS FINITAS
18	126,74 $10^{-6}$	142,60 $10^{-6}$
35	109,03 $10^{-6}$	76,71 $10^{-6}$
36	56,10 $10^{-6}$	22,02 $10^{-5}$
37	67,37 $10^{-6}$	99,80 $10^{-6}$

Tabla 5: Tabla Resumen de los Caudales Calculados por los Métodos de Elementos Finitos y Diferencias Finitas para los Perfiles N° 18, 35, 36, y 37 de la Presa Cipión II

## 7 ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

### I) Modelos Simplificados

#### a) Hipótesis con fundación impermeable

De los valores obtenidos por los métodos analíticos se observa que para la Presa La Barranquita, los caudales infiltrados a través del cuerpo de la presa, se encuentran todos en el orden de  $10^{-6}$  m<sup>3</sup>/(s.m), y comparados con el método de Elementos Finitos calculado por el programa de Plaxis, el caudal también se encuentra en el mismo orden. (Tabla 2). En el caso de la Presa Cipión II, los caudales infiltrados a través del cuerpo de la presa, se encuentran todos en el orden de  $10^{-6}$  m<sup>3</sup>/(s.m), para los Perfiles 36 y 37 y comparados con el método de Elementos Finitos calculado por el programa de Plaxis, el caudal también se encuentra en el mismo orden (Tabla 4). Para los Perfiles 18 y 35 los caudales se encuentran en el orden de  $10^{-5}$  m<sup>3</sup>/(s.m), coincidente con los valores de Plaxis.

Para el cuerpo de la presa se determinó también la línea de saturación. Se observa que la misma no difiere para los distintos métodos en los perfiles analizados para las dos presas.

Se puede observar que las diferencias en los caudales están en el mismo orden de magnitud para los distintos métodos analizados, mientras que la incertidumbre en los valores a adoptar de la conductividad hidráulica  $K$ , es en algunos casos de varios órdenes de magnitud, esto es porque o no se tiene suficiente cantidad de estudios, o se extrapolan valores de una zona estudiada a otra no estudiada. Teniendo en cuenta esta variabilidad en el valor de la conductividad  $K$ , la que es directamente proporcional en la determinación del caudal, se concluye en la importancia de realizar la suficiente cantidad de ensayos tanto “in situ” como de laboratorio a los efectos de acercarse con más exactitud al valor que realmente tiene este parámetro que es en sí determinante a la hora del cálculo de los caudales infiltrados.

Por otro lado se rescata la vigencia de los métodos analíticos para el cálculo de los caudales infiltrados a través del cuerpo de la presa, como una herramienta de aproximación muy exacta y que permite al profesional tener un contacto más cercano con el fenómeno.

Es decir que los métodos de cálculo simplificados como los estudiados, resultan una herramienta poderosa al momento de comenzar a analizar la infiltración en el cuerpo de una presa.

#### b) Hipótesis considerando el cuerpo de la presa impermeable

Para este caso se analizaron los valores obtenidos por los métodos analíticos (Método de los Fragmentos) y con el Método de Elementos Finitos, esto tanto para la Presa La Barranquita, como para La Presa Cipión II.

Para la determinación del caudal por el Método de los Fragmentos (modelo agregado) se modelaron dos casos, el primero considera que la dirección preponderante del flujo es perpendicular a la dirección de la estratificación (Modelo de fragmentos III-III). El valor de la conductividad hidráulica adoptado se corresponde con  $K_y$ , que es la media armónica ponderada de los valores de las conductividades individuales de cada estrato. El segundo caso considera que la dirección preponderante del flujo es horizontal coincidente con la estratificación (Modelo de fragmentos II-I-IV-IV-I-II). El valor de la conductividad hidráulica equivalente

para los distintos estratos del suelo es,  $K_x$ , que es la media aritmética ponderada de los valores de las conductividades individuales de cada estrato.

Como se puede ver numéricamente, la media armónica de las conductividades destaca los valores bajos de las conductividades hidráulicas, por lo que el valor resultante de la conductividad hidráulica  $K_y$  equivalente resulta menor que para el caso de la conductividad hidráulica  $K_x$ , que destaca los valores altos de las conductividades hidráulicas.

Estos resultados se ven claramente en las modelaciones realizadas (Tabla 2 y 4), concluyendo que los valores más cercanos al modelo de Elementos Finitos se encuentran en la modelación con la conductividad hidráulica  $K_y$  equivalente.

En este caso se pueden ver diferencias entre el Método de Elementos Finitos (Modelo de Plaxis) y el Método de los Fragmentos. La razón de estas diferencias es el tipo de modelo utilizado; el Método de Elementos Finitos es un modelo de tipo desagregado, que puede modelar los distintos cambios en la conductividad hidráulica  $K$  no solo en los distintos estratos sino también para zonas dentro de los mismos. Los modelos de los Fragmentos son Modelos del tipo agregados, que toman un único valor para la conductividad hidráulica  $K$ , con el que se modela toda la fundación. Esta es la razón de las diferencias si analizamos los distintos perfiles, ya que mientras la fundación es más homogénea, los valores se acercan para los distintos métodos (Perfiles 16, 18 y 37). Teniendo en cuenta también la diferencia ya explicada respecto al valor adoptado para el método de los Fragmentos según sea  $K_x$  y  $K_y$ , se observa que en el caso de los Perfiles 35 y 36, de los métodos agregados, el que más se acerca al valor de Plaxis es el que utiliza el valor de conductividad hidráulica  $K_y$ .

Como conclusión, nuevamente se rescata la vigencia de los métodos analíticos para el cálculo en este caso de los caudales infiltrados por debajo de la presa, para fundaciones que no sean demasiado heterogéneas, como una herramienta de aproximación muy buena que permite al profesional tener un contacto más cercano con el fenómeno.

En este caso, en el que se usa un valor del parámetro de conductividad hidráulica equivalente  $K_x$  ó  $K_y$ , se ve nuevamente la importancia en la determinación de los valores de las conductividades hidráulicas intervinientes, ya que las conductividades equivalentes son directamente proporcionales al caudal obtenido. Es así que una vez más se concluye en la importancia de realizar la suficiente cantidad de ensayos tanto "in situ" como de laboratorio a los efectos de acercarse con más exactitud al valor que realmente tienen estos parámetros.

## II) Modelos Completos

Finalmente se modelaron el cuerpo de la presa y su fundación en forma conjunta. Se analizaron ambas presas, La Barranquita y Cipión II, con el modelo de Plaxis Versión 8.2 de Elementos Finitos y con el modelo de Diferencias Finitas. Se calcularon los caudales totales infiltrados y se determinaron las líneas equipotenciales para los dos modelos.

Respecto a estos modelos no era de esperar grandes diferencias en los caudales obtenidos a pesar que los métodos numéricos de aproximación difieren entre sí. En realidad, para estos casos sí se observaron diferencias en los resultados (Tabla 3 y Tabla 5) que son explicadas por los distintos modelos realizados para el análisis, fundamentalmente en lo que se refiere a las condiciones de borde. En el caso del Método de Elementos Finitos, la condición Aguas Arriba de la presa se realizó tomando el inicio de la modelación mas de diez veces el ancho de la presa, condición que no fue posible realizar con la planilla de Excell. Además el Método de Elementos Finitos permite modelar zonas donde los gradientes o velocidades son altos, modelar una porción de suelo dentro de un mismo estrato de suelo y estudiar geometrías más complejas con capas de suelos inclinadas.



## REFERENCIAS

- Brinkgreve, R.B.J., Al-Khoury, R., Bakker, K.J., Bonnier, P.G., Brand, P.J.W., Broere, W., Burd, H.J., Soltys, G., Vermeer, P.A., Den Haag, Doc, (2002). *Plaxis, 2D Versión 8 Manual*, Delf University of Technology & PLAXIS b.v., Países Bajos
- Casagrande, A. (1937). *Seepage through dams*. Contributions to Soil Mechanics, 1925-1949, Boston Society of Civil Engineers, Boston, MA, 295-336.
- Churchill, R. V., Brown, J. W., y Verhey, R. F.(1978). *Variables Complejas y sus aplicaciones*. Libros McGraw-Hill de México, S.A.
- Darcy, H., (1856). *Determination of the laws of flow of water through sand*. Appendix Note D. Paris.
- Dupuit, J. (1863). *Etudes Theoriques el Pratiques sur le Mouvement des aux Dams les Canaux Decouverts et a Travers les Tarrains Pemeables*. Paris, Francia.
- Espinoza, R. D., (1993). *Numerical analysis of unsaturated flow*. Thesis submitted to the faculty of Purdue University, Indiana, U.S.A.
- Hantush, M.S., (1962), *Flow of ground water in sands of nonuniform thickness*; 3. Flow to wells, Jour. Geophys. Res., vol. 67, no. 4, pp. 1527-1534.
- Harr, M. E. (1962), *Groundwater and Seepage*. McGraw-Hill Book Company, New York. Available from: Technical Information Center, U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, P. O. Box 631, Vicksburg, MS 39180-0631.
- Harr, Milton E. (1991). *Groundwater and Seepage*, School of Civil Engineering, Purdue University. Dover Publications, INC, New York. ISBN 0-486-66881-9.
- Kozeny , J (1971). *Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss und Kanalversickerung*, Wasseerkraft und Wasserwirtschaft, N°3.
- Marsal, R., Resendiz Nuñez, D. (1975). *Presas de Tierra y Enrocamiento*. Victoria Litográfica S. A., Naucalpan, Méjico.
- Neuman, S. P. (1973). *Saturated-unsaturated seepage by finite elements*. ASCE Journal of Hydraulics Division, 99(HY12): 2233-2250.
- Paniconi C., (1991), *Numerical evaluation of iterative methods for the solution of the nonlinear Richards equation*. Water Resources Research, Vol. 27, No. 6, Pág. 1147-1163.
- Pavlovsky, N. M (1936,1956). *Collected Works, 1956*. Akad. Nauk USSR, Leningrad (cited in Harr 1977). Available from: Technical Information Center, U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, P. O. Box 631, Vicksburg, MS 39180-0631.
- Philip, J. R., (1984). *Theory of Infiltration. Advences in Hydroscience*. Vol. 5 Academic Press. New York.
- Radhakrishnan, N.(1978). *Flow Nets and Computer Solutions to Seepage Problems*, Seminar on Construction Dewatering and Pressure Relief, U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, P. O. Box 631, Vicksburg, MS 39180-0631.
- Richards, L. A. (1931). *Capillary Conduction of Liquids in Porous Mediums*. Physics, Vol I. pp.318-33
- Rubin, J. (1966). *Numerical analysis of bonded rainfall infiltration*. In P.E. Rijtema (ed.). Proc. Wageningen Symposium IASH 82 (1968 UNESCO, Paris). pp. 440-451.
- U.S. Army Corps of Engineers, (1986). *Seepage Analysis and Control for Dams*, Washington, EM 1110-2-1901.
- U.S. Army Corps of Engineers, (1993). *Seepage Analysis and Control for Dams*, Washington, DC 20314-100.
- Wallace, K. B., (1975). *The analysis of Surface Infiltration into Earth Structures*. 4th Southeast Asian. Wallace, K. B. Conference on Soil Engineering. Kuala Lumpur. Malasia. pp 3-29 3-38.