

SIMULACIÓN DEL FLUJO REPTANTE EXTERIOR A UN TORO TRIDIMENSIONAL MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE BORDE

Sofía Sarraf^{a,b}, Ezequiel López^{a,b}, Gustavo Ríos Rodríguez^b y Jorge D'Elía^b

^a*Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, CONICET, Buenos Aires 1400, 8300-Neuquén, Argentina
e-mail: (ssarraf, ezequiel.jose.lopez)@gmail.com*

^b*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)
Universidad Nacional del Litoral - CONICET*

*Güemes 3450, 3000-Santa Fe, Argentina, e-mail: gusadrr@yahoo.com.ar, jdelia@intec.unl.edu.ar
web page: <http://www.cimec.org.ar>*

Palabras clave: flujo reptante, flujo estacionario, método de elementos de borde, técnica de colocación, ponderación de Galerkin, armónicos toroidales.

Resumen. Se presenta una validación de la solución numérica del flujo reptante estacionario alrededor de un toro tridimensional obtenida mediante el método de elementos de borde. En particular, se aplican tanto la técnica por ponderación de Galerkin (o GBEM, por *Galerkin Boundary Element Method*), como por colocación al centroide de los elementos; las cuales ya fueron mostradas en artículos previos (e.g. D'Elía *et al.*, "A Galerkin boundary element method for Stokes flow around bodies with sharp corners and edges", *Mecánica Computacional*, vol. XXVIII, 2009). La motivación del presente trabajo consiste en la validación del método aplicado para otras geometrías con soluciones semi-analíticas, además de la esfera y los esferoides oblatos y prolato. En particular se valida la curva de la fuerza viscosa de arrastre en función del diámetro del toro relativo a su grosor, con respecto a una solución semi-analítica tomada de la literatura. En la solución semi-analítica, como es conocido en este tipo de geometrías, intervienen las funciones de Legendre de primera y de segunda clase, de orden uno pero de grados semi-enteros, también denominados armónicos toroidales.

1. INTRODUCCION

El cálculo del flujo de Stokes alrededor de un cuerpo rígido con esquinas y aristas agudas suele presentarse frecuentemente en Sistemas Micro-Electro-Mecánicos (MEMS, por *Micro-Electro-Mechanical Systems*), entre otras aplicaciones, e.g. ver Wang (2002) o Méndez et al. (2008). Como es sabido, la presencia de discontinuidades geométricas como vértices y aristas están asociadas con el comportamiento singular de los campos de tracción y de tensión en problemas de elasticidad e hidrodinámica, e.g. ver Kozlov et al. (2001). Las tracciones de superficie en esquinas agudas como un vértice tridimensional (3D), son al menos tan singulares como las que se encuentran en las aristas, dado que un punto cercano a un vértice de una superficie poliédrica es también un vecino de una arista. Sin embargo, Mustakis and Kim (1998) probaron que las técnicas para ecuaciones integrales de borde pueden ser adecuadas para resolver estos casos de flujo.

Las ecuaciones integrales de borde se resuelven en general por el Método de Elementos de Borde (BEM, por *Boundary Element Method*) (Paris and Cañas, 1997; Hartmann, 1989), donde se utilizan técnicas de colocación para modelar flujos de Stokes (Power and Wrobel, 1995; Kim and Karrila, 1989). Otra alternativa, consiste en utilizar la estrategia de Elementos de Borde de Galerkin (GBEM), donde trabajar con elementos de borde (o paneles) en \mathbb{R}^3 lleva a calcular integrales dobles de superficie, i.e. integrales cuádruples, que llevan a cabo la interacción de pares entre todos los elementos (o paneles) de la malla BEM. Esta tarea se lleva a cabo mediante un lazo $p, q = 1, 2, \dots, E$ de elementos doblemente iterado, donde E es el número de elementos de la malla BEM. En el caso de núcleos no singulares, las expresiones analíticas para las integrales dobles de superficie son conocidas en algunos casos, por ejemplo, en integrales potenciales de capas lineales de triángulos aplastados para las ecuaciones de Laplace y Helmholtz (Eibert and Hansen, 1995; Siebers et al., 2005) y en otros casos se utiliza una cuadratura numérica. Cuando el par genérico p, q de paneles interactuantes con $p \neq q$ no comparten ninguna arista ni vértice, sus núcleos son regulares y entonces es suficiente utilizar una fórmula de cuadratura y en otro caso presenta singularidades débiles debidas a una arista o vértice en común (Burghignoli et al., 2004). Cuando $p = q$ ambos paneles son coincidentes y, entonces, todo el dominio de integración tiene singularidades débiles.

Para las integrales dobles de superficie con elementos triangulares planos Taylor (2003a,b) propuso una estrategia sistemática para el cálculo semi-numérico basado en un reordenamiento adecuado de cuatro integraciones iteradas. Las mismas trasladan la singularidad débil al origen del dominio de integración en el espacio \mathbb{R}^4 para luego utilizar sistemáticamente las transformaciones de Duffy (1982), i.e. utilizando coordenadas polares con la singularidad en el origen con el objetivo de regularizar su integrando. En D'Elía et al. (2006) se modificó la implementación del esquema de Taylor, donde se utilizó una cuadratura numérica en las cuatro coordenadas de integración con el objetivo de poder considerar otros tipos de funciones de Green siempre que posean una singularidad débil.

En este trabajo se presenta una validación de la solución numérica del flujo reptante estacionario alrededor de un toro tridimensional obtenida mediante el método de elementos de borde

aplicando las dos estrategias: colocación al centroide del elemento y Galerkin (GBEM). La motivación consiste en la validación del método aplicado para otras geometrías con soluciones semi-analíticas, además de la esfera y los esferoides oblatos y prolato. Se presenta la curva de la fuerza viscosa de arrastre en función del diámetro del toro relativo a su grosor respecto a una solución semi-analítica tomada de la literatura.

2. PLANTEO DEL PROBLEMA

Considérese un toro rígido de diámetro exterior D y espesor d , el cual se ubica en una corriente uniforme de forma tal que su eje de simetría axial está alineado con la dirección del flujo, como se esquematiza en la figura 1. La velocidad constante del flujo de fluido es $(U, 0, 0)$, el cual se asume incompresible con densidad ρ y viscosidad dinámica μ constantes. El fluido se considera además newtoniano. El número de Reynolds $Re = U\rho D/\mu$ se asume suficientemente pequeño, de modo tal que las siguientes ecuaciones gobiernan el problema:

$$\begin{aligned}\mu\nabla^2\mathbf{v} &= \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

siendo \mathbf{v} el campo de velocidad del flujo y p el campo de presión. Las condiciones de contorno que completan la formulación del problema son: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre la superficie del toro y $\|\mathbf{v}\| \sim U$ a una distancia infinita del cuerpo.

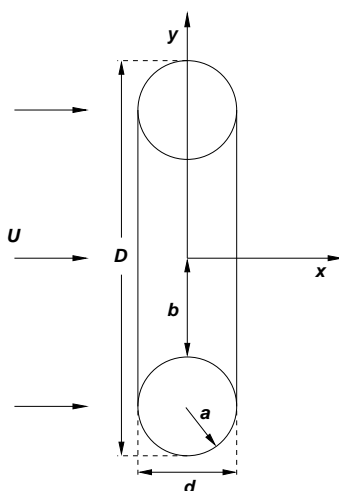


Figura 1: Esquema de la orientación del toro respecto al flujo y principales dimensiones geométricas.

El problema ha sido estudiado analíticamente por [Majumdar and O'Neill \(1977\)](#), entre otros, y experimentalmente por [Amarakoon et al. \(1982\)](#). En estos trabajos los análisis son realizados en términos del parámetro s_0 , dado por

$$s_0 = (D/d) - 1 = (b/a) + 1 \quad (2)$$

donde $a = d/2$ y $b = D/2 - d$ (véase la figura 1).

3. ECUACIONES INTEGRALES DE GOBIERNO

Dada una superficie A cerrada, rígida y suave a trozos, puede calcularse el flujo reptante alrededor de la misma mediante la alternativa de Hebeker (1986), la cual es una extensión de la propuesta de Power and Miranda (1987), e.g. ambas son analizadas en Pozrikidis (1996). La misma puede re-escribirse de la siguiente manera

$$\int_A dA_{\mathbf{y}} K_{ij} \psi_j(\mathbf{x}) - \int_A dA_{\mathbf{y}} H_{ij} \psi_j(\mathbf{y}) = u_i(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A; \quad (3)$$

donde $\psi_j(\mathbf{x})$ es la densidad superficial de doble capa y $u_i(\mathbf{x})$ es la velocidad del flujo sin perturbar. El elemento diferencial de superficie se denota por $dA_{\mathbf{y}} = dA(\mathbf{y})$, mientras que los puntos de integración y campo son $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, respectivamente.

El núcleo de doble capa $K_{ij} = K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es un tensor de rango 2 producido por una densidad de *stresslets* distribuidos sobre la superficie del cuerpo (Ladyzhenskaya, 1969; Pozrikidis, 1996, 1997), y está dado por

$$K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi\mu} \frac{r_i r_j r_k}{r^5} n_k(\mathbf{y}) \quad \text{con } \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \text{ y } r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2; \quad (4)$$

donde $n_k = n_k(\mathbf{y})$ es la normal unitaria a la superficie en el punto de integración \mathbf{y} . Para superficies suaves, este núcleo verifica la siguiente propiedad

$$\int_S dA_{\mathbf{y}} K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\mu} \delta_{ij} \quad \text{para } \mathbf{x} \in A; \quad (5)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Por otra parte, el núcleo $H_{ij} = H_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la suma

$$H_{ij} = K_{ij} + S_{ij}; \quad (6)$$

donde $S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es el núcleo *sourcelet* dado por

$$S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\chi_H}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right]; \quad (7)$$

donde χ_H es un parámetro positivo arbitrario que acopla la densidad de capa simple ϕ con la densidad de doble capa ψ , i.e.

$$\phi(\mathbf{x}) = \chi_H \psi(\mathbf{x}) \quad (8)$$

En el trabajo de Hebeker se concluye que $\chi_H = 1$ es una buena elección, y que será adoptado también en este trabajo. El núcleo $S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es un campo auxiliar *ad-hoc* que permite eliminar los modos rígidos y que da cuenta de la fuerza y el torque global sobre el cuerpo (Pozrikidis, 1996). Usando notación matricial, la Ec. (3) es re-escrita como

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A; \quad (9)$$

con el operador integral

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})) = \int_S dA_{\mathbf{y}} \{ \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) - \mathbf{H} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) \} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A; \quad (10)$$

donde el campo solución es la densidad superficial de doble capa $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$. Los núcleos $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ acoplan la densidad de doble capa $\boldsymbol{\psi}$ entre el punto de integración \mathbf{y} y el punto de observación \mathbf{x} .

4. FORMULACION NUMERICA

4.1. Cálculo de la densidad superficial de doble capa

La ecuación (9) es una ecuación integral de borde en las velocidades de tipo indirecta (Power and Wrobel, 1995; Kim and Karrila, 1989) dado que no provee directamente la tracción sobre la superficie, sino la densidad superficial de doble capa modificada para eliminar los modos rígidos y proveer la fuerza y cupla sobre el cuerpo. En el trabajo de D'Elía et al. (2009) esta integral se resuelve numéricamente utilizando una técnica de ponderación de Galerkin (Paquay, 2002; D'Elía et al., 2008).

Por otro lado, el cálculo numérico de la ecuación (10) mediante una técnica de Galerkin involucra la resolución de integrales dobles de superficie con una singularidad débil. En particular, Taylor (2003a,b) desarrolló una estrategia para trabajar con mallas de superficie compuestas por triángulos planos. La formulación se basa en un reordenamiento conveniente de cuatro integraciones iteradas que desplaza la singularidad débil al origen del espacio real euclideo de cuatro dimensiones (4D o \mathbb{R}^4), para luego utilizar la transformación de Duffy (1982) sistemáticamente, es decir, regularizando el integrando mediante el uso de coordenadas polares. Luego, Taylor selecciona una cuadratura numérica de Gauss-Legendre en tres de las coordenadas y realiza una integración analítica en la cuarta. Dado que este esquema es específico para núcleos de propagación de ondas en electromagnetismo computacional, se propuso una modificación en D'Elía et al. (2009). Dicha modificación consiste en una cuadratura numérica en las cuatro coordenadas para trabajar con núcleos con una singularidad débil en general.

4.2. Cálculo del campo de tracción superficial

La fuerza $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ y el torque $\mathbf{T} = (T_x, T_y, T_z)$ pueden calcularse mediante las siguientes integrales de superficie (Power and Miranda, 1987):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_A dA_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\psi}; \\ \mathbf{T} &= \int_A dA_{\mathbf{y}} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\psi}). \end{aligned} \quad (11)$$

Por otro lado, el campo de tracción $t_i(\mathbf{x})$ en el exterior de la superficie cerrada A , puede obtenerse como (Ladyzhenskaya, 1969)

$$t_i(\mathbf{x}) = -\frac{3}{4\pi} \int_A dA_{\mathbf{y}} \frac{r_i r_j r_k}{r^5} n_j(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{y}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in A; \quad (12)$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. En la ecuación (12) se asume que la normal unitaria \mathbf{n} está bien definida en el punto de campo \mathbf{x} . Esta restricción impide utilizar esta ecuación para calcular el campo de tracción sobre los puntos con discontinuidades geométricas, tales como nodos, aristas o vértices de la malla de superficie. Por lo tanto, los centroides de los paneles se utilizan como puntos de campo \mathbf{x} en los casos resueltos. Obviamente, la fuerza obtenida integrando el campo de tracción dado en la ecuación (12) coincide con la obtenida en la ecuación (11).

5. SOLUCION SEMI-ANALITICA

En el trabajo de Majumdar and O'Neill (1977) se propone un método alternativo para hallar la solución exacta del problema. En el mismo, se resuelven las componentes de la velocidad y la presión directamente en lugar de introducir la función de corriente para flujo de Stokes. El método de resolución conduce a una ecuación diferencial de segundo orden de la secuencia de coeficientes en la serie que define una de las componentes de las funciones de velocidad. Debido a que en este trabajo la comparación entre las soluciones semi-analítica y numérica se realiza cotejando los valores de la fuerza de arrastre sobre el toro, sólo se presenta la expresión semi-analítica de ésta. Luego, la fuerza viscosa de arrastre sobre la superficie del toro es $\mathbf{F} = (F, 0, 0)$, con

$$F = 4\sqrt{2}\pi\mu U c \sum_{n=0}^{\infty} (nB_n + C_n) \quad (13)$$

donde $c = a\sqrt{s_0^2 - 1}$. Los coeficientes B_n y C_n están definidos por

$$\begin{aligned} B_n &= k_n(a_{n+1} + a_{n-1}) - 2s_0k_n a_n \quad (n \geq 1) \\ C_n &= 1/2k_n(a_{n+1} - a_{n-1}) + \beta\lambda_n \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{2}/\pi, \quad k_n = [P_{n-1/2}(s_0)]^{-1}, \\ \lambda_n &= \epsilon_n Q_{n-1/2}(s_0)/P_{n-1/2}(s_0), \quad \epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_n = 2 \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (15)$$

$P_{n-1/2}$ y $Q_{n-1/2}$ son, respectivamente, las funciones de Legendre de primera y segunda clase de orden semi-entero. Los coeficientes a_n se definen como $a_{-1} = a_0 = 0$ y el siguiente conjunto infinito de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} &a_1(-k_0 - 10s_0k_1 + 3k_2 + 3\mu_1) + a_2(7k_1 - 3s_0k_2 - 7.5\mu_2) \\ &= \beta(2\lambda_0 - 4\lambda_1 + 3\lambda_2) \\ &a_{n-1}[(2n-1)s_0k_{n-1} - (2n-5)k_n - 1/2(2n-1)(2n-3)\mu_{n-1}] + \\ &a_n[-(2n-1)k_{n-1} - 10s_0k_n + (2n+1)k_{n+1} + (2n+1)(2n-1)\mu_n] + \\ &a_{n+1}[(2n+5)k_n - (2n+1)s_0k_{n+1} - 1/2(2n+1)(2n+3)\mu_{n+1}] \\ &= \beta[(2n-1)\lambda_{n-1} - 4n\lambda_n + (2n+1)\lambda_{n+1}], \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (16)$$

siendo $\mu_n = [P'_{n-1/2}(s_0)]^{-1}$, donde la prima indica diferenciación.

Siguiendo a Amarakoon et al. (1982), los resultados para el arrastre se expresan en términos del arrastre sobre una esfera con el mismo diámetro exterior que el toro, lo cual permite definir el siguiente parámetro adimensional

$$F'_\infty = \frac{F}{3\pi\mu UD} \quad (17)$$

6. RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la resolución numérica de la ecuación (9), tanto por el método de colocación como por el de Galerkin. En todos los casos se adoptó: diámetro exterior $D = 1$ m, densidad del fluido $\rho = 1$ kg/m³, viscosidad dinámica $\mu = 1$ Pa·s y rapidez no perturbada $U = 1 \times 10^{-3}$ m/s. Como fuera puntualizado en la introducción, el principal objetivo del presente trabajo es la validación del método numérico aplicado a la resolución del problema propuesto en la sección §2 mediante el cómputo del coeficiente de arrastre definido por la ecuación (17) y la posterior comparación con resultados semi-analíticos. Se adoptaron valores del parámetro s_0 en el intervalo (1, 100].

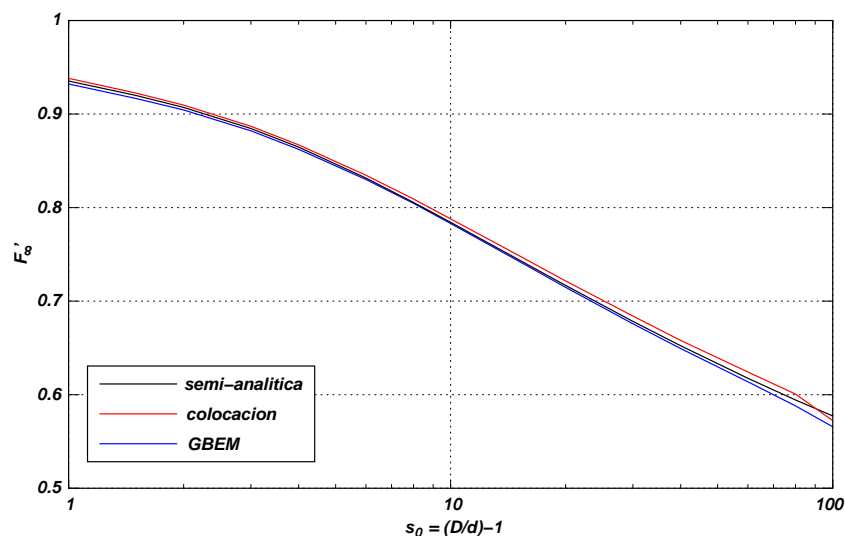


Figura 2: Variación del coeficiente de arrastre adimensional F'_∞ en función del parámetro s_0 . Soluciones semi-analítica y numéricas mediante BEM aplicando las técnicas de colocación y Galerkin.

La discretización de la superficie del toro se realiza mediante una malla estructurada de paneles triangulares. Para ello, se divide la circunferencia generatriz en N elementos de igual longitud $h = \pi d/N$. En la dirección perpendicular a esta circunferencia la superficie del toro se discretiza uniformemente dividiendo el círculo exterior en M segmentos con extensión $H = \pi D/M$. Luego, cada cuadrángulo de la malla así obtenida se subdivide por una de sus diagonales en dos triángulos. El modo de realizar esta discretización conlleva al colapso de paneles en el caso $s_0 = 1$ (toro “cerrado”). Por lo tanto, a fin de evitar el aplastamiento de

paneles, este caso fue efectivamente resuelto tomando $s_0 = 1 + \epsilon$, con $\epsilon = 1 \times 10^{-7}$. A medida que el parámetro s_0 aumenta, el toro disminuye su grosor respecto del diámetro exterior (véase la ecuación (2)), lo cual deteriora la relación de aspecto de los elementos. El efecto de este deterioro puede mitigarse redefiniendo la discretización (aumentando M y, simultáneamente, disminuyendo N) o directamente incrementando el número de elementos a lo largo del círculo externo M . La última de las opciones no resulta viable debido al incremento en el costo computacional que conlleva, particularmente para valores grandes de s_0 . Por lo tanto, en este estudio se adoptó como criterio redistribuir los paneles manteniendo constante su cantidad. Este criterio es de utilidad para el estudio de la convergencia de los resultados a medida que se refina la malla. Asumiendo entonces una malla con E paneles, se elige la discretización de forma tal que la relación de aspecto h/H no disminuya por debajo de un valor límite prefijado α , teniendo entonces

$$\begin{cases} N = \text{máx} \left[\sqrt{\frac{E}{\alpha(s_0 + 1)}}, 4 \right] \\ MN = E \end{cases} \quad (18)$$

En el presente trabajo se utilizó $\alpha = 0.2$.

En la figura 2 se presentan los resultados obtenidos para el coeficiente de arrastre adimensional F'_∞ en función del parámetro s_0 . Los valores corresponden a la malla más fina utilizada, de 3200 paneles, excepto para la técnica de Galerkin y $s_0 = 100$, dado que en este caso no se obtuvo solución. El valor de F'_∞ que se muestra para este último caso corresponde al calculado con la malla de 1600 paneles. Se observa en general un muy buen acuerdo entre los resultados numéricos y los semi-analíticos.

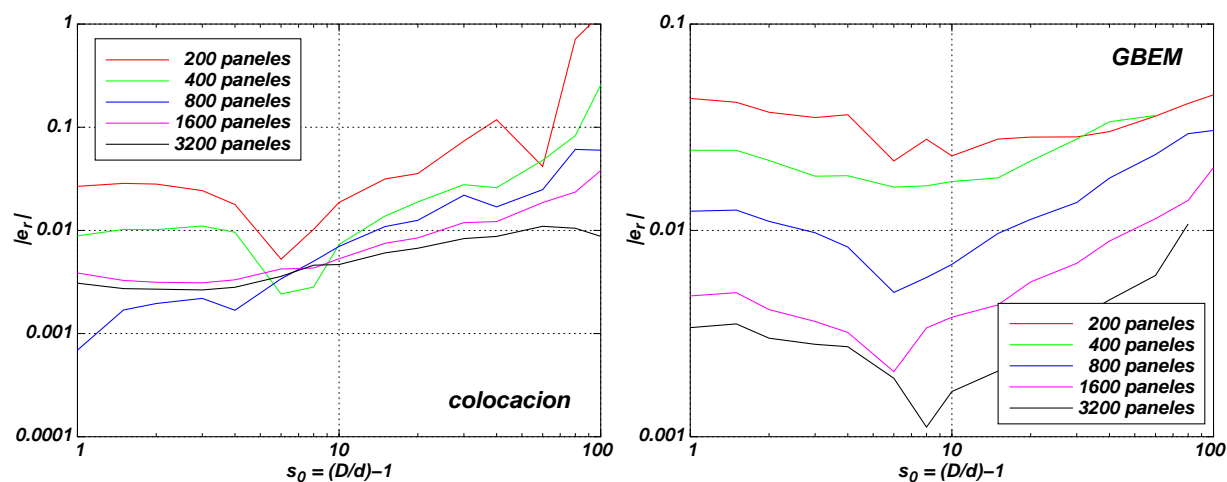


Figura 3: Error relativo en el coeficiente de arrastre F'_∞ en función del parámetro s_0 para refinamientos sucesivos de la malla. Métodos de colocación (izquierda) y Galerkin (derecha).

La figura 3 muestra el error relativo para el coeficiente F'_∞ en función de s_0 a medida que se incrementa la cantidad de paneles de la malla, tanto para los métodos de colocación como

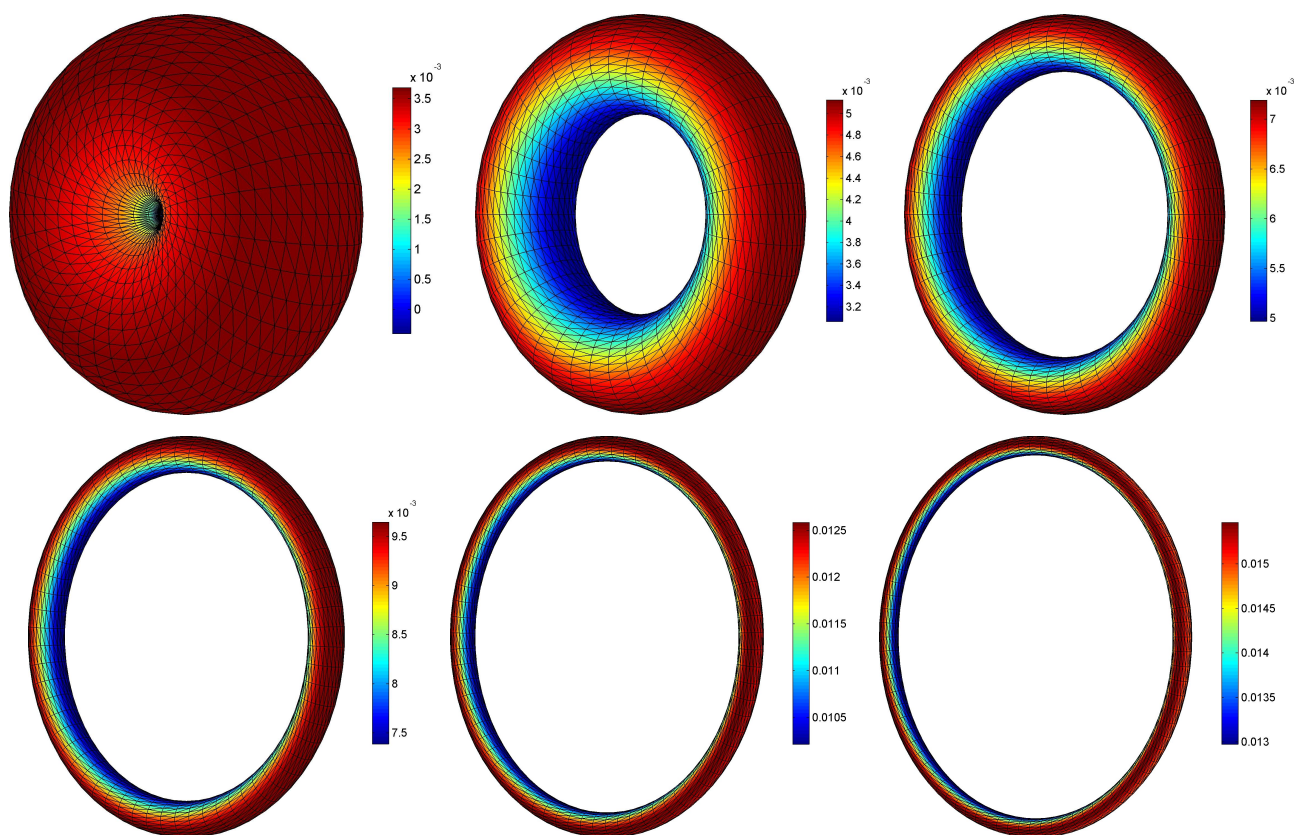


Figura 4: Componente t_x de la tracción sobre la superficie del toro para $s_0 = 1, 3, 6, 10, 15$ y 20 (de izquierda a derecha y de arriba a abajo). Calculado con el método de colocación y una malla de 3200 paneles.

de Galerkin. Los mayores errores se observan para valores grandes de s_0 , especialmente para el caso de colocación. En este último caso el error no disminuye monótonamente con el aumento de la cantidad de paneles, lo cual puede deberse a que el criterio *ad-hoc* adoptado para discretizar la malla (véase la ecuación (18)) no es en absoluto óptimo en general. El método GBEM presenta un comportamiento más regular de reducción del error con el refinamiento de la malla, pudiéndose observar los mayores errores para los valores extremos de s_0 en el intervalo adoptado.

La figura 4 muestra la componente de la tracción sobre la superficie del toro en la dirección del flujo no perturbado para distintos valores del parámetro s_0 . Este campo corresponde al calculado con colocación y la malla más fina utilizada (3200 paneles triangulares). En la figura 5 se presenta también la componente en la dirección x de la tracción sobre la superficie del toro, pero en este caso manteniendo $s_0 = 3$ y variando la discretización de la superficie. Los resultados de esta última figura corresponden a los obtenidos con el método de Galerkin.

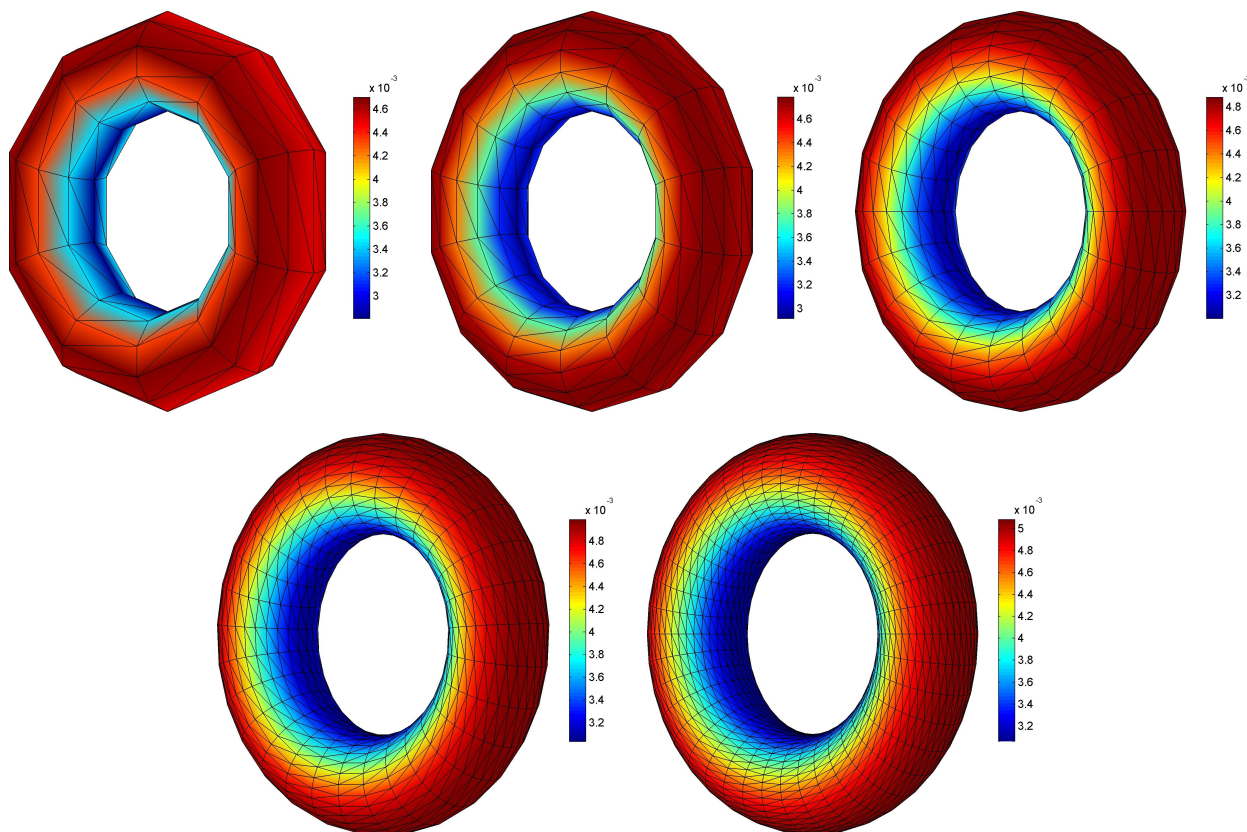


Figura 5: Componente t_x de la tracción sobre la superficie del toro calculada con GBEM, para $s_0 = 3$ y variando el refinamiento de la malla. Cantidad de paneles: 200, 400, 800, 1600 y 3200 (de izquierda a derecha y de arriba a abajo).

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha considerado el flujo reptante axisimétrico alrededor de un toro tridimensional rígido, en régimen estacionario, el cual se ha modelado mediante una formulación integral indirecta en las velocidades de tipo CIV-BIE (*Completed Indirect Velocity - Boundary Integral Equation*, e.g. [Ingber and Mammoli \(1999\)](#)). En la resolución numérica se ha optado por el método de elementos de borde empleando mallados sobre la superficie del toro compuestos por triángulos simples. En particular, se ha validado la curva de la fuerza de arrastre viscoso en función del parámetro geométrico $s_0 = D/d - 1 = b/a + 1$ que define al toro, tanto por una técnica de colocación como por ponderación de Galerkin, y se la ha comparado contra la solución semi-analítica de [Majumdar and O'Neill \(1977\)](#), la cual a su vez ha sido reproducida experimentalmente por [Amarakoon et al. \(1982\)](#). Se han mallado diversas geometrías incluyendo los casos de $s_0 = 1, 3, 6, 10, 15, 20$, de los cuales se han mostrado los mapas de las tracciones viscosas correspondientes sobre la superficie de cada toro.

En general, ambos métodos han sido capaces de reproducir dicha curva. Ambos métodos en general han arrojado un muy buen acuerdo entre los resultados numéricos y los semi-analíticos

en un amplio rango en el parámetro geométrico s_0 inclusive en el caso extremo de un toro cerrado (i.e. cuando $s_0 = 1$). Sin embargo, casos con elevados valores del parámetro geométrico (e.g. $s_0 \approx 100$) correspondientes a un toro de sección muy pequeña y gran diámetro, han presentado problemas con Galerkin, atribuidos a la falta de un mayor grado de refinamiento ocasionado a su vez por el techo de la memoria RAM disponible.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina), Universidad Nacional del Litoral (UNL, Argentina, proyecto CAI+D 2009–III-4–2), Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANCyT, Argentina, proyectos PICT 2492–10, PICT 1141–07), EU-IRSES (PIRSES-GA-2009-246977), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU–Linux–OS, GNU–GFortran, GNU–Octave, GNU–Git, GNU–Doxygen, y GNU–GIMP, así como otros recursos de código abierto, tales como NETGEN, ParaView, OpenDX, Xfig y \LaTeX .

REFERENCIAS

- Amarakoon A.M.D., Hussey R.G., Good B.J., and Grimsal E.G. Drag measurements for axisymmetric motion of a torus at low Reynolds number. *Physics of Fluids*, 25(9):1495–1501, 1982.
- Burghignoli P., Pajewski L., Frezza F., and Galli A. Improved quadrature formulas for boundary integral equations with conducting or dielectric edge singularities. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(2):373–379, 2004.
- D’Elía J., Battaglia L., Cardona A., and Storti M. Full numerical quadrature of weakly singular double surface integrals in Galerkin boundary element methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 27:314–334, 2009.
- D’Elía J., Battaglia L., Storti M., and Cardona A. Galerkin boundary integral equations applied to three dimensional Stokes flows. In Cardona, Storti, and Zuppa, editors, *Mecánica Computacional*, vol. XXVII, pages 2397–2410. San Luis, 2008.
- D’Elía J., Nigro N., and Storti M. Numerical simulations of axisymmetric inertial waves in a rotating sphere by finite elements. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 20(10):673–658, 2006.
- Duffy M.G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity in a vertex. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(6):1260–1262, 1982.
- Eibert T.F. and Hansen V. On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(12):1499–1502, 1995.
- Hartmann F. *Introduction to Boundary Elements*. Springer-Verlag, 1989.
- Hebeker F.K. Efficient boundary element methods for three-dimensional exterior viscous flow. *Num. Meth. PDE*, 2(4):273–297, 1986.

- Ingber M.S. and Mammoli A.A. A comparison of integral formulations for the analysis of low Reynolds number flows. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, 23:307–315, 1999.
- Kim S. and Karrila S.J. Integral equations of second kind for Stokes flow: direct solutions for physical variables and removal of inherent accuracy limitations. *Chemical Engineering Communications*, 82:123–161, 1989.
- Kozlov V., Maz'ia V.G., and Rossman J. *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*. AMS Bookstore, 2001.
- Ladyzhenskaya O. *The Mathematical Theory of Viscous Flow, 2nd. Edition*. Gordon and Breach Science Publishers, 1969.
- Majumdar S.R. and O'Neill M.E. On axisymmetric Stokes flow past a torus. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 28:541–550, 1977.
- Méndez C., Paquay S., Klapka I., and Raskin J.P. Effect of geometrical nonlinearity on MEMS thermoelastic damping. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(3):1579–1588, 2008.
- Mustakis I. and Kim S. Microhydrodynamics of sharp corners and edges: traction singularities. *AIChE*, 44(7):1469–1483, 1998.
- Paquay S. *Développement d'une méthodologie de simulation numérique pour les problèmes vibro-acoustiques couplés intérieurs/extérieurs de grandes taille*. Ph.D. thesis, Faculté des Sciences Appliquées, Liège, Belgium, 2002.
- Paris F. and Cañas J. *Boundary Element Method. Fundamentals and applications*. Oxford, 1997.
- Power H. and Miranda G. Second kind integral equation formulation of Stokes flows past a particle of arbitrary shape. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(4):689–698, 1987.
- Power H. and Wrobel L. *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications, 1995.
- Pozrikidis C. *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Oxford, 1996.
- Pozrikidis C. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge University Press, 1997.
- Siebers D., Eibert T.F., and Hansen V. Correction to on the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(9):3113–3113, 2005.
- Taylor D.J. Accurate and efficient numerical integration of weakly singulars integral in Galerkin IFIE solutions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(7):1630–1637, 2003a.
- Taylor D.J. Errata to Accurate and efficient numerical integration of weakly singulars integral in Galerkin IFIE solutions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(9):2543–2543, 2003b.
- Wang X. *Fast Stokes: A Fast 3-D Fluid Simulation Program for Micro-Electro-Mechanical Systems*. Ph.D. thesis, MIT, 2002.