

MODELADO CUASI UNIDIMENSIONAL DEL MOVIMIENTO DE UN PISTÓN EN EL INTERIOR DE UN TUBO

Martín Acosta*, José P. Tamagno*

* Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez Sarsfield 1601, Córdoba (5000), Argentina.
e-mail: medacosta@yahoo.com jtamagno@com.uncor.edu

Palabras claves: unidimensional, modelado numérico, tubos, celdas, interfaces, pistón, “solver” de Riemann.

Resumen. *Se describe un esquema numérico Lagrangiano para modelar el movimiento de un pistón en el interior de un tubo. El procedimiento general consiste en dividir el tubo en sus componentes: un recipiente con gas presurizado, un pistón considerado un cuerpo rígido y un tubo con gas a baja presión donde se desplaza el pistón. Cada componente que contiene gas se divide en cierto número de celdas limitadas por interfaces, las cuales, al desplazarse acompañando al pistón, conservan su masa. Las presiones y las velocidades que intervienen en las ecuaciones de la dinámica de los gases, se obtienen aplicando en cada interfaz un “solver” de Riemann. El “solver” se construye con valores de las variables que caracterizan el estado del flujo interpolados desde el centro de las celdas a las interfaces. Resuelto el problema gas dinámico, se procede con la integración de las ecuaciones que describen la dinámica del pistón. Resultados obtenidos en varias aplicaciones son presentados y discutidos.*

Abstract. *A Lagrangian numerical scheme for the quasi-one-dimensional modelling of the motion of a piston inside a tube is described. The general procedure for modelling is to divide the tube into its components parts: a recipient with pressurised gas, a piston considered as a rigid body and a tube with gas at low pressure where the piston moves. Each component containing gas is divided into a number of cells limited by interfaces. The cells when moving accompanying the piston, conserve their mass. The pressures and velocities that intervene in the gas dynamics equations, are obtained by applying a Riemann “solver” which is built upon values interpolated from the centre of the cells to the interfaces, of the variables which characterise the flow state. Once the gas dynamics problem has been resolved, one can proceed with the integration of the equations describing the piston dynamics. The results obtained in several applications, are presented and analysed.*

1 INTRODUCCIÓN

Los métodos simplificados que con frecuencia fueron utilizadas para modelar el movimiento de un pistón lanzado en el interior de un tubo, dependían de si el tubo era abierto o cerrado, de la velocidad máxima a alcanzar por el pistón y sobre todo, que los sistemas de ondas generados adelante y detrás del pistón, sean simples. Una buena técnica aplicable a bajas velocidades del pistón, tubos cerrados y de igual diámetro, ha sido desarrollada por Hornung¹. El propósito de este trabajo es presentar una técnica de solución tipo Lagrangiana la cual, en principio, pueda ser aplicada al modelado del movimiento del pistón tanto en tubos abiertos como cerrados, a sistemas en los cuales los diámetros de los tubos de alta y baja presión son distintos, a casos en que la velocidad del pistón puede llegar a exceder la velocidad del sonido del gas que está adelante del mismo y además, que no requiera cambios en el modelo matemático según evolucione el sistema de ondas que ha sido generado por el pistón.

Cuando se utiliza una formulación Lagrangiana, cada componente que contiene gas se divide en cierto número de celdas y cada una de estas celdas pasa a integrar un sistema de masas cuyo movimiento, acompañando al pistón, debe ser seguido con el transcurso del tiempo. Durante su desplazamiento, las celdas se dilatan o comprimen, se producen cambios en la velocidad y en la energía total específica del gas contenido en cada una de ellas, pero la masa se conserva. Una vez integradas las ecuaciones diferenciales fluido dinámicas, el cálculo se completa especificando, vía la ecuación de estado, las propiedades termodinámicas del gas en cada celda. En este contexto, ya en 1950 Von Neumann y Richtmeyer² y en 1967 Richtmeyer y Morton³, propusieron esquemas Lagrangianos para solucionar las ecuaciones de la dinámica de los gases unidimensional.

El procedimiento de cálculo presentado en este trabajo, también se encuadra dentro del contexto Lagrangiano expuesto, pero en lo que atañe a la forma como se evalúan las presiones y las velocidades en las interfaces entre las celdas, se introducen dos variantes. La primera, se aplica cuando se realiza la interpolación del estado del flujo desde el centro de cada celda a las interfaces y la segunda, cuando para el cálculo del estado (p , u) en cada interfaz se utiliza un “solver” de Riemann aproximado⁴. La aplicación de estas variantes adquiere relevancia, si se tiene en cuenta que las presiones y velocidades calculadas en cada interfaz intervienen de manera directa en las ecuaciones diferenciales fluido dinámicas del esquema propuesto, las cuales, al ser integradas en el tiempo determinan los sucesivos nuevos estados de cada celda.

Cabe señalar que el pistón es considerado una celda más pero con características especiales, ya que en la interfaz pistón-gas la velocidad está especificada (igual a la del pistón) durante la aplicación del “solver”. Determinadas las presiones en las celdas de gas situadas a uno y otro lado del pistón, se puede proceder con la integración de las ecuaciones que describen su movimiento en función del tiempo. Se obtienen así la posición y la velocidad del pistón en cada instante.

La técnica numérica y el correspondiente código computacional desarrollados para analizar el movimiento del pistón lanzado en el interior de un tubo, han sido aplicados a una gran variedad de casos incluyendo tubos cerrados y abiertos, tubos con diámetros diferentes, con temperaturas de gases distintas a uno y otro lado del pistón y también, a situaciones límites

con el propósito de cotejar resultados numéricos con predicciones teóricas. Aquí, solo se presentarán algunos resultados, los cuales se estima, son indicativos de las posibilidades de la técnica propuesta.

2 MODELADO NUMÉRICO

Acorde con la formulación unidimensional propuesta, el sistema lanzador se modela como un conjunto de tubos alineados según el eje x (Fig. 1). Estos tubos, con longitudes y diámetros definidos, contienen el gas con presión alta y el gas con presión baja en donde se desplaza el pistón. Si existiese una variación de área entre los tubos, se supondrá que es gradual y se extiende por una distancia determinada. Las propiedades de los gases contenidos inicialmente en los tubos de alta y baja presión son consideradas datos. El pistón es modelado como un cuerpo rígido, de longitud y masa conocidas.

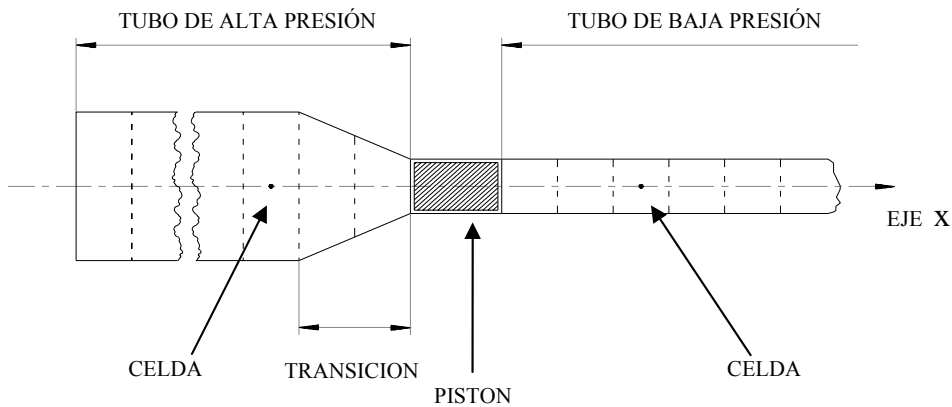


Fig. 1: Sistema Lanzador

2.1 Dinámica de los gases

Cada componente que contiene gas se divide en un número determinado de celdas limitadas por interfaces. Al desplazarse el pistón también lo hacen las celdas, comprimiéndose o dilatándose durante ese desplazamiento. Esto modifica la distancia entre las interfaces de cada celda e induce cambios en la velocidad y en la energía total específica del gas contenido en cada una de ellas. No obstante, la masa de cada una de las celdas se conserva. Dado el carácter unidimensional del análisis, la capa límite a lo largo de la pared del tubo no puede ser modelada, no obstante, algunos de sus efectos son tenidos en cuenta mediante la contribución de fuerzas tangenciales sobre la pared.

La Fig.(2), muestra una celda típica i cuyas interfaces con las celdas adyacentes son identificadas por $i - 1/2$ e $i + 1/2$. La descripción Lagrangiana del movimiento hace que la velocidad de la interfaz y la velocidad local del fluido sean iguales. Entonces:

$$\frac{dx_{i\pm 1/2}}{dt} = u_{i\pm 1/2} \quad (1)$$

donde x es la posición de la interfaz y u es la velocidad a computarse con un “solver” de Riemann aproximado.

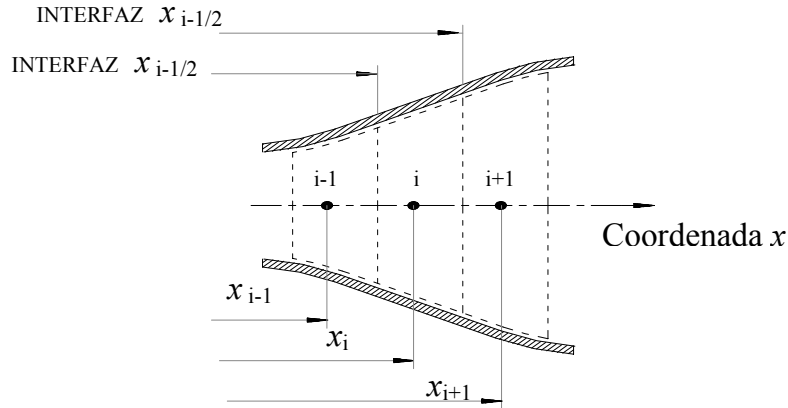


Fig. 2: Celdas e interfaces

El valor medio de la densidad dentro de la celda i se calcula por:

$$\bar{\rho} = \frac{m_i}{A_i(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})} \quad (2)$$

donde $(\bar{\dots})$ representa el valor medio de cualquier variable dentro de la celda. A es el área del conducto y m_i es la masa (constante) del gas en la celda i .

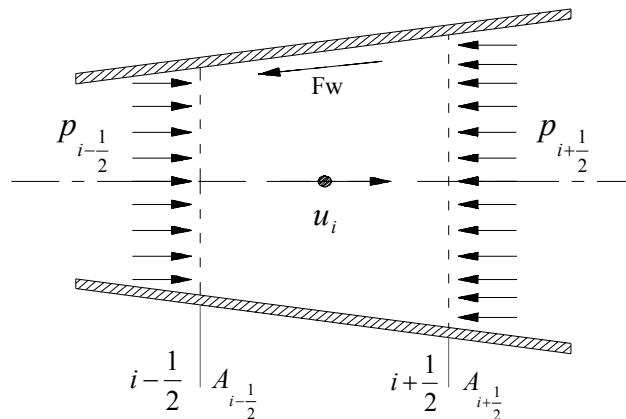


Fig. 3: Presiones actuantes sobre las interfaces y la fuerza viscosa desde la pared del conducto

Los cambios en la cantidad de movimiento del gas contenido en cada celda, se deben a las fuerzas de las presiones actuantes sobre las interfaces y a las fuerzas viscosas que actúan en las paredes del conducto (Fig. 3).

Dichos cambios están dados por:

$$\frac{d}{dt} m_i \bar{u}_i = p_{i-1/2} A_{i-1/2} - p_{i+1/2} A_{i+1/2} + \bar{p}_i (A_{i+1/2} - A_{i-1/2}) - \bar{F}_{wi} - \bar{F}_{pl} \quad (3)$$

donde F_w es la fuerza debida a fricción sobre la pared y F_{pl} es una fuerza efectiva resultante de perdidas locales.

La fuerza \bar{F}_w sobre una celda se expresa por:

$$\bar{F}_{wi} = \tau_w \pi \bar{D} (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \quad (4)$$

donde τ_w es el esfuerzo tangencial local sobre la pared y \bar{D} es el diámetro promedio de la celda en cuestión.

Cuando se producen cambios en la sección transversal del tubo, las pérdidas en cada celda se calculan mediante la expresión:

$$\bar{F}_{pl} = \frac{\Delta p_{pl}}{L_{pl}} \bar{A}_i (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \quad (5)$$

donde

$$\Delta p_{pl} = -K_L \frac{1}{2} \rho u |u| \quad (6)$$

K_L es un coeficiente experimental y L_{pl} es la longitud del tubo sobre la cual se distribuye la pérdida de presión.

El cambio en la energía del gas contenido en la celda i , se debe al trabajo que las fuerzas de presión realizan en las interfaces más el calor que se transfiere por las paredes de los tubos. Se puede expresar como:

$$\frac{d}{dt} m_i \bar{E}_i = p_{i-1/2} A_{i-1/2} u_{i-1/2} - p_{i+1/2} A_{i+1/2} u_{i+1/2} + \bar{q}_i \quad (7)$$

donde $E_i = e_i + \frac{1}{2} u_i^2$ es la energía total específica del gas y q_i la cantidad de calor que se transfiere hacia la celda. Esta última se escribe:

$$\bar{q}_i = h \pi \bar{D} (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) (T_w - T_{aw})_i \quad (8)$$

con $h = \rho C_p |u| S_t$, siendo S_t es el número de Stanton para flujos turbulentos en conductos, el cual se puede calcular aplicando la analogía de Reynolds en tubos⁵.

Las ecuaciones diferenciales para el problema gas dinámico (Ecs. 1, 2, 3 y 7), se completan especificando las propiedades termodinámicas del gas.

Si el gas es considerado calórico perfecto, la energía interna es proporcional a la temperatura y está dada por:

$$e = C_v T \quad (9)$$

siendo C_v el calor específico del gas a volumen constante. Entonces, la ecuación de estado puede ser escrita de la forma:

$$p = \rho(\gamma - 1)e \quad (10)$$

y la velocidad del sonido:

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma(\gamma - 1)e \quad (11)$$

2.2 Dinámica del pistón

Se supone que el pistón tiene una masa fija (m_p), longitud (L_p) y área frontal (A_p). Las ecuaciones diferenciales que describen su movimiento son:

$$\frac{d}{dt} x_p = u_p \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} u_p = \frac{1}{m_p} [A_p (p_D - p_F) + F_f] \quad (13)$$

donde p_D y p_F son, respectivamente, las presiones detrás y adelante del pistón. \bar{F}_f es una fuerza de fricción total debida a la existencia de juntas de estanqueidad.

3 CÁLCULO DEL ESTADO DEL FLUJO EN LAS INTERFACES

Las presiones y velocidades utilizadas en las ecuaciones (1), (3) y (7) se obtienen mediante los dos pasos siguientes:

- 1) Interpolando el estado del flujo, dado por un conjunto de valores ρ, u y p , desde el centro de las celdas a las interfaces. Se asocia con cada interfaz un lado derecho y otro izquierdo, denominados R y L respectivamente y la interpolación de la cual se hace mención provee valores de ρ, u y p , tanto al lado derecho como al izquierdo de cada interfaz. Esta interpolación se realiza antes de cada paso de cálculo en el tiempo.
- 2) Aplicación de un “solver” de Riemann que se vale de los valores previamente determinados con la interpolación, para estimar en cada paso de tiempo el estado del flujo en las interfaces.

3.1 Interpolación desde el centro de las celdas

La interpolación del estado del flujo desde los valores medios del centro de las celdas a los lados R y L de las interfaces, se realiza por separado para cada una de las variables de dicho estado. Considérese, por ejemplo la densidad ρ , a cada lado de la interfaz $(i + \frac{1}{2})$ la densidad es obtenida utilizando las expresiones:

$$\rho_L = \rho_i + (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i) \min \text{mod}((\Delta-)_i, (\Delta+)_i) \quad (14a)$$

$$\rho_R = \rho_{i+1} + (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}) \min \text{mod}((\Delta-)_{i+1}, (\Delta+)_{i+1}) \quad (14b)$$

donde:

$$(\Delta-)_i = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (15a)$$

$$(\Delta+)_i = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (15b)$$

representan dos estimaciones posibles de la pendiente de la densidad para la celda i . Las coordenadas x_{i-1} , x_i y x_{i+1} son los puntos medios de las celdas $i-1$, i e $i+1$ respectivamente. La función **minmod** selecciona la pendiente con magnitud mínima si ambas pendientes tienen el mismo signo, caso contrario retorna cero⁶.

Una vez que los estados R y L a uno y otro lado de cada interfaz han sido determinados, se forman los invariantes de Riemann definidos por:

$$\bar{U}_L = u_L + \frac{2}{\gamma-1} a_L \quad (16a)$$

$$\bar{U}_R = u_R - \frac{2}{\gamma-1} a_R \quad (16b)$$

3.2 “Solver” de Riemann

Son varios los “solver” de Riemann que pueden ser utilizados, incluyendo esquemas iterativos “exactos” y aproximados (no iterativos)⁷⁻⁸. Los esquemas aproximados, por lo general, requieren menos tiempo de cálculo que los esquemas iterativos y debido a que el “solver” consume una fracción muy importante del tiempo de cómputo total, suelen preferirse esquemas aproximados. Jacobs, por su parte, produjo un “solver” que no es totalmente iterativo ni tampoco tan aproximado como los que emplean un solo paso y, a pesar de que el costo computacional no es el menor, se lo utiliza porque ha demostrado confiabilidad en múltiples aplicaciones⁴.

El “solver” de Jacobs es una aproximación en tres etapas del de Riemann. En la etapa 1 se supone que en las interfaces entre las celdas, un estado constante a la izquierda (subíndice L)

y otro a la derecha (subíndice R), interaccionan a través de un par de ondas de compresión o expansión de amplitud finita (e isoentrópicas) para generar un estado intermedio (L^* , R^*). En esta etapa, las propiedades (p^* , u^*) del flujo en el estado intermedio, pueden ser calculadas directamente a partir de relaciones válidas para un gas perfecto. La etapa 2, es invocada cuando el salto de presión a través de cualquiera de las ondas es grande, por ejemplo $p^* > 10 p_L$ o $p^* > 10 p_R$, en tal caso, las estimaciones de la presión y la velocidad en el estado intermedio se modifican utilizando relaciones propias del choque fuerte móvil desplazándose hacia la izquierda o hacia la derecha, según corresponda.

Si simultáneamente $p^* > 10 p_L$ y $p^* > 10 p_R$, entonces ambas ondas son consideradas choques fuertes y la presión y la velocidad del estado intermedio también pueden determinarse directamente. Pero si p^* es mayor que p_L o p_R (pero no de ambas), inicialmente, p^* puede estimarse como en la etapa 1 aunque luego, debe ser mejorada. Esto se consigue mediante un proceso iterativo en el cual se combinan relaciones derivadas del choque fuerte que viaja hacia la izquierda ($p^* > 10 p_L$) o hacia la derecha ($p^* > 10 p_R$), con relaciones derivadas de los invariantes de Riemann entre los estados (L, R) y (L^*, R^*) que se suponen válidas cuando $p^* \leq 10 p_L$ o $p^* \leq 10 p_R$. Concluida la iteración de p^* , la velocidad intermedia u^* es evaluada utilizando las relaciones del choque fuerte relevantes. Más detalles sobre esta etapa se encuentran en las referencias sobre el “solver” de Jacobs⁴.

Una vez calculadas la presión y la velocidad en la región intermedia detrás de las ondas, otras propiedades del flujo intermedias pueden ser evaluadas, dependiendo el procedimiento a seguir del valor de p^* relativo a p_L (a través de la onda que viaja hacia la izquierda) o a p_R (a través de la onda que viaja hacia la derecha). Las condiciones en las interfaces pueden ser seleccionadas o interpoladas desde los cuatro estados (L, L^*, R^*, R). Estos pasos, corresponden a la etapa 3 del “solver” de Jacobs.

En este trabajo, el movimiento del pistón ha sido restringido a situaciones en las cuales el pasaje de ondas que se desplazan hacia la izquierda y hacia la derecha, hace que se induzcan en cada interfaz estados intermedios (L^*, R^*) donde se cumple que $p^* < 10 p_L$ y $p^* < 10 p_R$, simultáneamente. Por lo tanto el estado (p^*, u^*) del flujo intermedio en cada interfaz, puede definirse aplicando solamente las relaciones especificadas en la etapa 1 del “solver” de Jacobs. Dichas relaciones, implementadas en el código con tal propósito, son:

$$p^* = p_L \left[\frac{1}{2} \frac{(\gamma - 1) \cdot (\bar{U}_L - \bar{U}_R)}{a_L \cdot (1 + Z)} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad (17)$$

$$u^* = \frac{\bar{U}_R + Z \bar{U}_L}{1 + Z} \quad (18)$$

donde los invariantes de Riemann \bar{U}_L y \bar{U}_R han sido previamente definidos por las ecuaciones (16 a y b). La variable Z está dada por:

$$Z = \left(\frac{p_L}{p_R} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{a_R}{a_L} \quad (19)$$

4 LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno deben ser aplicadas antes de realizar la interpolación descrita en la sección 3.1. Pero, imponer dichas condiciones y a la vez pretender que la mencionada interpolación incluya a las celdas contorno, puede que sea necesario añadir hasta dos celdas virtuales a cada contorno. Así ocurre, por ejemplo, con una pared sólida a la cual se deben añadir dos celdas virtuales. En este caso, las condiciones de contorno se aplican estableciendo que todas las cantidades escalares de celdas virtuales, sean iguales a las de celdas activas adyacentes a la pared. Por su parte, las velocidades de celdas virtuales son de la misma magnitud que las de celdas activas adyacentes al contorno, pero de distinto signo.

Cuando el gas está en contacto con el pistón, la velocidad de la interfaz pistón-gas esta especificada ($u^* = u_p$). La presión p^* en la interfaz puede entonces determinarse a partir de relaciones isoentrópicas. Si el pistón avanza hacia la derecha, para el gas que está adelante el pistón constituye un contorno a la izquierda, obteniéndose:

$$p^* = \left[(u_p - \bar{U}_R) \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^{1/2}} \left(\frac{\rho_R}{p_R^{1/\gamma}} \right)^{1/2} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (20)$$

mientras que para el gas que está detrás, el pistón es un contorno a la derecha. En este caso resulta:

$$p^* = \left[(\bar{U}_L - u_p) \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^{1/2}} \left(\frac{\rho_L}{p_L^{1/\gamma}} \right)^{1/2} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (21)$$

Si el tubo por el cual se desplaza el pistón es abierto y la velocidad de salida del gas es subsónica, entonces la presión en la última interfaz se iguala a la presión ambiente, o sea $p^* = p_a$, donde el subíndice a significa que pertenece al ambiente. La velocidad u^* en términos de la presión ambiente y de las propiedades del gas a la izquierda de la interfaz en cuestión, está dada por:

$$u^* = \bar{U}_L - \frac{2\gamma^{1/2}}{\gamma-1} \left(\frac{p_L}{\rho_L} \right)^{1/2} (p_a)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (22)$$

Si las condiciones del flujo son tales que se alcanzan condiciones sónicas a la salida del conducto, entonces, la velocidad en la última interfaz se iguala con la velocidad del sonido, es decir se hace $u^* = a_L^*$. La presión p^* en términos de las propiedades del gas a la izquierda de la última interfaz, resulta:

$$p^* = p_L \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\gamma^{1/2}} \bar{U}_L \left(\frac{\rho_L}{p_L} \right)^{1/2} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (23)$$

verificándose además que:

$$a_L^* = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \bar{U}_L \quad (24)$$

Para conocer cuando es aplicable la Ec. (23) se puede proceder de la siguiente manera. Primero, calcular u_a^* utilizando la Ec. (22), luego a partir de la ecuación que relaciona los valores de u_a^* y a_L^* del estado intermedio con el invariante \bar{U}_L , obtener:

$$M_a^* = \frac{u_a^*}{a_L^*} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{\left(\frac{\bar{U}_L}{u_a^*} - 1 \right)} \quad (25)$$

donde a la relación $\frac{u_a^*}{a_L^*}$ se designa con M_a^* . Únicamente cuando $M_a^* \geq 1$, se considera que $u^* = a_L^*$.

5 LA INTEGRACIÓN RESPECTO DEL TIEMPO

Una vez que han sido determinados los estados (L, R) en las interfaces entre las celdas gaseosas y los estados L y R correspondientes a las interfaces entre el pistón y las celdas adyacentes, se formula un conjunto de problemas de Riemann centrados en cada interfaz, siendo todos ellos solucionados en términos de las variables (u^*, p^*) . Como solamente se utiliza la primera etapa del “solver” descrito en la sección 3.2, la presión p^* y la velocidad u^* son determinadas directamente aplicando las relaciones (17) y (18). En consecuencia, los valores de presión y velocidad a ser utilizados en las ecuaciones de la dinámica Lagrangiana de las celdas gaseosas valen:

$$P_{i\pm 1/2} = P_{i\pm 1/2}^* \quad ; \quad u_{i\pm 1/2} = u_{i\pm 1/2}^* \quad (26)$$

No obstante, cabe señalar que estas relaciones no serían aplicables si con ondas de expansión centradas en cada interfaz se excede la velocidad del sonido.

Puede ahora realizarse la integración respecto del tiempo y avanzar el estado del gas en cada una de las celdas contenidas en el interior de los tubos y también la trayectoria del pistón, desde el nivel n al nivel $n+1$ en el tiempo. Esta integración se efectúa utilizando la aproximación de primer orden:

$$\Delta G = \frac{dG^n}{dt} \Delta t \quad (27)$$

$$G^{n+1} = G^n + \Delta G \quad (28)$$

donde

$$G = (x_{i\pm 1/2}, m_i \bar{u}_i, m_i \bar{E}_i)^T \quad \text{para el gas} \quad (29)$$

y

$$G = (x_p, u_p)^T \quad \text{para el pistón.} \quad (30)$$

Para mantener estabilidad , el paso de tiempo se restringe a:

$$\Delta t_{\text{permitido}} = CFL \Delta t_{\text{señal}} \quad (31)$$

donde $\Delta t_{\text{permitido}}$ es el valor más pequeño para todas las celdas y CFL es el número especificado de Courant-Friedrichs-Levy. En las simulaciones que se discutirán más adelante se utilizaron números CFL que varían entre 0.1 y 0.2. Para cada celda, el tiempo de propagación de la señal es aproximado por:

$$\Delta t_{\text{señal}} = \frac{\Delta x_{\min}}{(|u| + a)_{\max}} \quad (32)$$

6 RESULTADOS

6.1 Tubos cerrados

El concepto de tubo cerrado implica que tanto el extremo izquierdo del tubo que contiene gas con alta presión, como el extremo derecho del que contiene gas con baja presión, son paredes sólidas. Para satisfacer las condiciones de contorno sobre estas paredes, se añaden a cada extremo, dos celdas virtuales, las cuales son necesarias para aplicar las condiciones de contorno reflectantes descritas en la sección 4.

En ningún caso la fricción F_w de los gases con las paredes de los tubos y las pérdidas secundarias F_{pl} fueron tenidas en cuenta. También se supuso que el pistón se desliza por el interior del tubo sin roce.

6.1.1 Caso TC 1

Los datos correspondientes a este caso son:

Tubo de alta presión

Longitud (m)	2.00
Diámetro (m)	0.15
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	700.0
Temperatura (° K)	300.0

Tubo de baja presión

Longitud (m)	6.00
Diámetro (m)	0.15
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	100.0
Temperatura (° K)	300.0

Pistón

Longitud (m)	0.30
Densidad (kg./m ³)	2000.0

Otros

Número CFL	0.20
Número de celdas a la izquierda del pistón	100
Número de celdas a la derecha del pistón	300

En las figuras 4 y 5 se han graficado, respectivamente, la distribución de velocidades del pistón en función del tiempo y la posición del centro del pistón. Se deduce de dichos gráficos que el pistón comienza a moverse desde su posición inicial, alcanza una velocidad máxima (44.4 m/s) en el punto de inflexión de la curva de la Fig. 5 y, a cierta distancia mínima desde la pared sólida que limita al tubo de baja presión, la velocidad se hace nula. Si en ese instante, que ocurre 0.151 s después del inicio del movimiento se asume que el pistón se detiene (simplemente se interrumpe el proceso de cálculo), las distribuciones de la densidad y la presión que resultan en los tubos son las que se presentan en las figuras 6 y 7.

Entre la pared sólida y la posición del pistón se nota un fuerte incremento de la densidad del gas respecto de su valor inicial (Fig. 6). También se observan importantes oscilaciones, las cuales se estima, son motivadas por la generación y rebotes de ondas continuas desde el pistón y la pared sólida a la derecha del tubo de baja presión. No obstante, su valor medio queda determinado por la relación entre el volumen inicial del tubo y el volumen final una vez detenido el pistón, y vale:

$$\rho_f = \rho_i \frac{l_i}{l_f} = 5.67 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

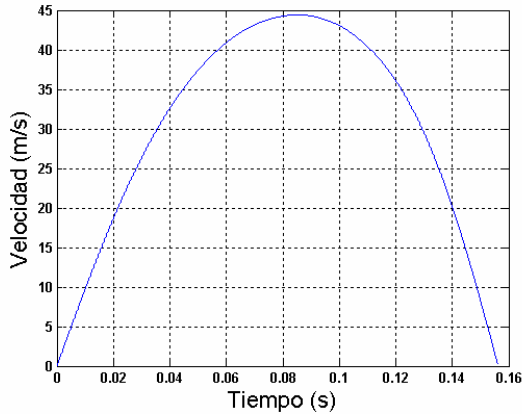


Fig. 4: Velocidad del pistón en función del tiempo

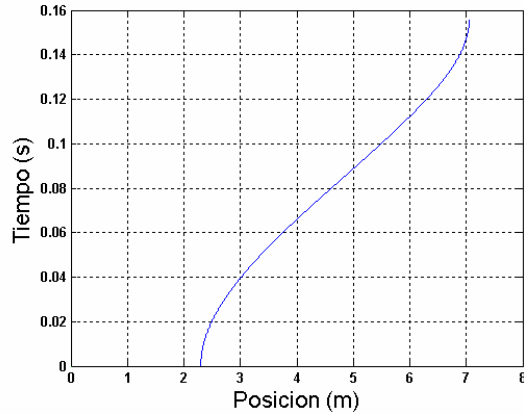


Fig. 5: Posición del pistón en el tiempo

El comportamiento de la presión en los tubos en función de la distancia puede visualizarse en la Fig. 7. A la izquierda del pistón, debido al incremento de volumen producido por el desplazamiento del mismo, la presión desciende considerablemente. Entre la pared sólida y el pistón en el instante que se supone queda quieto la presión, tal como era de esperar, experimenta un fuerte incremento respecto de su valor inicial (100 kPa).

Igual que con la densidad, también se producen oscilaciones con la presión, no obstante, el valor medio se aproxima al de la relación isoentrópica:

$$p_f = p_i \left(\frac{l_i}{l_f} \right)^\gamma = 919.5 \text{ kPa}$$

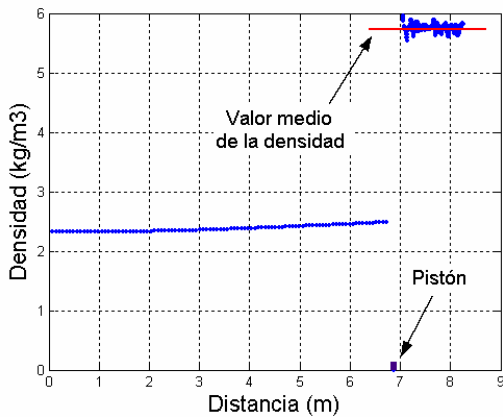


Fig. 6: Densidad en los tubos vs. distancia

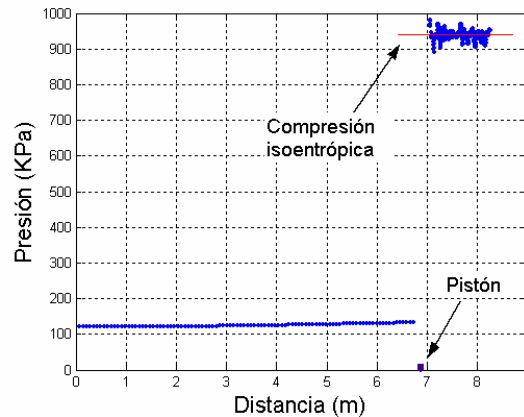


Fig. 7: Presión en los tubos vs. distancia

Si el proceso de cálculo, interrumpido cuando el pistón alcanzó velocidad nula, continua, la diferencia de presión ahora existente entre ambos lados del pistón hará que éste comience a desplazarse hacia la izquierda. Si el tiempo de cálculo es el apropiado, se puede generar un movimiento oscilatorio del pistón entre las paredes sólidas del tubo cerrado.

6.1.2 Caso TC 2a

Los datos iniciales correspondientes a este caso se presentan en las tablas siguientes

Tubo de alta presión

Longitud (m)	2.00
Diámetro (m)	0.15
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	5000.0
Temperatura (° K)	300.0

Tubo de baja presión

Longitud (m)	6.00
Diámetro (m)	0.15
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	100.0
Temperatura (° K)	300.0

Pistón

Longitud (m)	0.10
Densidad (kg./m ³)	1000.0

Otros

Número CFL	0.20
Número de celdas a la izquierda del pistón	200
Número de celdas a la derecha del pistón	600

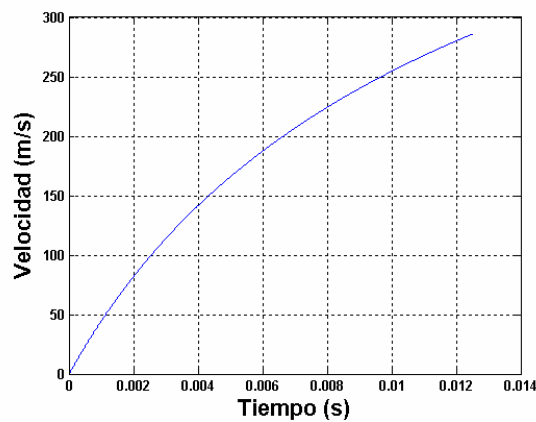


Fig. 8: Velocidad del pistón vs. Tiempo

En la Fig. 8 se presenta la velocidad del pistón en función del tiempo. Se observa que luego de 0.0125 s (6000 pasos de cálculo), el pistón ha alcanzado una velocidad de 286.3 m/s. Las presiones en los tubos se visualizan en la Fig. 9, donde también se muestra que el pistón se ha desplazado 2.275 m desde su posición inicial. A la izquierda del pistón, obviamente, la presión disminuye respecto de su valor inicial y lo hace según dos modalidades. Este comportamiento se atribuye al conjunto de ondas de expansión generado por el movimiento del pistón y la subsiguiente reflexión desde la pared sólida a la izquierda. A la derecha del pistón se ve el aumento de presión que se produce por las ondas de compresión generadas exclusivamente por el pistón. También, ya se detecta un pequeño salto de presión debido a la coalescencia de dichas ondas de compresión.

La distribución de velocidades en los tubos (Fig. 10), muestra como la influencia del pistón sobre el gas que está adelante se interrumpe abruptamente a una distancia de 2.5 m desde el centro del pistón en su posición actual y la velocidad del gas pasa, desde aproximadamente 150 m/s a un valor nulo.

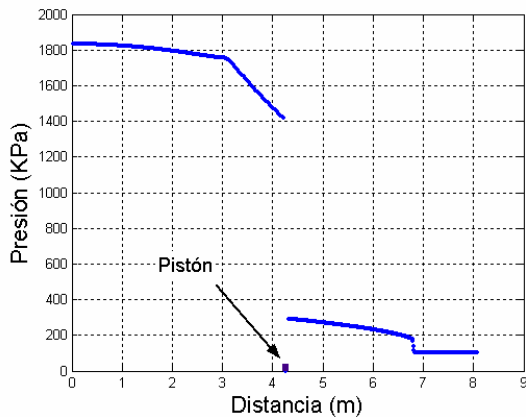


Fig.9: Presión en los tubos vs. distancia

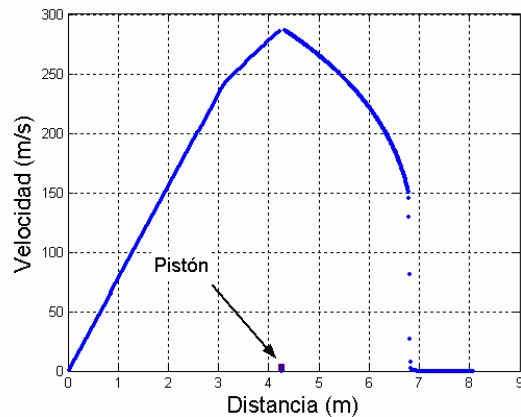


Fig.10: Velocidad en los tubos vs. distancia

6.1.3 Caso TC 2b

Este caso difiere del anterior (caso TC 2a) solamente en la densidad del pistón, la cual se supone vale 10 kg/m^3 y en el número CFL que ahora es 0.10. La longitud del pistón mantiene el valor de 0.10 m.

La Fig. 11 muestra que la velocidad del pistón alcanza un valor máximo prácticamente constante de 481.4 m/s. Lógicamente si la velocidad es considerada constante, la resultante de las fuerzas actuantes sobre el pistón debe ser nula, lo cual hace que las presiones a uno y otro lado del pistón sean iguales, tal como muestra la Fig. 12. En esta figura, también se ve que a cierta distancia adelante del pistón, la presión del gas experimenta un fuerte salto, de 100 kPa a 514.3 kPa. A su vez, la velocidad pasa desde un valor nulo a 481.4 m/s pocas celdas mediante (Fig. 14).

Los resultados presentados en las figuras 11, 12 y 13, pueden ser analizados en un contexto de ondas de expansión continuas y discontinuidades que interactúan tal como en un problema

de Riemann, siendo entonces aplicables las relaciones teóricas⁹. En la Tabla I se comparan valores obtenidos con dichas relaciones teóricas y las estimaciones numéricas.

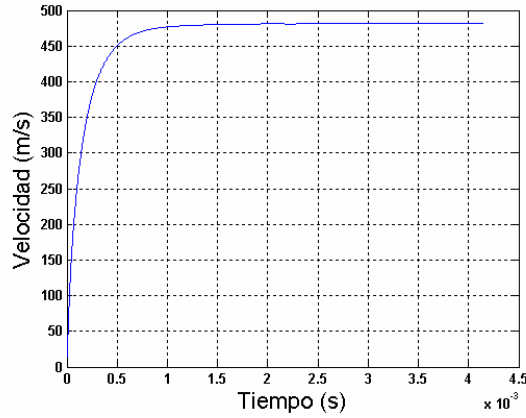


Fig. 11: Velocidad del pistón vs. tiempo

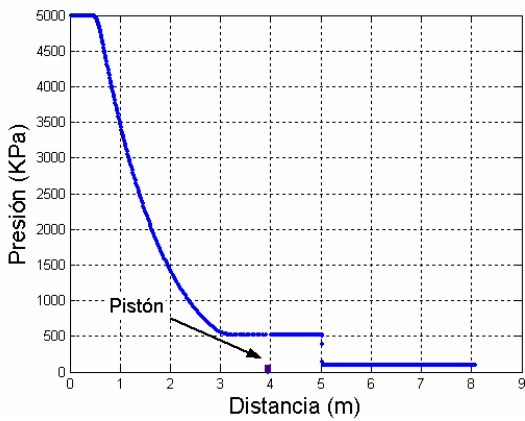


Fig. 12: Presión en los tubos vs. distancia

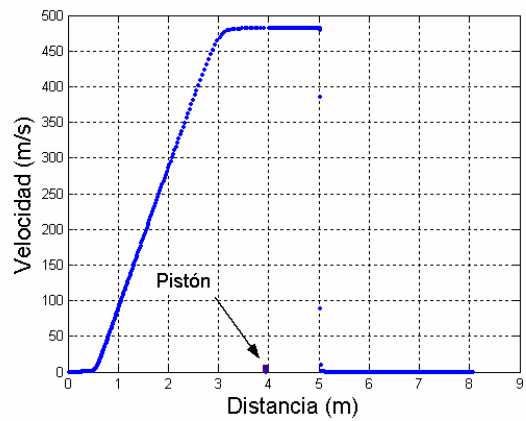


Fig. 13: Velocidad en los tubos vs. distancia

RELACION	TEORÍA	NUMÉRICO
P_2/p_1	5.144	5.143
ρ_2/ρ_1	2.859	2.868
ρ_3/ρ_1	9.854	9.823
P_4/p_1	50.032	50.000

Tabla I

6.1.4 Caso TC 3

Este es un caso en el cual el diámetro del tubo de alta presión es significativamente mayor

que el del tubo de baja presión y por ende del pistón. Sus datos son:

Tubo de alta presión

Longitud (m)	2.00
Diámetro (m)	0.474
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	5000.0
Temperatura (° K)	300.0

Tubo de baja presión

Longitud (m)	6.00
Diámetro (m)	0.15
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	100.0
Temperatura (° K)	300.0

Pistón

Longitud (m)	0.10
Densidad (kg./m ³)	2000.0

Otros

Número CFL	0.20
Número de celdas a la izquierda del pistón	400
Número de celdas a la derecha del pistón	600

La longitud (2.00 m) del tubo de alta presión, incluye un tramo convergente de 0.50 m mediante el cual se realiza la transición geométrica desde el tubo de alta presión al de baja presión. En dicho convergente, se supone que el diámetro varía linealmente. Obviamente el pistón, antes del lanzamiento, se coloca inmediatamente después de la zona de transición.

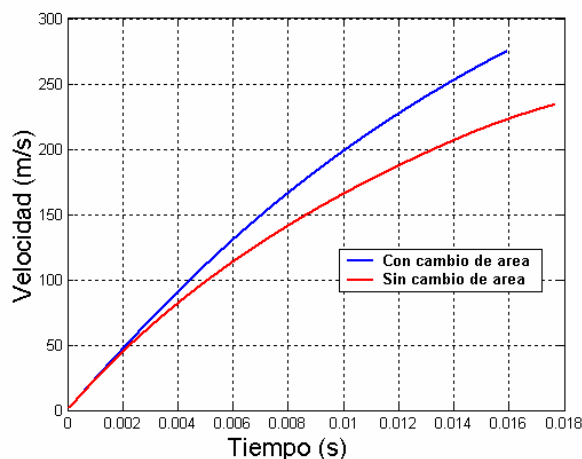


Fig. 14: Velocidad del pistón en función del tiempo – Tubos con diámetros diferentes e iguales.

Transcurrido un tiempo de 0.01595 s desde el comienzo del evento y realizados 8000 pasos de cálculo en el tiempo, se obtuvieron los resultados que muestran las figuras (14) y (15). Además, en estas figuras se incluyeron los resultados de un sistema cuyos tubos de alta y baja presión tienen el mismo diámetro (0.15 m).

La Fig. (14) muestra que la velocidad que adquiere el pistón cuando los tubos no son de igual diámetro, es definitivamente mayor que la que se consigue con un sistema de tubos de diámetros iguales.

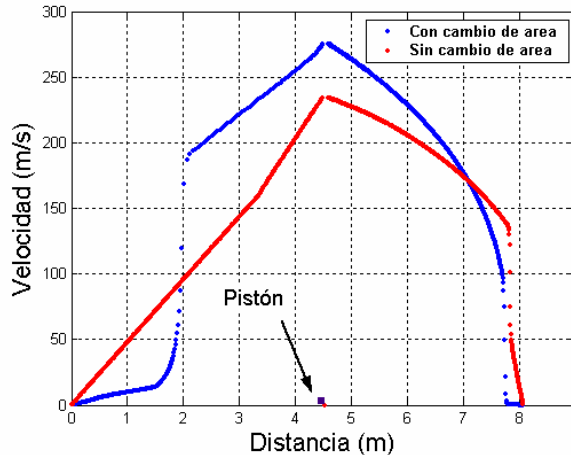


Fig. 15: Velocidad en los tubos vs. distancia– Tubos con diámetros diferentes e iguales

El gráfico velocidad versus distancia de la Fig. (15) muestra que en el sistema con diámetros diferentes, el aumento de la velocidad hasta el comienzo del convergente, es relativamente pequeño. Luego, en los 0.50 m del convergente la velocidad se incrementa muy rápidamente (hasta una velocidad próxima a los 170 m/s). Esto se debe a que el área de pasaje del gas se reduce en un orden de magnitud. Después del convergente, el gas continúa acelerándose para satisfacer la condición de contorno impuesta en la interfaz gas-superficie posterior del pistón.

6.2 Tubos abiertos

El concepto de tubo abierto implica que el extremo del tubo hacia el cual se lanza el pistón, está en comunicación directa con el medio externo. Por lo tanto, al desplazarse el pistón por el interior del tubo abierto, el número de celdas activas ubicadas adelante del pistón irá disminuyendo hasta no quedar ninguna. Esto hizo que sea necesario implementar un procedimiento que tenga en cuenta esa disminución.

En la sección de salida del tubo abierto, las condiciones de contorno impuestas son velocidad sónica o presión igual a la del medio externo. Tampoco ahora la fricción F_w de los gases con las paredes de los tubos y las pérdidas secundarias F_{pl} son tenidas en cuenta. Asimismo, se supuso que el pistón se desliza por el interior del tubo sin roce.

6.2.1 Caso TA 1

Los datos correspondientes a este caso son:

Tubo de alta presión

Longitud (m)	3.00
Diámetro (m)	0.04
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	500.0
Temperatura (° K)	300.0

Tubo de baja presión

Longitud (m)	3.00
Diámetro (m)	0.04
Tipo de gas	Aire
Presión (kPa)	100.0
Temperatura (° K)	300.0

Pistón

Longitud (m)	0.01
Densidad (kg./m ³)	1.1627

Otros

Número CFL	0.15
Número de celdas a la izquierda del pistón	150
Número de celdas a la derecha del pistón	150

Obsérvese que la densidad del pistón se reduce hasta que su masa iguala a la de las celdas del gas en el tubo de baja presión, por ello se lo puede caracterizar como una celda – pistón.

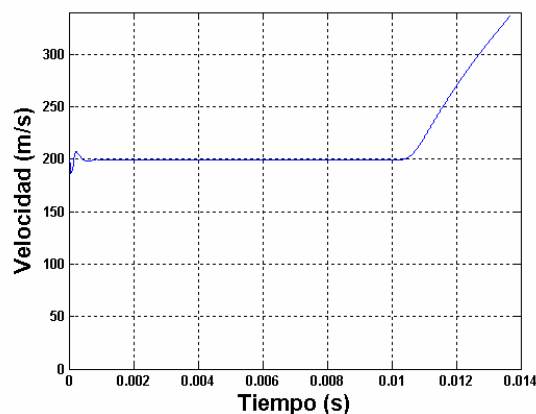


Fig. 16: Velocidad del pistón en función del tiempo

La Fig. (16) muestra el comportamiento de la velocidad del pistón en función del tiempo $t = 0.01367$ s transcurrido desde el lanzamiento y 4816 pasos de cálculo en el tiempo. Con este número de pasos de cálculo, el pistón se desplaza hasta la sección de salida del tubo donde fue lanzado (más estrictamente, hasta dos celdas antes). Se observa que debido a su escasa masa, el pistón casi instantáneamente adquiere una velocidad de 199 m/s, la cual se mantiene constante por un determinado lapso y luego acelera hasta 338 m/s que es la velocidad con que arriba a la salida del tubo. Para explicar porque el pistón se comporta de esta manera, es conveniente referirse al gráfico $x-t$ de la Fig. (17).

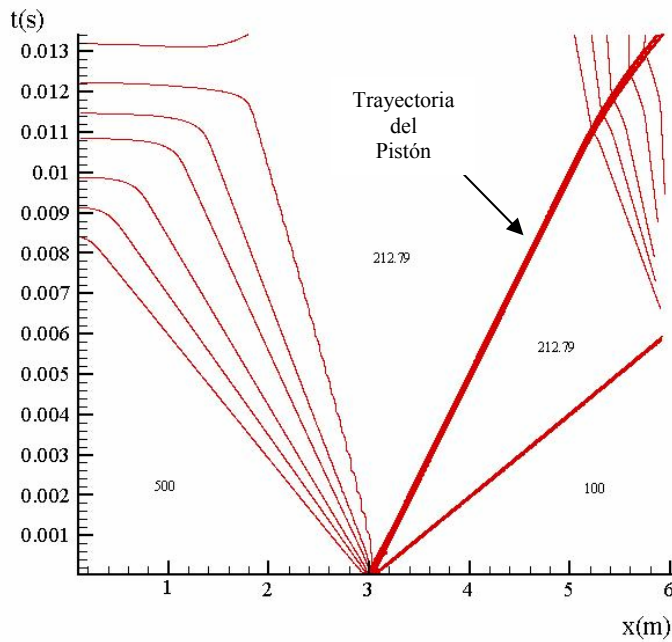


Fig. 17: Diagrama $x-t$ de zonas con presión constante

En dicho diagrama están representadas: la trayectoria de la celda transformada en pistón, una discontinuidad inducida por la velocidad que el pistón adquiere casi instantáneamente y que por los cambios que se producen a través de ella puede identificarse como una onda de choque de baja intensidad, una onda de expansión que viaja hacia la izquierda la cual atento a como se inicia el movimiento del pistón puede considerarse centrada y, finalmente, una onda de expansión también centrada que tiene su origen donde la onda de choque interacciona con el ambiente externo de presión constante. Esta última onda actúa sobre el pistón acelerándolo y esto hace que el flujo a la izquierda que está en contacto con el pistón también se acelere. Si se extraen los resultados para un tiempo constante de 0.010 s, se obtienen los gráficos que se presentan en las figuras (18), (19) y (20).

En la Fig. (18) se presenta la distribución de velocidades en los tubos en función de la distancia. Obviamente la velocidad del gas es nula sobre la pared sólida ubicada en el extremo izquierdo de los tubos, luego se va incrementando hasta que alcanza un valor constante de 199 m/s a la izquierda de la celda – pistón cuya posición se visualiza mediante el símbolo sobre el eje x . A la derecha del pistón la velocidad del gas se mantiene en 199 m/s por un tramo muy

corto y luego, se acelera hasta adquirir una velocidad de 350 m/s. Esta aceleración del gas se debe a la onda de expansión que se origina cuando el choque que precede al pistón interacciona con el ambiente externo de presión constante. Esto da lugar a dos situaciones, o se expande hasta que la presión del gas a la salida del tubo sea igual a la del medio externo o hasta que la velocidad sea sónica. El gráfico de la Fig. (19) confirmaría que la velocidad a la salida es sónica. Obsérvese que el número de Mach a la izquierda del pistón es mayor que el número de Mach a su derecha, esto se debe a la diferencia entre las densidades de ambos lados del pistón y por ende, entre las velocidades del sonido

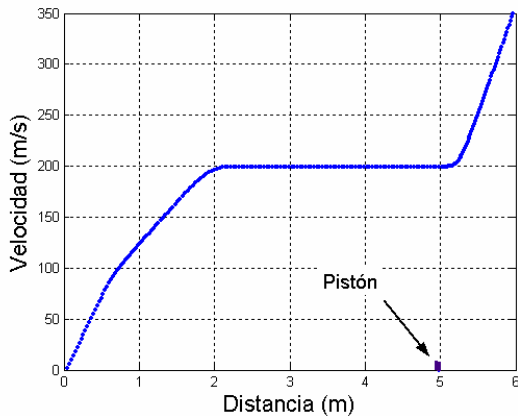


Fig. 18: Velocidad en los tubos vs. distancia ($t = 0.010$ s)

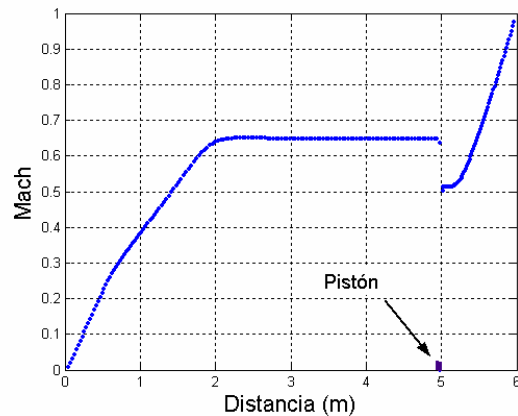


Fig. 19: Número de Mach en los tubos vs. distancia ($t = 0.010$ s)

El andar de las presiones en el interior de los tubos, también para $t = 0.010$ s, se muestra en la (Fig. 21). Se observa que la presión desciende hasta un mismo valor constante a ambos lados del pistón (de aproximadamente 213 kPa) y por último, disminuye hasta un valor compatible con la velocidad sónica que adquiere el gas a la salida del sistema.

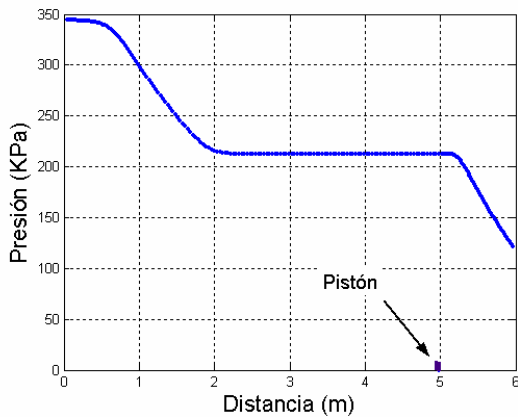


Fig. 20: Presión en los tubos vs. distancia ($t = 0.010$ s)

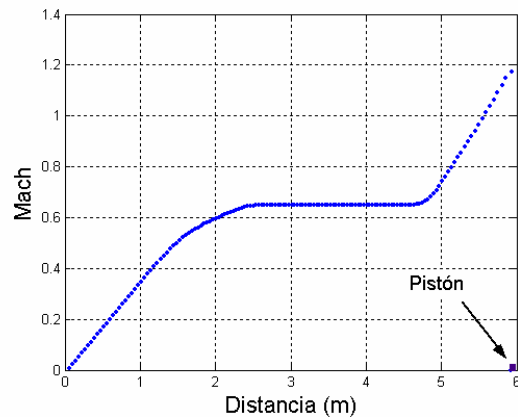


Fig. 21: Distribución del Mach vs. distancia cuando el pistón arriba al extremo derecho ($t = 0.0137$ s).

En la Fig. (21) se visualiza el comportamiento del número de Mach en el gas situado a la izquierda del pistón cuando éste ya se ha desplazado hasta el final del tubo donde fue lanzado. Se constata que en concordancia con la aceleración del pistón (Fig. 16), el gas también se acelera y, eventualmente, podría alcanzar velocidades supersónicas. El cálculo se interrumpe cuando el pistón llega a la sección de salida, aunque todavía permanece en el interior del tubo.

7 CONCLUSIONES

Un procedimiento de cálculo formulado en un contexto Lagrangiano, ha sido aplicado a la descripción del movimiento de un pistón en sistemas con tubos cerrados o abiertos y diámetros iguales o distintos. Se ha demostrado su aplicabilidad en casos donde el pistón adquiere velocidades superiores a la velocidad del sonido en el gas en reposo situado adelante de él y también en casos, especialmente conformados, para cotejar estimaciones numéricas con predicciones teóricas (por ejemplo con el problema de Riemann). En todas las aplicaciones, se ha verificado que el modelo matemático no ha necesitado de ajustes para adaptarse a un sistema de ondas cambiante con el transcurso del tiempo y la posición del pistón.

Dos aspectos son característicos de la técnica de solución presentada, la interpolación del estado del flujo desde el centro de cada celda a las interfaces y el “solver” que se utiliza para el cálculo del estado (p,u) en cada interfaz. Estos valores de la presión y la velocidad intervienen directamente en las ecuaciones de la dinámica Lagrangiana de las celdas gaseosas, las cuales una vez integradas, permiten avanzar en el tiempo el estado del gas en cada una de las celdas. Las presiones en las celdas situadas a uno y otro lado del pistón, son utilizadas para integrar las ecuaciones que describen la dinámica del pistón. Todas las integraciones respecto al tiempo fueron realizadas empleando una aproximación de primer orden y no se necesitaron grandes variaciones del número CFL para mantener la estabilidad del cálculo (entre 0.1 y 0.2).

8 REFERENCIAS

1. **Hornung, H., Sturtevant, B., Belanger, J., Sanderson, S., Brouillette, M. and Jenkins, M.**, “*Performance Data of the New Free Piston Shock Tunnel T5 at GALCIT*”, 18 th Symposium on Shock Waves and Shock Tubes, 1991.
2. **Von Neumann, J. and Richtmeyer, R. D.**, “*A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks*”, J. Applied Physics, Vol. 21, Marzo 1950.
3. **Richtmeyer, R. D. and Morton, K. W.**, “*Difference Methods for Initial Value Problems*”, Interscience Publishers, New York, 1967.
4. **Jacobs, P. A.**, “*Approximate Riemann Solver for Hypervelocity Flows*”, TN, AIAA Journal, Vol. 30, N° 10, pp. 2558-2561, 1992.
5. **Knudsen, J. G. and Katz, D. L.**, “*Fluid Dynamics and Heat Transfer*”, McGraw-Hill Book Co, Inc., Cap 15, New York, 1958.

6. **Yee, H. C.**, “*A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock capturing Method*”, NASA TM 101088, page 23, 1989.
7. **Gottlieb, J. J. and Groth, C. P. T.**, “*Assessment of Riemann Solvers for Unsteady One- Dimensional Inviscid Flows of Perfect Gases*”, Journal of Computational Physics, Vol. 78, N° 2, pp. 437-458, 1988.
8. **Roe, P. L.**, “*Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes*”, Journal of Computational Physics, Vol. 43, N° 2, pp. 357-372, 1981.
9. **Shapiro, A. H.**, “*The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*”, Vol. II, The Ronald Press Company, pp. 1007-1010, 1954.

AGRADECIMIENTOS

A la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Univ. Nac. de Córdoba por permitir la utilización en el trabajo presentado, de partes del Trabajo Final realizado por el primer autor para graduarse en la carrera de Ingeniería Aeronáutica. A la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Univ. Nac. de Córdoba por su apoyo a través del proyecto Estudios Teóricos-Numéricos con aplicaciones a la Dinámica de Plasmas y Gases.