

MEJORAMIENTO DEL COMPORTAMIENTO MEMBRANAL DEL ELEMENTO DE LÁMINA CUADRILÁTERO BSQ SIN GRADOS DE LIBERTAD ROTACIONALES USANDO UNA APROXIMACIÓN EN DEFORMACIONES IMPUESTAS

Carlos F. Estrada y Fernando G. Flores

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, wcastello@efn.uncor.edu - fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>

Palabras clave: elementos finitos, láminas delgadas, sin rotaciones.

Resumen. En este trabajo se presenta una aproximación en deformaciones impuestas con motivos de mejorar el comportamiento membranar de un elemento de lámina delgada cuadrilátero existente (BSQ). El elemento tiene solamente grados de libertad traslacionales y está basado en una formulación Lagrangeana Total. La principal diferencia con el elemento original BSQ es que el campo de las deformaciones membranales es computado utilizando una aproximación cuadrática involucrando a todos los nudos de la parcela. Otro aspecto distintivo, como consecuencia de la interpolación cuadrática, es el uso de un gradiente más suave para el cálculo de las deformaciones flexionales. El elemento es no conforme, sin embargo pasa la prueba de la parcela para mallas regulares y converge a la solución correcta para mallas irregulares a medida que éstas se refinan. Se asume un comportamiento plano de tensiones con una descomposición aditiva de las deformaciones elásticas y plásticas. Se considera una ley hiperelástica para la parte elástica en tanto que para la parte plástica se adopta una función de fluencia anisotrópica (Hill) con endurecimiento isotrópico no lineal. El elemento se denomina QBSQ (de su acrónimo en inglés *Quadratic Basic Shell Quadrilateral*), y se implementa en un código implícito y explícito. Los resultados numéricos muestran que la formulación propuesta brinda resultados competitivos frente a otras formulaciones.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas de los elementos de lámina delgada basados en la teoría de Kirchhoff-Love, son los problemas de continuidad C^1 . Esto dio origen a técnicas numéricas para el análisis de láminas que incluyen únicamente los grados de libertad (GdL) traslacional (denominado rotation-free). La primera aproximación se debe probablemente a [Nay y Utku \(1972\)](#) quienes desarrollaron un elemento de placa triangular usando una aproximación cuadrática para describir el campo de deflexiones de cada nodo en función de los nodos de la parcela que rodea al nodo en cuestión. Unos pocos años después [Barnes \(1977\)](#) propuso un método para derivar un elemento de placa triangular con las deflexiones nodales como los únicos GdL basando el cálculo de las curvaturas en términos de las rotaciones normales a los puntos medio de cada lado determinada en función de las deflexiones nodales de los elementos adyacentes. Este método fue explorado por [Hampshire \(1992\)](#) asumiendo que los lados están articulados, y que la rigidez flexional está representada por resortes torsionales que resisten el giro a lo largo de dicho lado. propusieron una clase similar de elementos triangulares de placa y lámina sin GdL rotacionales. [Yang et al. \(1993\)](#) derivó una familia de elementos triangulares de este tipo para el análisis de estampado de láminas basado en una formulación similar a la propuesta por [Hampshire \(1992\)](#). [Brunet y Sabourin \(1994\)](#) formularon una aproximación diferente para computar el campo de curvatura constante en cada triángulo en términos de los seis desplazamientos nodales. El triángulo fue exitosamente implementado en un código con integración explícita de las ecuaciones de movimiento para el análisis no lineal. [Rio et al. \(1994\)](#) utilizó un concepto de rigidez flexional de lado articulado para derivar un elemento triangular para problemas explícitos de estampado de láminas. Otro procedimiento general, que dio lugar a varios desarrollos de elementos de lámina sin grados rotacionales, se debe a [Oñate y Cervera \(1993\)](#). Así las principales ideas de dicho trabajo se formalizaron con el desarrollo de un elemento de placa triangular *BPT* (de su acrónimo en inglés *Basic Plate Triangle*) y de lámina *BST* (de su acrónimo en inglés *Basic Shell Triangle*) sin GdL rotacionales (ver [Oñate y Zárate \(2000\)](#)). Posteriormente [Flores y Oñate \(2001\)](#) presentó una extensión del *BST* usando una formulación Lagrangeana Total dando origen al *LBST*. Siguiendo con las mismas ideas [Flores y Oñate \(2005\)](#) desarrollaron un nuevo elemento triangular pero usando una aproximación en deformaciones impuestas. Para ello se utilizó una interpolación cuadrática calculando las formas fundamentales usando información de toda la parcela de elementos. Otros trabajos posteriores extendiendo las capacidades de los elementos de láminas triangulares (ver [Flores y Oñate \(2006a\)](#), [Flores y Oñate \(2006b\)](#)). Sin embargo, la mayoría de los desarrollos fueron sobre elementos triangulares. Así en el trabajo pionero de [Oñate y Cervera \(1993\)](#) se sugiere un elemento de lámina cuadrilátero pero no se muestran resultados numéricos. Entre los primeros elementos de lámina cuadrilátero se encuentra el trabajo de [Estrada y Flores \(2006\)](#) y posteriormente ‘publicado en [Flores y Estrada \(2007\)](#). Dando origen al elemento cuadrilátero denominado *BSQ* (de su acrónimo en inglés *Quadratic Basic Shell Quadrilateral*). Otro elemento contemporáneo es el de [Brunet y Sabourin \(2006\)](#) aunque con un enfoque distinto en cuanto a la forma de obtener el campo de curvaturas.

En este trabajo revisitamos el elemento *BSQ* con motivos de mejorar su comportamiento membranar. La formulación es una extensión de los elementos original y sigue las ideas del elemento triangular desarrollado previamente ([Flores y Oñate \(2005\)](#)). La principal característica del elemento es computar todas las deformaciones membranales utilizando todos los nudos de la parcela que conlleva a un comportamiento membranar no conforme. Dichos desarrollos dan origen al elemento denominado *QBSQ* (de su acrónimo en inglés *Quadratic Basic Shell Quadrilateral*). Al igual de lo que sucedía con el elemento original *BSQ* aparecen modos (en el

campo flexional y en el membranal) sin energía asociada. Así, para mantener un sólo punto de integración en el elemento es necesario utilizar algún mecanismo de estabilización. Para mayores detalles de algunos aspectos como ser: condiciones de borde, esquemas de estabilización, cálculo de la matriz tangente y fuerzas residuales puede consultarse el trabajo original de Estrada y Flores (2006).

2. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN Y EVALUACIÓN DE LOS GRADIENTES

La característica especial del elemento cuadrilátero es el uso de GdL traslacionales únicamente. Como la mayoría de las aproximaciones existentes se utiliza una parcela de elementos para poder evaluar los gradientes. Así en la formulación que se propone la curvatura al centro de cada lado se evalúa recurriendo a las posiciones de los nudos de los dos elementos adyacentes al lado, a partir de los cuales es posible definir una aproximación cuadrática en el sentido en el que se va a evaluar la curvatura y lineal en la otra dirección. Ejemplificando con el punto 1, ver Figura 1a, los nudos involucrados son 1,2,3,4,5 y 6, y la interpolación resulta

$$\varphi^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^6 A^I(\xi, \eta) \varphi^I \quad (1)$$

donde las funciones locales de mapeo y sus derivadas locales son (ver Figura 1b)

Nudo	A^I	$A^I_{,\xi}$	$A^I_{,\eta}$	$A^I_{,\eta\eta}$	$A^I_{,\eta\xi}$
1	$\frac{-1}{8}(1-\xi)(\eta^2+2\eta-3)$	$\frac{1}{8}(\eta^2+2\eta-3)$	$\frac{-1}{4}(1-\xi)(\eta+1)$	$\frac{-1}{4}(1-\xi)$	$\frac{1}{4}(\eta+1)$
2	$\frac{-1}{8}(1+\xi)(\eta^2+2\eta-3)$	$\frac{-1}{8}(\eta^2+2\eta-3)$	$\frac{-1}{4}(1+\xi)(\eta+1)$	$\frac{-1}{4}(1+\xi)$	$\frac{-1}{4}(\eta+1)$
3	$\frac{1}{16}(1+\xi)(\eta^2+4\eta+3)$	$\frac{1}{16}(\eta^2+4\eta+3)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(\eta+2)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)$	$\frac{1}{8}(\eta+2)$
4	$\frac{1}{16}(1-\xi)(\eta^2+4\eta+3)$	$\frac{-1}{16}(\eta^2+4\eta+3)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(\eta+2)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)$	$\frac{-1}{8}(\eta+2)$
5	$\frac{1}{16}(1-\xi)(\eta^2-1)$	$\frac{-1}{16}(\eta^2-1)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)\eta$	$\frac{1}{8}(1-\xi)$	$\frac{-1}{8}\eta$
6	$\frac{1}{16}(1+\xi)(\eta^2-1)$	$\frac{1}{16}(\eta^2-1)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)\eta$	$\frac{1}{8}(1+\xi)$	$\frac{1}{8}\eta$

Tabla 1: Funciones de forma y sus derivadas.

que evaluadas en el punto de interés $(\xi, \eta) = (0, -1)$ resultan

Nudo	A^I	$A^I_{,\xi}$	$A^I_{,\eta}$	$A^I_{,\eta\eta}$	$A^I_{,\eta\xi}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	0
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	0
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
4	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$
5	0	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
6	0	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$

Tabla 2: Funciones de forma evaluadas en G_1 .

explícitamente

$\varphi^{(1)} = \frac{1}{2} (\varphi^1 + \varphi^2)$
$\varphi'_{\xi}^{(1)} = \frac{1}{2} (-\varphi^1 + \varphi^2)$
$\varphi'_{\eta}^{(1)} = \frac{1}{8} (\varphi^3 + \varphi^4 - \varphi^5 - \varphi^6)$
$\varphi'_{\eta\eta}^{(1)} = \frac{1}{8} (-2\varphi^1 - 2\varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4 + \varphi^5 + \varphi^6)$
$\varphi'_{\xi\eta}^{(1)} = \frac{1}{8} (\varphi^3 - \varphi^4 + \varphi^5 - \varphi^6)$

Tabla 3: Derivadas.

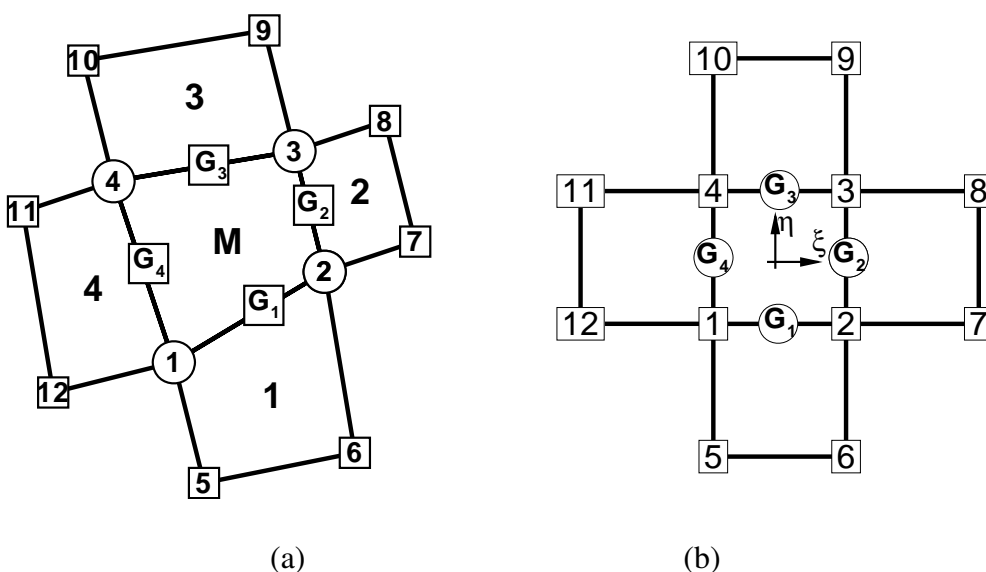


Figura 1: (a) Definición de la parcela de elementos, (b) sistemas de coordenadas naturales.

Las derivadas de la configuración definidas de esta forma permite evaluar las curvaturas en cada lado. Esto requiere evaluar la normal al plano tangente local en cada punto, para ello, es necesario definir un sistema de referencia coherente como se muestra en la próxima sección.

3. DEFINICIÓN DE LOS SISTEMAS CARTESIANOS

Al igual que el elemento BSQ , la evaluación de las deformaciones membranales y la evaluación de las curvaturas requieren de la definición de un sistema cartesiano en cada punto donde se evalúe el gradiente φ'_{α} . Resulta necesario garantizar la continuidad del sistema de referencia local. En el elemento principal el sistema de referencia resulta idéntico al utilizado en el BSQ pero en la evaluación de la normal al contorno se utiliza la interpolación cuadrática como se muestra a continuación:

3.1. Evaluación del sistema cartesiano del elemento principal

1. En el centro del elemento principal se define el sistema cartesiano de referencia $({}^o t_1^0, {}^o t_2^0, {}^o t_3^0)$ a partir de la normal

$${}^o t_3^0 = \frac{1}{J_0} ({}^o \varphi'_{\eta_1} \times {}^o \varphi'_{\eta_2}) \quad J_0 = \| {}^o \varphi'_{\eta_1} \times {}^o \varphi'_{\eta_2} \| = \frac{{}^o A}{4} \quad (2)$$

donde $({}^o\varphi_{i\eta_1}^0, {}^o\varphi_{i\eta_2}^0)$ son las derivadas respecto a las coordenadas naturales evaluadas en el centro del elemento (supraíndice derecho 0) en la configuración de referencia (supraíndice izquierdo o) y oA es el área del elemento. Las dos direcciones cartesianas de referencia $({}^o\mathbf{t}_1^0, {}^o\mathbf{t}_2^0)$ sobre el plano normal a ${}^o\mathbf{t}_3^0$ se eligen arbitrariamente (por ejemplo en las direcciones principales de ortotropía del material).

2. Similarmente, en cada punto medio de cada lado k del elemento principal se tendrá el plano tangente $({}^o\varphi_{i\eta_1}^k, {}^o\varphi_{i\eta_2}^k)$ y su normal ${}^o\mathbf{t}_3^k$

$${}^o\mathbf{t}_3^k = \frac{1}{J_k} ({}^o\varphi_{i\eta_1}^k \times {}^o\varphi_{i\eta_2}^k) \quad (3)$$

donde J_k es el determinante jacobiano de la transformación isoparamétrica en la geometría original. La continuidad del sistema cartesiano definido en el punto anterior, se logra a partir de la intersección entre ambos planos $\mathbf{q}^k = \frac{{}^o\mathbf{t}_3^0 \times {}^o\mathbf{t}_3^k}{\|{}^o\mathbf{t}_3^0 \times {}^o\mathbf{t}_3^k\|}$ y el ángulo α que forma con el sistema cartesiano de referencia $\cos \alpha = \mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_1^0$ y $\sin \alpha = \mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_2^0$. Luego se elige el sistema $({}^o\mathbf{t}_1^k, {}^o\mathbf{t}_2^k)$ sobre el plano $({}^o\varphi_{i\eta_1}^k, {}^o\varphi_{i\eta_2}^k)$ tal que forme el mismo ángulo α con la dirección \mathbf{q}^k ($\mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_1^k = \cos \alpha$ y $\mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_2^k = \sin \alpha$).

3.2. Evaluación del sistema cartesiano en el contorno

Ejemplificando con el punto $G = 1$ a la mitad del lado 1 – 2 (ver Figura 1a). Allí se procede a calcular:

1. el plano tangente y la normal

$$[\varphi_{i\xi}^1, \varphi_{i\eta}^1] = \left[\frac{1}{2} (-\varphi^1 + \varphi^2), \frac{1}{8} (\varphi^3 + \varphi^4 - \varphi^5 - \varphi^6) \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{t}^1 = \frac{1}{J_1} (\varphi_{i\xi}^1 \times \varphi_{i\eta}^1) \quad J_1 = \| \varphi_{i\xi}^1 \times \varphi_{i\eta}^1 \| \quad (5)$$

2. se busca la intersección entre los planos: $q^1 = \frac{{}^o\mathbf{t}_3^k \times \mathbf{t}^1}{\|{}^o\mathbf{t}_3^k \times \mathbf{t}^1\|}$ y se determina el ángulo α_1 que forma con el sistema cartesiano en el borde

$$\cos \alpha_1 = q^1 \cdot {}^o\mathbf{t}_1^k = \frac{-{}^o\mathbf{t}_2^k \cdot \mathbf{t}^1}{\|{}^o\mathbf{t}_2^k \cdot \mathbf{t}^1\|} \quad \sin \alpha_1 = q^1 \cdot {}^o\mathbf{t}_2^k = \frac{{}^o\mathbf{t}_1^k \cdot \mathbf{t}^1}{\|{}^o\mathbf{t}_1^k \cdot \mathbf{t}^1\|} \quad (6)$$

3. se elige el sistema $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1)$ sobre el plano $(\varphi_{i\xi}^1, \varphi_{i\eta}^1)$ tal que forme el ángulo α_1 con la dirección q^1

$$\cos \alpha_1 = q^1 \cdot \mathbf{t}_1^1 \quad \sin \alpha_1 = q^1 \cdot \mathbf{t}_2^1 \quad (7)$$

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{t}^1 \times q^1$$

$$\mathbf{t}_1^1 = \cos \alpha_1 q^1 + \sin \alpha_1 \mathbf{r}^1 \quad (8)$$

$$\mathbf{t}_2^1 = -\sin \alpha_1 q^1 + \cos \alpha_1 \mathbf{r}^1 \quad (9)$$

4. finalmente se calculan las derivadas de las funciones de forma en el sistema local $(\mathbf{t}_1^1, \mathbf{t}_2^1)$.

En forma similar pueden tratarse los otros puntos sobre el contorno.

4. COMPORTAMIENTO MEMBRANAL

En la formulación propuesta se calculan las deformaciones membranales usando el promedio ponderado de los tensores métricos calculado en cada punto medio de los cuatro lados del elemento principal usando toda la información de la parcela. Pero a diferencia del elemento original, donde se utiliza información de los gradientes del elemento principal de la parcela, en el *CBSQ* los gradientes son los obtenidos directamente de la interpolación cuadrática que involucra para cada punto medio los dos elementos adyacentes que comparten el lado en cuestión.

Las componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange sobre la superficie media en el centro del elemento pueden escribirse

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \quad (10)$$

con $\delta_{\alpha\beta}$ la delta de Kronecker.

En tanto que la variación de estas deformaciones, necesarias para el planteo de la forma débil de las condiciones de equilibrio, resulta en forma explícita

$$\begin{aligned} \delta \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\circ A} \sum_{G=1}^4 \sum_{I=1}^6 \begin{bmatrix} N_{r_1}^I & 0 \\ 0 & N_{r_2}^I \\ N_{r_2}^I & N_{r_1}^I \end{bmatrix}^G J_G [\boldsymbol{\varphi}_1^G \cdot \delta \mathbf{u}^I \quad \boldsymbol{\varphi}_2^G \cdot \delta \mathbf{u}^I] \\ &= \frac{1}{\circ A} \sum_{G=1}^4 J_G \mathbf{B}_m^G \delta \mathbf{u}^e = \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (11)$$

donde \mathbf{B}_m^G es la habitual matriz que relaciona para cada punto G la variación de las deformaciones de Green-Lagrange con la variación de los desplazamientos de la superficie media y permite calcular la matriz $\bar{\mathbf{B}}_m$ correspondiente a la aproximación en deformaciones impuestas que relaciona deformaciones virtuales con desplazamientos virtuales. El vector $\delta \mathbf{u}^e$ agrupa ahora los doce nudos del elemento.

El hecho de utilizar un campo membranar constante trae aparejado la existencia de modos espurios de deformación (*hourglass*). Por lo tanto se define un esquema de estabilización siguiendo el mismo esquema propuesto en el *BSQ*, pero en lugar de utilizar todas las componentes de estabilización basta con utilizar únicamente las cruzadas. La variación de estas deformaciones resulta

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{12}^{kS} &= \sum_{I=1}^6 (N_{r_1}^I \boldsymbol{\varphi}_{r_2} + N_{r_2}^I \boldsymbol{\varphi}_{r_1})^G \cdot \delta \mathbf{u}^I - \frac{1}{\circ A} \sum_{G=1}^4 \sum_{I=1}^6 J_G (N_{r_1}^I \boldsymbol{\varphi}_{r_2} + N_{r_2}^I \boldsymbol{\varphi}_{r_1})^G \cdot \delta \mathbf{u}^I \\ &= \mathbf{B}_{12}^{GS} \delta \mathbf{u}^e = [\mathbf{B}_{12}^G - \bar{\mathbf{B}}_{12}] \delta \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (12)$$

donde puede observarse que \mathbf{B}_{12}^{GS} es la diferencia $\mathbf{B}_{12}^G - \bar{\mathbf{B}}_{12}$ siendo \mathbf{B}_{12}^G y $\bar{\mathbf{B}}_{12}$ las matrices que relacionan únicamente la variación de las componentes cruzadas de cada lado con el vector de desplazamiento $\delta \mathbf{u}^e$. Nótese que el esfuerzo adicional para la estabilización membranar es mínimo.

5. EVALUACIÓN DE LAS CURVATURAS

Las diferentes aproximaciones que siguen los lineamientos presentados por Oñate y Cervera (1993) se diferencian en la forma en que se garantiza la continuidad del gradiente $\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}$ entre

elementos. Aquí en este trabajo, a diferencia del elemento original *BSQ* donde el gradiente es el promedio $[\varphi'_{,\alpha}]^k = \frac{1}{2} [\varphi'_{,\alpha}^{(M)} + \varphi'_{,\alpha}^{(K)}]^k$, en la formulación nueva es directamente el gradiente de la interpolación cuadrática. De esta forma se garantiza un gradiente más suave en cada punto medio del elemento principal.

Partiendo de la definición de la curvatura integrada por partes (ver Estrada y Flores (2006)) se puede expresar la integral sobre el contorno la cual se evalúa numéricamente con un punto de integración a la mitad de cada lado

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{oA} \sum_{G=1}^4 l^G \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}^G \begin{bmatrix} \varphi'_{,1} \cdot \mathbf{t}^0 \\ \varphi'_{,2} \cdot \mathbf{t}^0 \end{bmatrix}^G \quad (13)$$

donde el índice en mayúscula $G = 1..4$ (ver Figura 1a) corresponde a cada uno de los puntos de integración utilizados a la mitad de cada lado y l^G es la longitud (original) del lado. Luego los gradientes, por ejemplo para el lado $G = 1$, se obtiene como

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{,1} \\ \varphi'_{,2} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} N_{,1}^1 & N_{,1}^2 & N_{,1}^3 & N_{,1}^4 & N_{,1}^5 & N_{,1}^6 \\ N_{,2}^1 & N_{,2}^2 & N_{,2}^3 & N_{,2}^4 & N_{,2}^5 & N_{,2}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Resulta útil escribir cada componente del tensor de curvatura como una proyección de dos vectores

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}^0 \quad (15)$$

donde

$$2\mathbf{h}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{oA} \sum_{G=1}^4 l^G [n_{\alpha} \varphi'_{,\beta} + n_{\beta} \varphi'_{,\alpha}]^G \quad (16)$$

De esta forma la evaluación de la curvatura en el elemento involucra a 12 nudos, lo que implica 36 grados de libertad.

Para el planteo de la forma débil de las ecuaciones de equilibrio se requiere evaluar la variación de las componentes del tensor de curvaturas, ésta resulta

$$\delta \bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \delta \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}^0 + \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{t}^0 \quad (17)$$

Siguiendo con la expresión (17), el primer término requiere calcular

$$\begin{aligned} 2\delta \mathbf{h}_{\alpha\beta} &= \frac{-1}{oA} \sum_{G=1}^4 l^G [n_{\alpha} \delta \varphi'_{,\beta} + n_{\beta} \delta \varphi'_{,\alpha}]^G \\ &= \frac{-1}{oA} \sum_{G=1}^4 l^G \left\{ \sum_{I=1}^6 [n_{\alpha} N_{,\beta}^I + n_{\beta} N_{,\alpha}^I] \delta \mathbf{u}^I \right\}^G \end{aligned} \quad (18)$$

De aquí la variación de las curvaturas puede finalmente escribirse como

$$\begin{aligned}\delta \bar{\kappa}_{\alpha\beta} &= \frac{-1}{oA} \sum_{G=1}^4 l^G \left\{ \sum_{I=1}^6 [n_{\alpha} N_{I\beta}^I + n_{\beta} N_{I\alpha}^I] \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{t}^0 \right\}^G \\ &= \mathbf{B}_b \delta \mathbf{u}^p\end{aligned}\quad (19)$$

donde $\delta \mathbf{u}^p$ agrupa a las variaciones de los desplazamientos de los nudos de toda la parcela (12 nudos y 36 GdL).

Al igual de lo que sucede con el elemento BSQ , aquí para mantener un sólo punto de integración es necesario realizar una estabilización del modo flexional, para ello se adopta el mismo esquema de estabilización propuesto para el elemento original. Una mejor alternativa sería utilizar directamente las funciones de interpolación en la dirección normal al lado (1). Esto permitiría definir una curvatura de estabilización aprovechando la interpolación isoparamétrica. Dichas implementación se dejan como trabajos futuros. Siguiendo con el enfoque original la técnica de estabilización consiste en penalizar la diferencia entre estas componentes (para más detalles ver Estrada y Flores (2006))

$$\mathbf{h}_{\alpha\beta}^S = \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} - \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (20)$$

a través de un tensor de curvaturas de estabilización

$$\kappa_{\alpha\beta}^S = \mathbf{h}_{\alpha\beta}^S \cdot \mathbf{t}_3^0 \quad (21)$$

6. EVALUACIÓN DE LAS FUERZAS RESIDUALES

En la evaluación de las fuerzas nodales equivalentes $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ resaltan algunos cambios respecto de la formulación original en lo que se refiere a las fuerzas nodales equivalentes de estabilización membranal. Así, considerando únicamente las componentes cruzadas se obtiene

$$N_{12}^{GS} = \alpha_s \frac{\partial W^S}{\partial \varepsilon_{12}^{GS}} = J_k s_m G \varepsilon_{12}^{GS} \quad (22)$$

donde G es el módulo de corte y α_s el coeficiente de estabilización membranal. Por lo tanto, las fuerzas nodales equivalentes resultan de la suma

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_m^S &= \sum_{G=1}^4 \delta \varepsilon_{12}^{GS} N_{12}^{GS} \\ &= \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{G=1}^4 (\mathbf{B}_{12}^G - \bar{\mathbf{B}}_{12})^T N_{12}^{GS}\end{aligned}\quad (23)$$

Recordando que $\sum N_{12}^{GS} = 0$, las fuerzas nodales debidas a la estabilización membranal resultan finalmente

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_m^S = \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{G=1}^4 (\mathbf{B}_{12}^G)^T N_{12}^{GS} \quad (24)$$

Para el control del modo flexional espurio se puede consultar el trabajo previamente citado.

7. MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Para el esquema implícito resultan levemente cambiadas las matrices de rigidez material y geométrica debida a la parte de estabilización membranal. Así la parte material se obtiene

$$\mathbf{K}_{Mm}^S = \alpha_s G \sum_{G=1}^4 J_k \left(\mathbf{B}_{12}^{G(S)} \right)^T \mathbf{B}_{12}^{G(S)} \quad (25)$$

y la rigidez geométrica se expresa como

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gm}^S \Delta \mathbf{u} = \sum_{I=1}^6 \delta \mathbf{u}^I \sum_{J=1}^6 \sum_{G=1}^4 [N_{i_1}^J, N_{i_2}^J]^G N_{12}^{GS} \begin{bmatrix} N_{i_1}^J \\ N_{i_2}^J \end{bmatrix}^G \Delta \mathbf{u}^J \quad (26)$$

La contribución a la rigidez geométrica de la parte flexional no se la incluyó en el código implícito.

8. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se somete a pruebas numéricas la formulación propuesta. La principal idea es comparar con los resultados numéricos obtenidos con la versión original *BSQ*. También se compara con el elemento triangular sin GdL rotacionales con interpolación cuadrática *EBST*, el elemento cuadrilátero sin rotaciones *S4* y con el elemento cuadrilátero *S4R* (incluye grados de libertad de rotación) presente en el código comercial ABAQUS (ABAQUS (2003)). En la mayoría de los ejemplos se adoptan como coeficientes de estabilización los valores de $\alpha_s = 0,015$ y $\beta_s = 0,05$ para el campo membranal y flexional, respectivamente. El elemento descrito arriba ha sido implementado en un código de elementos finitos para análisis estático y con integración explícita desarrollado por el segundo autor.

8.1. Prueba de la parcela

La idea del ejemplo es utilizar un estado de torsión constante a través de una carga puntual en una de las esquinas de la placa cuadrada y el resto de los vértices simplemente apoyados. Se utilizan dos tipos de mallas estructurales, una regular y otra irregular como muestra la Figura 2. En la Tabla 4 se muestra el desplazamiento vertical debajo del punto de aplicación de la carga normalizado respecto del valor correcto. Estrictamente el elemento no pasa la prueba de la parcela. Si bien lo hace para las mallas regulares, no lo supera en el caso de mallas irregulares. Sin embargo, puede apreciarse como la solución numérica tiene una convergencia hacia la solución correcta a medida que se refina la malla. Si se compara con el elemento *BSQ*, la nueva formulación tiene un comportamiento similar. Conclusiones similares si se compara con el elemento *S4*.

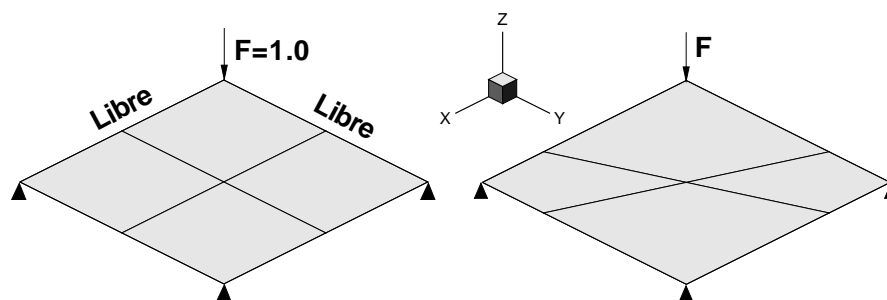
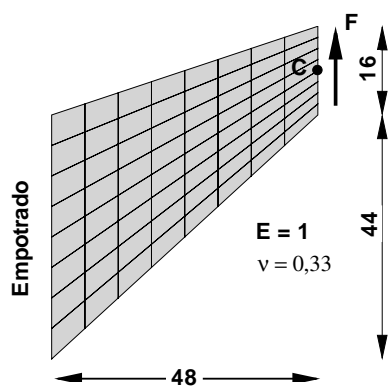


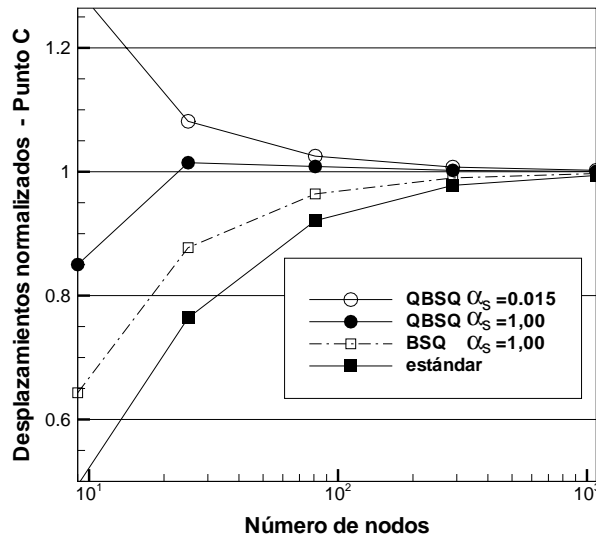
Figura 2: Mallas de elementos finitos para la prueba de la parcela a torsión uniforme.

No. de elementos	Malla regular			Malla irregular		
	QBSQ	BSQ	S4	QBSQ	BSQ	S4
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9542	0,9827	1,0650
16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9885	0,9879	0,9945
64	1,0000	1,0000	1,0000	0,9955	0,9954	0,9969
256	1,0000	1,0000	1,0000	0,9985	0,9985	0,9990

Tabla 4: Prueba de la parcela flexional (M_{12} constante). Desplazamientos normalizados del punto bajo la carga.



(a)



(b)

Figura 3: Barra de Cook. Prueba membranal.

8.2. Barra de Cook

Este problema puramente membranal se incluye para estudiar el esquema de estabilización membranal propuesto. Este ejemplo contiene una cantidad importante de energía de corte y

también distorsión en el elemento. La Figura 3a muestra la geometría de la barra empotrada en uno de sus extremos y un esfuerzo de corte distribuido en el extremo libre. En la Figura 3b se muestra el desplazamiento vertical normalizado del punto C (punto medio del extremo libre) en función del número de nodos para diferentes valores del coeficiente de estabilización membranar α_s . Los resultados obtenidos con el elemento bilineal estándar con cuatro puntos de integración se incluye como referencia. Se puede ver que para mallas más finas los resultados convergen al valor esperado para cualquier valor de s_m . Para el ejemplo un valor de $\alpha_s = 0,15$ es óptimo, sin embargo, se adopta como valor de coeficiente membranar $\alpha_s = 0,015$ y es el adoptado por defecto para los ejemplos numéricos.

8.3. Techo cilíndrico

En la Figura 4 se muestra la geometría de este ejemplo ampliamente utilizado para evaluar elementos de lámina debido al complejo estado membranar resultante. El techo cilíndrico, de espesor $h = 3,0$ cargado por su peso propio $w = 0,625$ por unidad de área, está soportado por dos diafragmas rígidos en sus extremos. Las propiedades elásticas del material utilizado son: módulo de Young $E = 3 \times 10$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$. Únicamente un cuarto del techo se modela debido a la simetría. En la Tabla 5 y Tabla 6 se muestran los desplazamientos verticales normalizados para los puntos A y B indicados en la Figura 4, se incluyen los valores obtenidos con los elementos BSQ , $EBST$ y $S4R$. Los valores exactos usados para normalizar los resultados son $u_A = 0,5407$ y $u_B = -3,610$ los cuales fueron tomados de la Referencia (Huang (1989))

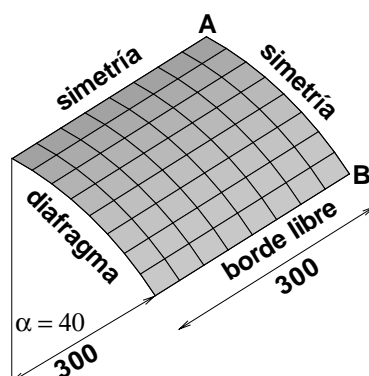


Figura 4: Techo cilíndrico bajo peso propio.

Malla	Punto A			
	$QBSQ$	BSQ	$EBST$	$S4R$
4×4	1,5900	1,3307	1,0685	1,2101
8×8	1,1081	1,0756	1,0432	1,0531
16×16	1,0234	1,0189	1,0129	1,0154
32×32	1,0058	1,0050	1,0036	1,0074

Tabla 5: Desplazamientos normalizados.

Malla	Punto <i>B</i>			
	<i>QBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>EBST</i>	<i>S4R</i>
4 × 4	1,1536	1,2058	0,9735	1,1905
8 × 8	1,0359	1,0479	1,0121	1,0460
16 × 16	1,0084	1,0112	1,0041	1,0122
32 × 32	1,0015	1,0022	1,0006	1,0049

Tabla 6: Desplazamientos normalizados.

Los resultados muestran una convergencia satisfactoria y el error obtenido es ingenierilmente aceptable para 800 GdL. Si se compara con los resultados obtenidos con el *BSQ* el error es similar en ambas aproximaciones.

8.4. Viga torsionada a 90°

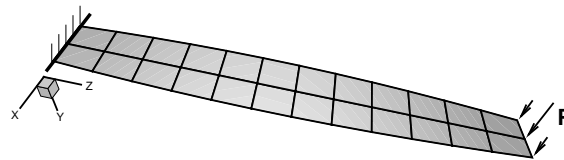


Figura 5: Viga Torsionada a 90°. Malla de 12 × 2 elementos.

En este caso se analiza una viga empotrada torsionada a 90° bajo una carga puntual aplicada en el extremo libre. Este ejemplo se utiliza frecuentemente para evaluar la correcta integración en el espesor de elementos basados en la aproximación de *sólido degenerado*. Se consideran dos casos, uno con la carga normal a la lámina y otro con la carga aplicada en el plano de la misma. Se han analizado dos mallas una gruesa de 12 × 2 y una fina de 48 × 8 elementos. La longitud de la viga es de 12, el ancho 1, 1, en tanto que el módulo elástico es $E = 2,9 \times 10$. La relación de Poisson y el espesor son $\nu = 0,22$ y $h = 0,32$ respectivamente. En la Figura 5 se muestra la geometría de la viga y la malla más gruesa con 12 × 2 elementos. Así, en la Tabla 7 y 8 se muestran los valores normalizados de los desplazamientos del punto de aplicación de la carga según la dirección de la fuerza sea saliente o colineal al plano de la viga, respectivamente. Se comparan con los resultados obtenidos con los elementos *BSQ*, *S4* y *S4R*. Los valores están normalizados respecto a la solución analítica de $1,754 \times 10^{-3}$ para el desplazamiento fuera del plano y $5,424 \times 10^{-3}$ para el desplazamiento en el plano.

Malla	Normal al plano			
	<i>QBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>S4</i>	<i>S4R</i>
12 × 2	1,1031	1,0661	0,9742	0,9918
48 × 8	1,0025	0,9889	1,0551	0,9991

Tabla 7: Desplazamientos normalizados fuera del plano.

En el plano				
Malla	<i>QBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>S4</i>	<i>S4R</i>
12×2	1,0121	1,0088	1,1661	1,0029
48×8	0,9958	0,9947	0,9453	0,9986

Tabla 8: Desplazamientos normalizados en el plano.

Nótese que el error para la malla de 48×8 elementos *QBSQ* es del orden del 0,25% para la dirección de la carga normal al plano y del 0,42% en la dirección del plano. Los resultados muestran una mejora respecto del *BSQ* a medida que se refina la malla. Además si se compara con un elemento como el *S4R* donde se tiene el doble de GdL por nudo que el elemento propuesto, los resultados son satisfactorios.

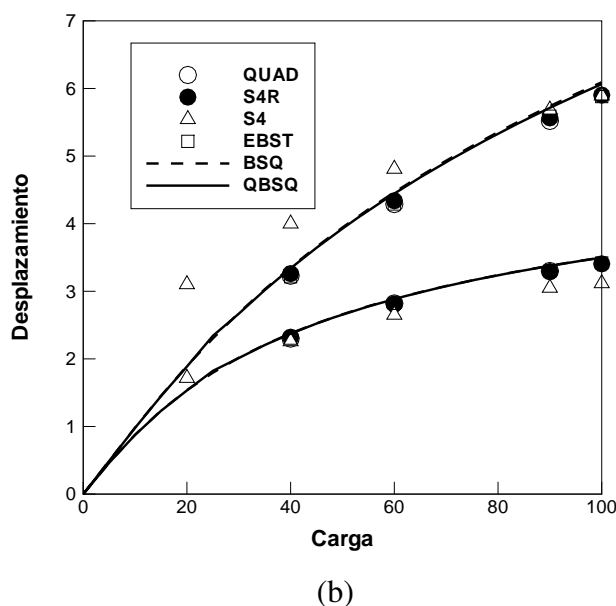
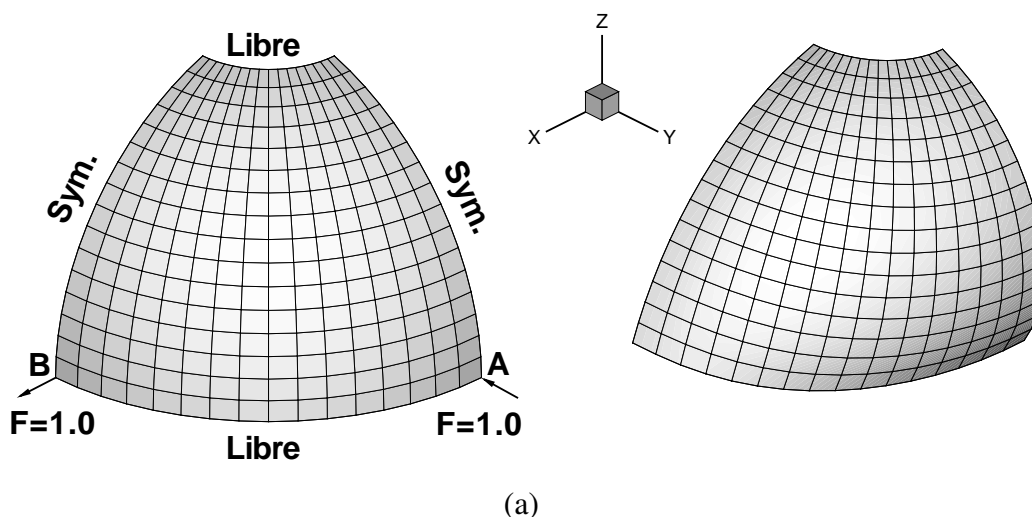


Figura 6: Casquete esférico. (a) Geometría y configuración deformada para $\lambda = 100$, (b) desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus el factor de carga λ .

8.5. Casquete esférico con cargas puntuales

Este ejemplo es utilizado para evaluar el comportamiento de los elementos de láminas con curvatura inicial ante posibles problemas de bloqueo membranar. La geometría consiste en un casquete esférico de radio $r = 10$ y un espesor $h = 0,04$ con un agujero de 18° en su polo cuyo borde se encuentra libre al igual que su borde inferior. Por simetría se modela un cuarto del casquete el cual está sometido a un par de fuerzas una entrante y la otra saliente. Las propiedades elásticas del material son $E = 6,825 \times 10^7$ y $\nu = 0,3$. En la Figura 6a se muestra la geometría deformada de la malla con 256 elementos para un factor de carga igual $\lambda = 100$. En la Figura 6b se muestra el desplazamiento del punto de aplicación de la carga en función del factor de carga y se compara con resultados obtenidos con los elementos $S4$, $EBST$, $S4R$ y los publicados en Simo et al. (1990) usando un cuadrilátero incluyendo deformaciones de corte transversal $QUAD$. Nótese el muy buen acuerdo que se logra con el elemento $QBSQ$ comparado con los valores de referencia y una leve mejora respecto de los resultados obtenidos con el BSQ .

8.6. Inflado de una esfera

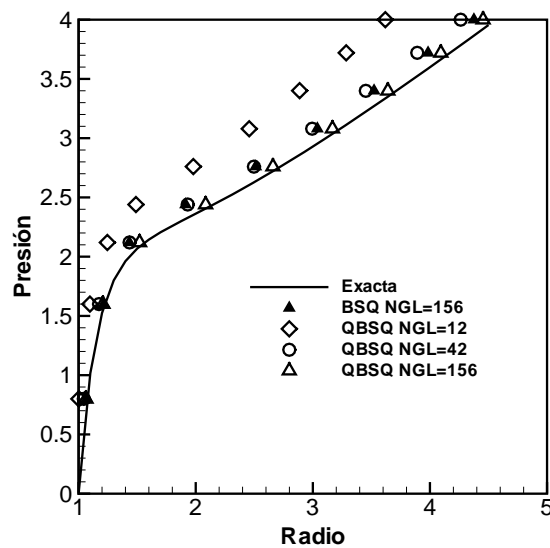
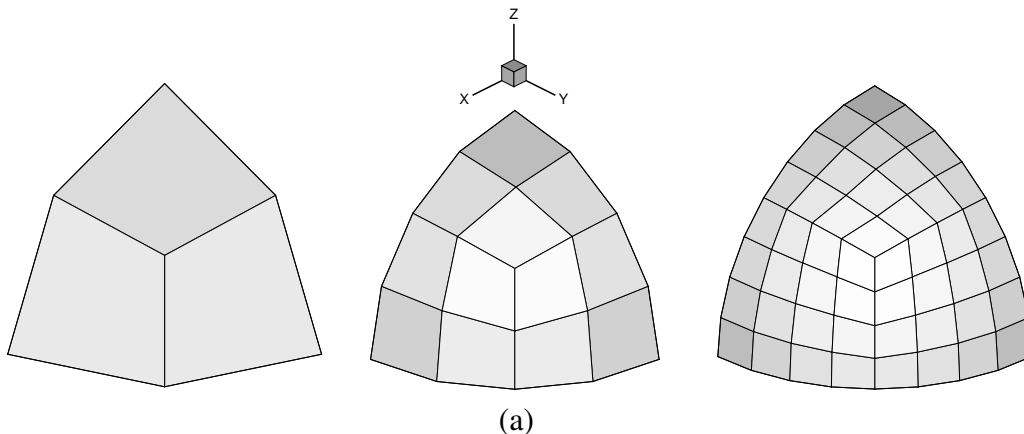


Figura 7: Inflado de una esfera con un material de Mooney-Rivlin. (a) Malla de elementos usada en el análisis, (b) radio en función de la presión interna de inflado.

Este ejemplo ha sido tomado de la Referencia (Needleman (1977)) donde se simula el inflado de una esfera sometida a presión interna. El comportamiento es puramente membranal pero en grandes deformaciones. Nuevamente la geometría inicial curva permite observar posibles problemas de bloqueo membranal. En esta simulación numérica se utilizan los datos de la geometría y de los parámetros del material utilizados en la Referencia. (Cirak y Ortiz (2000)). La esfera tiene un radio ${}^oR = 1$ y un espesor ${}^oh = 0,02$ en la configuración inicial. Se considera un material de Mooney-Rivlin con $\mu_1 = 40$ y $\mu_2 = -20$ (con $\gamma = R/{}^oR$). En la Figura 7a se muestran tres mallas de elementos utilizadas para evaluar la convergencia donde por simetría se considera un octavo de la esfera. En la Figura 7b se grafica el radio en función de la presión interna para las tres mallas y se incluye la solución analítica

$$p = \frac{{}^oh}{{}^oR\gamma^2} \frac{dW}{d\gamma} = \frac{8{}^oh}{{}^oR\gamma^2} (\gamma^6 - 1) (\mu_1 - \mu_2\gamma^2)$$

Se puede ver que con aún pocos grados de libertad se obtienen resultados aceptables. El valor final (presión interna $p = 4$) corresponde a una relación de espesor radio de $h/R = 0,00024$. En la misma figura se grafica los valores obtenidos con el elemento BSQ correspondiente a la malla más fina. Los resultados muestran una mejor convergencia del elemento $QBSQ$.

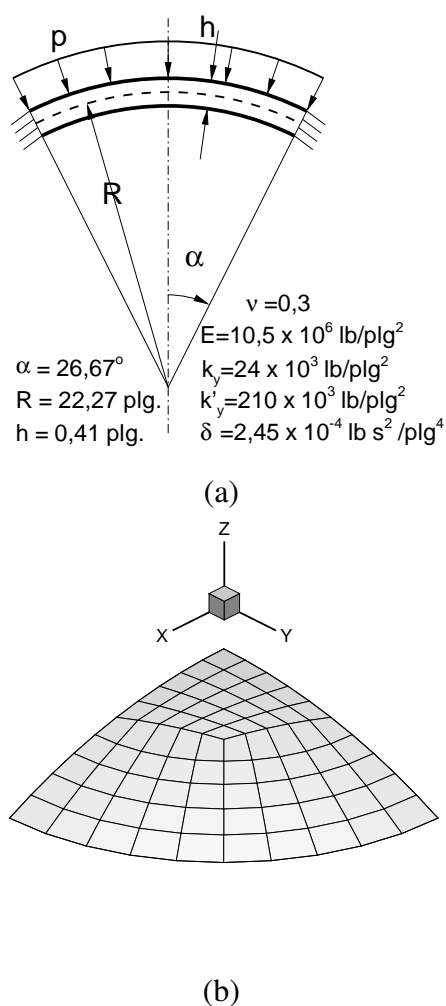
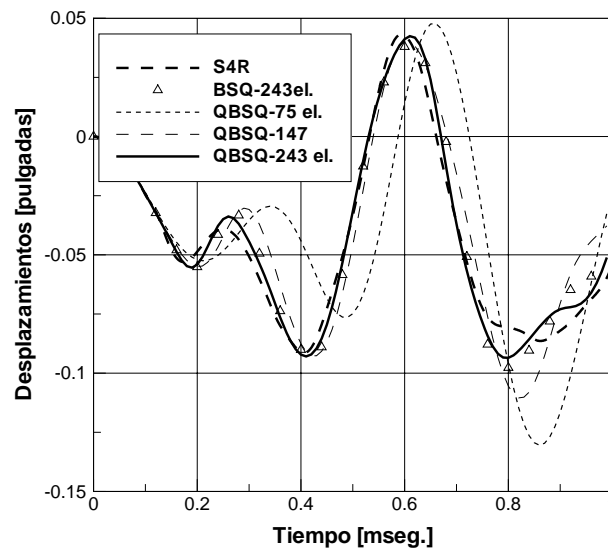


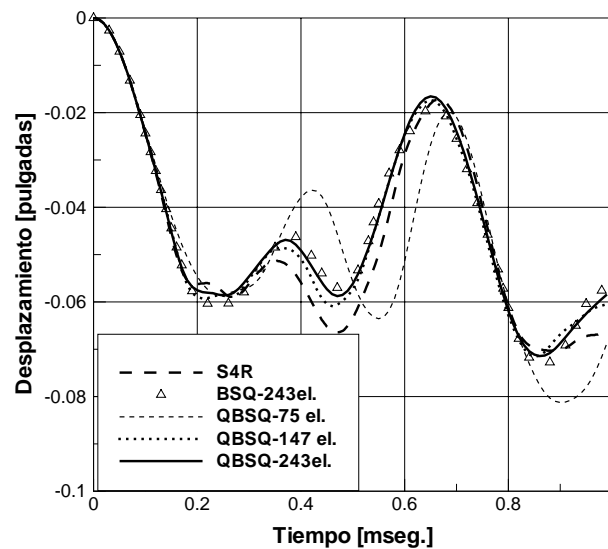
Figura 8: Domo esférico bajo presión impulsiva: (a) parámetros geométricos y del material; (b) malla con 75 elementos.

8.7. Domo esférico

Otro ejemplo ampliamente utilizado para evaluar la convergencia de elementos de lámina con pequeñas deformaciones elasto-plásticas es un domo esférico empotrado, sometido a una carga escalón. La carga es una presión uniforme de 600 psi y se aplica en la parte superior del domo. Para el análisis se han utilizados tres mallas de 75, 147 y 243 elementos, de las cuales se muestra la mas gruesa en la Figura 8 donde además de indican los parámetros geométrico y del material. Se considera un cuarto del domo por simetría y se realizan separadamente un análisis elástico y un análisis elasto-plástico.



(a)



(b)

Figura 9: Domo esférico bajo presión escalón: historia del desplazamiento vertical del punto central. (a) material elástico; (b) material elasto-plástico.

En la Figura 9a y b se grafica el desplazamiento vertical del punto central del domo en función del tiempo para los dos casos de material elástico y elasto-plástico, respectivamente. Los resultados se comparan con los resultados numéricos obtenidos con el elemento *BSQ* y *S4R* usando una malla de 243 elementos. Puede notarse como se logra un mejor acuerdo de la formulación propuesta a medida que se refina la malla. En la figura no se grafican los resultados de la formulación original para mallas más finas pero el *QBSQ* muestra en este ejemplo mejor comportamiento.

8.8. Panel cilíndrico

En este caso se trata de un panel cilíndrico sometido a una velocidad inicial de $v_o = -5650$ plg/s que simula el efecto de la detonación de un explosivo. El material se considera elasto-plástico perfecto en régimen de grandes deformaciones. El panel se supone empotrado a lo largo de todos los bordes y por simetría se modela la mitad del cilindro. Se utilizan dos densidades de malla de 6×16 y 18×48 elementos. En la Figura 10 puede observarse los datos geométricos. En la Figura 11 la configuración deformada para cada una de las mallas correspondientes al tiempo de 1 mseg.

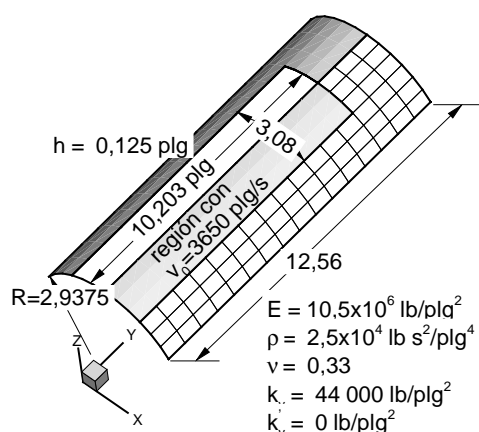


Figura 10: Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Geometría.

En la Figura 12 se grafica el desplazamiento vertical en función del tiempo para dos puntos ubicados sobre el eje de simetría a la distancia de $y = 6,28$ e $y = 9,42$ pulgadas respectivamente. En la figura se han incluido los resultados correspondiente a ambas mallas y se compara con los datos experimentales. También se grafican los resultados obtenidos con el elemento *BSQ* para la malla fina. Nótese que la formulación propuesta por el *QBSQ* tiene un mejor acuerdo con los datos experimentales, sobre todo, para el punto ubicado a la distancia $y = 6,28$.

En la Tabla 9 se muestra el valor del desplazamiento vertical correspondiente al tiempo de análisis de $t = 0,4$ ms para las dos mallas adoptadas. Se comparan con la solución numérica obtenida por [Stolarski et al. \(1984\)](#) a través de un elemento de lámina triangular curvo y una malla de 16×32 y los resultados numéricos obtenidos con los elementos *BSQ* y *EBST* para una malla de 18×48 elementos respectivamente. También se compara con resultados experimentales reportados en [Balmer y Witmer \(1964\)](#). Existe un buen acuerdo entre los valores obtenidos con el elemento *QBSQ* y los datos experimentales. Los resultados numéricos obtenidos con otros elementos muestran una mayor discrepancia con los datos experimentales.

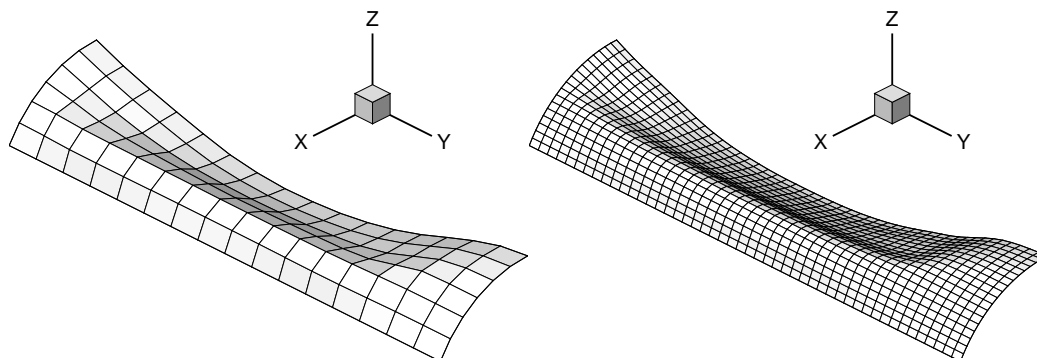


Figura 11: Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Mallas deformadas para el tiempo $t = 1\text{ms}$.

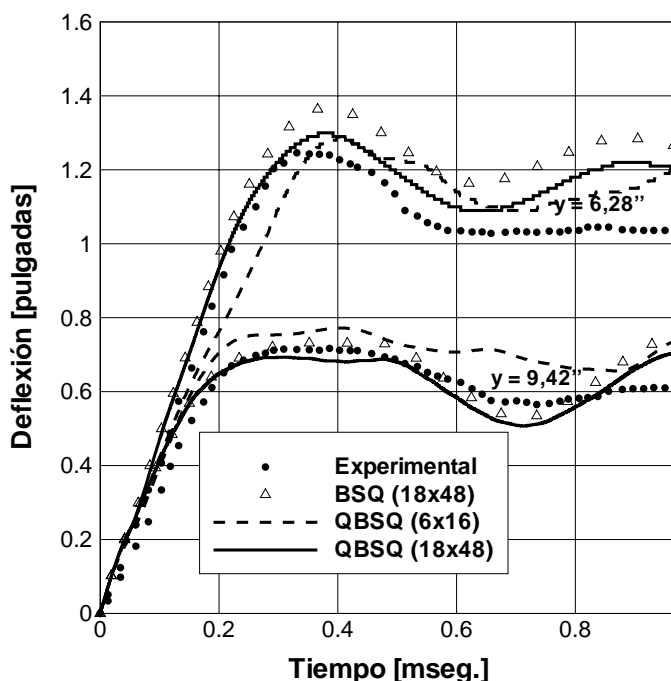


Figura 12: Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Desplazamiento vertical versus tiempo de dos puntos a lo largo de la línea de simetría.

8.9. Inflado/desinflado de un tubo cerrado

El siguiente ejemplo simula el inflado y desinflado de un tubo cerrado por dos casquetes semiesféricos. La idea de utilizar este ejemplo es la de mostrar las capacidades de la formulación propuesta para abordar problemas membranales. El tubo es de diámetro $D = 2\text{m}$, su longitud total es $L = 6\text{m}$ y su espesor $h = 5 \times 10^{-3}\text{m}$. El material tiene la siguiente propiedades: $E = 4 \times 10^8\text{Pa}$, $\nu = 0,35$ y $\rho = 3 \times 10^3\text{Kg/m}^3$. El tubo se infla, de manera rápida, con una presión de 100Pa y luego se desinfla bajo su propio peso. El análisis se lleva a cabo con una malla de 9250 elementos *CBSQ* y 9406 nudos modelando un cuarto de la geometría. La

Elemento/Malla	$y = 6,28 \text{ plg}$	$y = 9,42 \text{ plg}$
<i>QBSQ</i> 6×16	-1,285	-0,772
<i>QBSQ</i> 18×48	-1,292	-0,682
<i>BSQ</i> 18×48	-1,363	-0,729
<i>EBST</i> 18×48	-1,171	-0,584
Stolarski	-1,183	-0,530
Experimental	-1,280	-0,700

Tabla 9: Desplazamientos verticales.

evolución de las paredes del tubo durante el proceso de desinflado se muestra en la Figura 13. Los resultados muestran un colapso de la parte central en tanto que la parte superior del casquete se mantiene casi inalterado. La modelización utiliza autocontacto para poder capturar la formación de arrugas. Los resultados son similares a los mostrados en el trabajo de [Oñate y Flores \(2005\)](#).

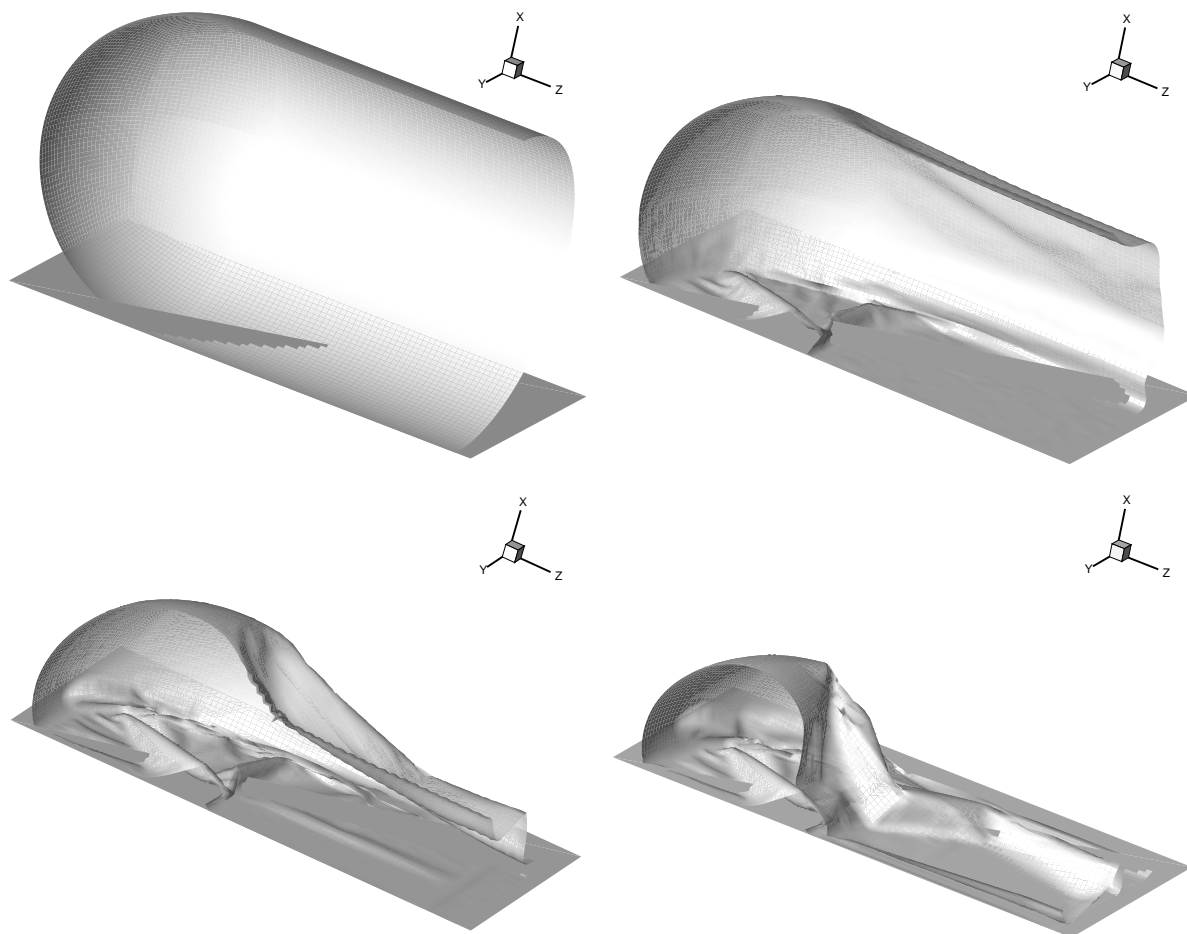


Figura 13: Inflado y desinflado de un tubo cerrado.

8.10. Embutición profunda de una lámina cuadrada

Este ejemplo puede encontrarse en la Referencia (NUMISHEET'93 (1993)). La Figura 14 muestra la definición geométrica de las herramientas. La forma original de la lámina es cuadrada y plana con una longitud de 150mm y un espesor de $0,78\text{mm}$. Las características del material corresponde a un acero dulce y las propiedades pueden encontrarse en (NUMISHEET'93 (1993)). La fuerza del pisador es de $19,6\text{kN}$. Debido a la simetría se modela un cuarto de la geometría y se utiliza una malla regular con 30 elementos por lado.

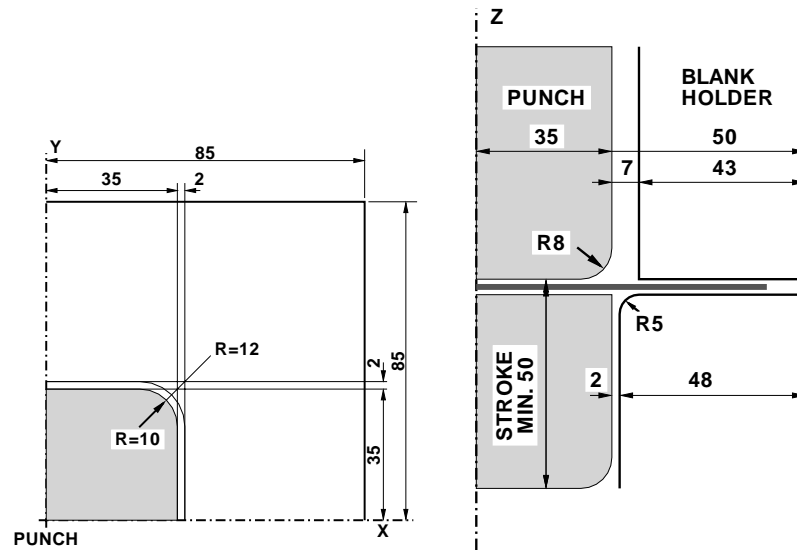


Figura 14: Embutición profunda de una lámina cuadrada. Definición de la geometría.

La Tabla 10 muestra los valores de desplazamientos de las líneas de simetría (DX y DY) y de la diagonal (ver Figura 15) para dos recorridos del punzón de 15mm y 40mm , respectivamente. La Tabla 10 incluye también los valores promedios experimentales presentados en la conferencia y los resultados obtenidos con los elementos $LBST$ y BSQ . Los resultados obtenidos con la formulación propuesta muestran al final de la carrera del punzón un mejor acuerdo con los valores promedios experimentales.

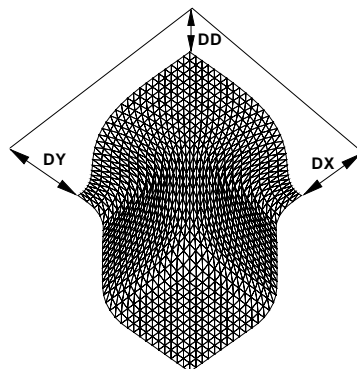


Figura 15: Embutición profunda de una lámina cuadrada. Definición de la geometría.

Elemento	15mm de embutición			40mm de embutición		
	DX	DY	DD	DX	DY	DD
CBSQ	5,72	5,72	2,96	27,69	27,71	15,16
BSQ	5,85	5,78	3,84	28,81	28,23	17,44
LBST	5,68	5,60	3,79	28,26	27,72	17,48
Experimental	6,17	6,12	3,24	27,96	27,95	15,36

Tabla 10: Ejemplo de Numisheet'93, valores de desplazamientos al final de la primer estrategia.

9. CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento cuadrilátero de lámina denominado $QBSQ$. El elemento tiene únicamente grados de libertad traslacional y utiliza un único punto de integración en la superficie, que lo hace simple y económico desde el punto computacional. El campo de deformaciones membranales se calcula utilizando una interpolación cuadrática. Colateralmente se obtiene un gradiente más suave para computar el campo de curvaturas. A la luz de los resultados numéricos la formulación propuesta muestra una mejora en el comportamiento membranar. Así lo demuestra el ejemplo de la barra de Cook donde puede verse, por ejemplo, para un coeficiente de estabilización membranar igual a uno, una mayor velocidad de convergencia respecto de la formulación original. En el caso del inflado de una esfera, donde el comportamiento es puramente membranar, para la malla más fina se obtiene un mejor acuerdo con la solución exacta. Los ejemplos que involucran deformaciones plásticas exhiben resultados satisfactorios y nuevamente $QBSQ$ exhibe mejor comportamiento que el BSQ . Así lo demuestran el ejemplo del panel cilíndrico y el ejemplo de embutición profunda. La principal conclusión que se desprende es que en problemas donde el comportamiento está dominado por la primera forma fundamental, la formulación muestra una mejora y en menor medida dicha mejora se ve reflejada en problemas que involucran comportamiento flexional. En cuanto a este último aspecto se podrán sacar mejores conclusiones cuando se adopte un esquema de estabilización flexional que utilice la información proveniente de la interpolación cuadrática. En principio se está utilizando el mismo esquema de estabilización del BSQ , esto es, usando un promedio de los gradientes. Actualmente se está trabajando sobre el nuevo esquema de estabilización.

10. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y a la Universidad Nacional de Córdoba (a través de SeCyT).

REFERENCIAS

- ABAQUS. *Student Edition, version 6.4.2*. Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., Pawtucket, EE.UU., 2003.
- Balmer H. y Witmer E. *Theoretical experimental correlation of large dynamic and permanent deformation of impulsively loaded simple structures*. Air Force flight dynamic Lab. Rep. FDQ-TDR-64-108, 1964.
- Barnes M. *Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, The City University, London, 1977.
- Brunet M. y Sabourin F. Prediction of necking and wrinkles with a simplified shell element in sheet forming. pages 27–48, 1994.

- Brunet M. y Sabourin F. Analysis of a rotation-free shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:1483–1510, 2006.
- Cirak F. y Ortiz M. Subdivision surfaces: A new paradigm for thin-shell finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:2039–2072, 2000.
- Estrada C. y Flores F. Desarrollo de un elemento de lámina cuadrilátero. *Mecánica Computacional*, pages 561–584, 2006.
- Flores F. y Estrada C. A rotation-free thin shell quadrilateral. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, page in press, 2007.
- Flores F. y Oñate E. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–83, 2001.
- Flores F. y Oñate E. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- Flores F. y Oñate E. Rotation-free finite element for the non-linear analysis of beam, frames and axisymmetric shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:5297–5315, 2006a.
- Flores F. y Oñate E. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67:in press, 2006b.
- Hampshire J.K. T.B.y.C.H. Three node triangular elements with one degree of freedom per node. *Engineering Computations*, 9:49–62, 1992.
- Huang H. *Static and dynamic Analysis of Plates and Shells*. Springer-Verlag, 1989.
- Nay R. y Utku S. An alternative to the finite element method. *Variational Methods Engineering*, 1:62–74, 1972.
- Needleman A. Inflation of spherical rubber ballons. *International Journal of Solids and Structures*, 13:409–421, 1977.
- NUMISHEET'93. *Second International Conference on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes*. A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Oñate, R.H. Wagoner (Eds.), Tokyo, Japan, 1993.
- Oñate E. y Cervera M. Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. *Engineering Computations*, pages 553–561, 1993.
- Oñate E. y Flores F. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2406–2443, 2005.
- Oñate E. y Zárate F. Rotation-free plate and shell triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:557–603, 2000.
- Rio G., Tathi B., y Laurent H. *A new efficient finite element model of shell with only three degrees of freedom per node*. Applications to industrial deep drawing test. In Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology, Barata Marques MJM. 18th IDDRG Biennial Congress, Lisbon, 1994.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990.
- Stolarski H., Belytschko T., y Carpenter N. A simple triangular curved shell element. *Engineering Computations*, 1:210–218, 1984.
- Yang D., Jung D., Song L., Yoo D., y Lee J. *Comparative investigation into implicit, explicit and iterative implicit/explicit schemes for simulation of sheet metal forming processes*. In: NUMISHEET'93, Makinouchi, A., Nakamachi, E., Oñate, E., Wagoner, R.H. (eds), RIKEN: Tokyo; 35-42, 1993.