

## MODELO DE DEGRADACION DIFERENCIADA PARA MATERIALES COMPUESTOS

Ricardo D. Quinteros<sup>a</sup>, Sergio Oller<sup>b</sup>, Liz G. Nallim<sup>a</sup>

<sup>a</sup> INIQUI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta (UNSa)  
Avenida Bolivia, 5150, 4400 Salta, Argentina  
e-mail: [rdquinteros@conicet.gov.ar](mailto:rdquinteros@conicet.gov.ar), <http://www.unsa.edu.ar>, <http://www.conicet.edu.ar>

<sup>b</sup> CIMNE. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería.  
e-mail: [oller@cimne.upc.edu](mailto:oller@cimne.upc.edu), web page: <http://www.cimne.com>  
UPC. Universidad Politécnica de Cataluña (Barcelona Tech)  
Edif. C1, Campus Nord, Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona, Spain.  
e-mail: [sergio.oller@upc.edu](mailto:sergio.oller@upc.edu), web page: <http://www.upc.edu>

**Palabras clave:** Materiales Compuestos, Mampostería, Técnicas de Homogeneización, Modelos Constitutivos

**Resumen.** En este trabajo se presenta la formulación y validación de un modelo de degradación elástica diferenciado. El modelo propuesto permite degradar en forma diferenciada la parte volumétrica y desviadora del comportamiento constitutivo del material y está basado en una generalización del modelo de degradación simple de Kachanov. De esta manera, el modelo resulta especialmente apropiado para simular el comportamiento de materiales friccionales. En particular, este modelo se aplica a los materiales componentes de una mampostería de ladrillos homogeneizada mediante una técnica particular *ad hoc*, que permite su tratamiento como material compuesto anisótropo, partiendo de las características geométricas y mecánicas de los materiales constituyentes. Para el tratamiento de la anisotropía, se usa la técnica de mapeo de espacios a través del concepto de espacio isótropo ficticio. La metodología planteada brinda una gran potencia de simulación pudiéndose también utilizar, si fuera necesario, otras formulaciones constitutivas diferentes para el comportamiento de los materiales componentes de la mampostería. El modelo constitutivo propuesto, junto con la técnica de homogeneización se implementa en un programa general de elementos finitos. Finalmente, se muestran los resultados obtenidos en ejemplos simples de validación del modelo y luego se presentan ejemplos de aplicación que muestran la respuesta no lineal del compuesto y su comparación con resultados publicados por otros autores.

## 1 INTRODUCCIÓN

Para el estudio del comportamiento de materiales multifase, se recurre al empleo de distintos métodos o técnicas que resuelven el problema a través del empleo de micromodelos o de macromodelos. Las técnicas mencionadas permiten representar y reproducir el comportamiento tanto lineal como no-lineal del compuesto sorteando, de cierta forma, las heterogeneidades presentes en la mayoría de los materiales empleados, tanto en la construcción como en la industria, tratando al compuesto como un material homogéneo anisótropo con propiedades promedio.

Una alternativa para el tratamiento de materiales compuestos y en particular para el tratamiento de la mampostería, es el empleo de la teoría de la homogeneización, la cual se utiliza en aquellos materiales que tienen una configuración periódica y con la que se trabaja en dos escalas: una micro-escala, donde quedan especificadas las propiedades mecánicas y geométricas de los materiales componentes, y una macro-escala en la cual el material es tratado como si fuese homogéneo. La mampostería es considerada como un material compuesto cuyos componentes son el mampuesto o ladrillo y el mortero empleado en las juntas verticales y horizontales, conformando una configuración periódica. De esta manera es posible, mediante técnicas de homogeneización, derivar el comportamiento global de la estructura a partir del comportamiento de los materiales constituyentes adoptando modelos constitutivos diferentes para cada uno de ellos.

La mampostería ha sido estudiada por numerosos investigadores, empleando diversas técnicas o procedimientos, tanto numéricos y experimentales como analíticos. Los estudios realizados revelan, en muchos casos, la necesidad de desarrollar herramientas más apropiadas y específicas, capaces de simular adecuadamente el comportamiento estructural de la mampostería. A lo largo de los años se han implementado diversos modelos y técnicas basados en variados análisis teóricos y niveles de detalle. Entre éstos pueden mencionarse, por ejemplo, el empleo del método de los elementos finitos, como lo hiciera [Adrian W. Page \(1978\)](#). El modo más simple de análisis se basa en la representación de la estructura como una combinación de elementos estructurales, tales como vigas, columnas o muros (elementos estructurales de comportamientos más simple y conocidos) asumiendo materiales isótropos y actuando en el rango elástico-lineal ([Pere Roca et al, 2005](#)), pero esto no siempre refleja en forma adecuada el correcto y complejo mecanismo estructural que la caracteriza. El enfoque numérico, que generalmente ofrece una mejor representación del comportamiento mecánico de la mampostería, corresponde a los micro-modelos o los macro-modelos. Para los primeros se distinguen los componentes individuales de la mampostería, discretizando sus componentes y analizando en detalle su comportamiento local ([Zucchini & Lourenço, 2002](#) o [Gambarotta & Lagomarsino, 1997](#)). En este planteo de microescala, el mampuesto y las juntas son representados por elementos continuos, mientras que su interfase se suele representar mediante elementos discontinuos. Para los macro-modelos, se realiza un estudio a nivel de macro-escala donde puede tratarse a la mampostería como un material compuesto y analizar un comportamiento más global. Estos últimos se caracterizan por su carácter simplificador, que conlleva un bajo costo computacional y menores tiempos de cálculo.

## 2 HOMOGENEIZACIÓN

En una escala intermedia entre los micro-modelos y los macro-modelos, se encuentran los modelos basados en la teoría de homogeneización, trabajando con una combinación de ambas escalas, donde se produce una retroalimentación. El problema puede analizarse en una celda unitaria y periódica con la que se puedan obtener valores medios para el material homogeneizado, partiendo del conocimiento de las propiedades mecánicas de los materiales

constituyentes y de la geometría de la celda elemental. La efectividad de este planteo ha sido demostrada por diversos autores como [A. Anthoine \(1995\)](#), [J. Lopez et al \(1999\)](#) o [E. Sacco \(2009\)](#). El uso de técnicas de homogeneización ahorra el trabajo computacional que se genera por la creación de mallas complejas al discretizar los mampuestos y las juntas.

Se debe elegir una celda de característica periódica de tal manera que su repetición regular genere el panel de mampostería completo. Es posible asignar muchas tipologías de celdas; una viable y entre las más simples sería un mampuesto rodeado en su totalidad por mortero ([Fig.1.a](#)). Algunos ejemplos de celdas típicas se representan en la [Figura 1](#).

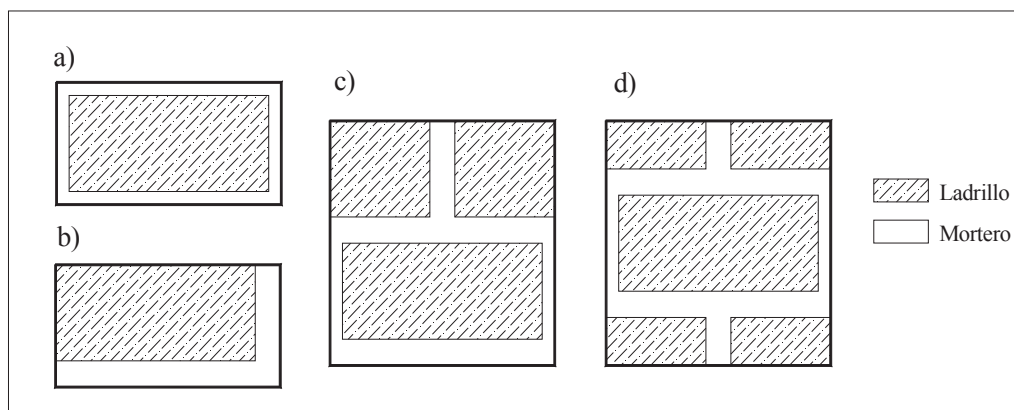


Figura 1: Diversos tipos de celda unidad

## 2.1 Tensor constitutivo homogéneo

Una vez definida la celda se utilizan los conceptos de compatibilidad y equilibrio de la mecánica clásica con el fin de obtener una relación constitutiva del material compuesto en función de los parámetros mecánicos y geométricos de los componentes. Para el presente trabajo se analiza el caso de la [Figura 1.b](#), como lo hicieron López et al. (1999) por la simplicidad de la misma frente a las demás y cuyas características geométricas son detalladas en la [Figura 2](#).

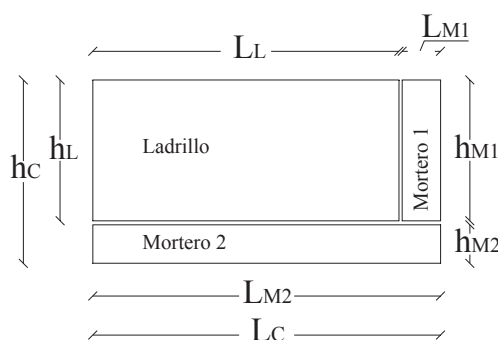


Figura 2. Celda analizada. Parámetros geométricos ([López et al., 1999](#)).

A fin de conocer los componentes homogeneizados del tensor constitutivo del material compuesto se analiza, en la celda patrón, las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio de los diversos modos de deformación correspondientes a tensiones de tracción o compresión en la dirección  $x$ , en la dirección  $y$ , así como las deformaciones por corte en el plano  $xy$ , y finalmente deformaciones generadas fuera de dicho plano (ver [Figura 3](#)).

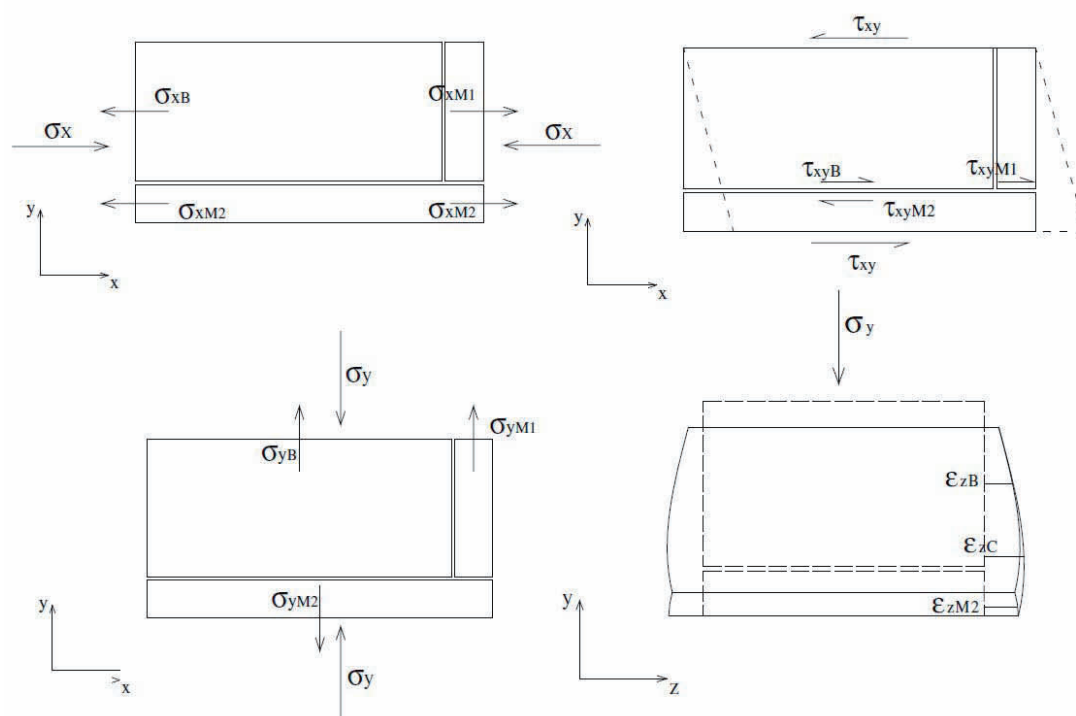


Figura 3. Modos de deformación

Mediante la aplicación de las condiciones y ecuaciones de compatibilidad y equilibrio en cada modo, y operando algebraicamente se obtienen los valores homogeneizados del tensor constitutivo homogéneo en función de las características geométricas de la celda unidad y de las características mecánicas, para cada dirección, de los materiales componentes (Lopez et al, 1999 y Quinteros et al, 2011):

$$E_{xC} = \frac{1}{B_{xL} D_x} \quad (1)$$

$$E_{yC} = \frac{1}{\frac{h_{M2}}{h_C E_{yM2}} + \frac{B_{yL} h_L}{E_{yL} h_C}} \quad (2)$$

$$G_{xyC} = \frac{1}{\frac{h_{M2}}{G_{xyM2} h_C} + \frac{A_{xyL} h_L}{G_{xyL} h_C}} \quad (3)$$

con:

$$D_x = \frac{L_L}{E_{xL} L_C} + \frac{L_{M1}}{E_{xM1} L_C}, \quad B_{xL} = \frac{h_C L_{M2}}{E_{xM2} h_{M2} \left( \frac{L_L}{E_{xL}} + \frac{L_{M1}}{E_{xM1}} + \frac{h_L L_{M2}}{E_{xM2} h_{M2}} \right)} \quad (4)$$

$$B_{yL} = \frac{L_C - B_{yM1}L_{M1}}{L_L}, \quad B_{yM1} = \frac{L_C h_L}{E_{yL} L_L \left( \frac{L_{M1} h_L}{E_{yM1} L_L} + \frac{h_{M1}}{E_{yM1}} \right)} \quad (5)$$

$$A_{xyL} = \frac{G_{xyL} L_C}{G_{xyM1} L_{M1} + G_{xyL} L_L} \quad (6)$$

### 3 MODELO DE DEGRADACIÓN DIFERENCIADO: VOLUMÉTRICO-DESVIADOR

Existen una gran cantidad de modelos constitutivos que permiten describir el comportamiento de los materiales friccionales, que buscan simular al sólido real como un material ideal mediante el uso de hipótesis simplificadoras. En términos generales, algunos modelos se basan en la teoría de plasticidad (Chen, 1982) o en modelos de fractura que indican que el comportamiento no lineal de un material friccional se debe fundamentalmente al fenómeno de fisuración.

Debido a la diferencia entre las tensiones límites de tracción y compresión de los materiales friccionales, Faria et al. (1998) formularon un modelo de daño unilateral que permite distinguir el comportamiento ante cargas de compresión y tracción. La característica más importante de este modelo es el hecho que el daño, si bien es irreversible, puede estar activo o no en función de las condiciones de carga.

En el presente trabajo se propone un modelo de degradación elástica que permite degradar en forma diferenciada la parte volumétrica y desviadora del comportamiento constitutivo del material. Este tipo de degradación selectiva, se debe a la diferencia que hay en entre las curvas volumétricas de tensión y deformación octaédricas  $\sigma_{oct} - \varepsilon_{oct}$ , y la distorsional de tensión y distorsión octaédricas  $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ .

Se define en este caso el criterio de daño en el espacio de tensiones mediante una función escalar de las componentes del tensor de tensiones:

$$g(\sigma_{ij}, d) = \tau(\sigma_{ij}) - q(d) \leq 0 \quad (7)$$

donde  $\tau(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente que puede calcularse utilizando criterios de falla conocidos y  $q(d)$  es el umbral de daño cuya ley de evolución se desarrolla a continuación.

Se define una variable de degradación elástica  $\hat{d}_e$  que tiene una forma similar a la descrita por Simo y Ju (1987) pero, a diferencia de ésta, en el modelo propuesto no es necesario definir una superficie de degradación de rigidez para formular su regla de evolución. Se supone una regla de evolución de la variable de degradación elástica, a través de la siguiente expresión, en función del incremento de deformación total:

$$\hat{d}_i^e = \hat{\Phi}_i \langle \hat{k}_i^T \hat{\varepsilon} \rangle \quad (8)$$

donde  $\hat{k}_i^T$  es un vector definido en el espacio de tensiones que proporciona la dirección de degradación  $\hat{d}_i^e$ , y  $\hat{\Phi}_i$  es un escalar positivo.

El modelo propuesto está basado en una generalización del modelo de degradación simple de Kachanov (1986). Análogamente a la degradación simple, el modelo permite diferentes

grados de degradación del módulo volumétrico secante y del módulo de corte secante (Oller, 1988), esto es:

$$K_S^D = (1 - d_K)K_0 \quad (9)$$

$$G_S^D = (1 - d_G)G_0 \quad (10)$$

donde  $K_0$  y  $G_0$  son, respectivamente, los módulos volumétrico y de corte iniciales.

Se plantea como hipótesis que los dos factores de reducción  $(1 - d_K)$  y  $(1 - d_G)$  están directamente relacionados con el trabajo elástico de deformación volumétrica y con el trabajo elástico de deformación distorsional, respectivamente. A continuación se propone una regla de evolución, para cada una de estas dos variables internas de degradación elástica, que cumpla con la ley general presentada en la ecuación (8), es decir:

$$\dot{\hat{d}}_K^e = \hat{\Phi}_K \langle \hat{k}_K^T \dot{\hat{\epsilon}} \rangle \text{ y } \dot{\hat{d}}_G^e = \hat{\Phi}_G \langle \hat{k}_G^T \dot{\hat{\epsilon}} \rangle \quad (11)$$

**Factor de reducción volumétrico:** Se propone la siguiente función de degradación del módulo volumétrico:

$$(1 - d_K) = (1 - \Phi_K \omega_K^e) \quad (12)$$

donde  $\dot{\omega}_K^e = \sigma_{oct} \dot{\epsilon}_v^e$  es el incremento temporal de energía específica elástica volumétrica,  $\Phi_K$  es un escalar positivo y como  $\sigma_{oct} = K_0 \epsilon_v^e$ , se puede expresar:

$$\sigma_{oct} = K_S^D \epsilon_v^e = (1 - d_K) K_0 \epsilon_v^e = (1 - \Phi_K \omega_K^e) K_0 \epsilon_v^e \quad (13)$$

Por lo tanto, el incremento de energía específica elástica volumétrica está dado por:

$$\dot{\omega}_K^e = (1 - \Phi_K \omega_K^e) K_0 \epsilon_v^e \dot{\epsilon}_v^e \quad (14)$$

donde surge el factor de reducción buscado:

$$\int_{t=0}^t \frac{\dot{\omega}_K^e}{(1 - \Phi_K \omega_K^e)} dt = \int_{t=0}^t K_0 \epsilon_v^e \dot{\epsilon}_v^e dt$$

integrando,

$$-\frac{1}{\Phi_K} \ln(1 - \Phi_K \omega_K^e) = \frac{1}{2} K_0 \epsilon_v^e{}^2,$$

por lo que operando algebraicamente se obtiene:

$$(1 - d_K) = (1 - \Phi_K \omega_K^e) = e^{-(\Phi_K K_0 \epsilon_v^e{}^2)/2} \quad (15)$$

Finalmente, se llega a la expresión deseada para la degradación del módulo volumétrico secante:

$$\boxed{K_S^D = K_0 e^{-(\Phi_K K_0 \epsilon_v^e{}^2)/2}} \quad (16)$$

**Factor de reducción distorsional:** Análogamente a lo desarrollado precedentemente, se propone la siguiente función de degradación del módulo distorsional:

$$(1 - d_G) = (1 - 3\Phi_G \omega_G^e) \quad (17)$$

donde  $\dot{\omega}_G^e = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^e$  es el incremento temporal de energía específica elástica distorsional,  $\Phi_G$  es un escalar positivo y como  $\tau_{oct} = G_0 \gamma_{oct}^e$ , se puede expresar:

$$\tau_{oct} = G_S^D \gamma_{oct}^e = (1 - d_G) G_0 \gamma_{oct}^e = (1 - 3\Phi_G \omega_G^e) G_0 \gamma_{oct}^e \quad (18)$$

Por lo tanto el incremento de energía específica elástica distorsional será:

$$\dot{\omega}_G^e = (1 - 3\Phi_G \omega_G^e) G_0 \gamma_{oct}^e \dot{\gamma}_{oct}^e \quad (19)$$

de donde surge el factor de reducción buscado:

$$\int_{t=0}^t \frac{\dot{\omega}_G^e}{(1 - 3\Phi_G \omega_G^e)} dt = \int_{t=0}^t G_0 \gamma_{oct}^e \dot{\gamma}_{oct}^e dt$$

integrando:

$$-\frac{1}{3\Phi_G} \ln(1 - 3\Phi_G \omega_G^e) = \frac{1}{2} G_0 \gamma_{oct}^e{}^2$$

por lo que operando algebraicamente se obtiene:

$$(1 - d_G) = (1 - 3\Phi_G \omega_G^e) = e^{-(3\Phi_G G_0 \gamma_{oct}^e{}^2)/2} \quad (20)$$

Finalmente, se llega a la expresión deseada la degradación del módulo de corte secante:

$$\boxed{G_S^D = G_0 e^{-(3\Phi_G G_0 \gamma_{oct}^e{}^2)/2}} \quad (21)$$

La determinación de las constantes  $\Phi_K$  y  $\Phi_G$ , surgen de considerar el valor que toman los módulos  $K_S^D$  y  $G_S^D$  cuando se alcanza el límite de elasticidad, durante ensayos uniaxiales.

$$\Phi_K = \frac{2}{K_0 (\varepsilon_v^e)_1^2} \ln \left( \frac{(K_S^D)_1}{K_0} \right) \quad (22)$$

siendo  $(K_S^D)_1$  el módulo volumétrico secante en el límite elástico, y  $(\varepsilon_v^e)_1$  la deformación volumétrica en el límite de elasticidad. Se considera a la relación  $(K_S^D)_1 / K_0 \approx \frac{3}{4}$  en el momento en que se inicia el crecimiento del módulo de Poisson (Chen, 1982) (Límite convencional de inicio del comportamiento no lineal, admitido por el modelo).

Luego:

$$\Phi_G = \frac{2}{3G_0 (\gamma_{oct}^e)_1^2} \ln \left( \frac{(G_S^D)_1}{G_0} \right) \quad (23)$$

donde  $(G_S^D)_1$  es el módulo distorsional secante en el límite elástico, y  $(\gamma_{oct}^e)_1$  es la distorsión octaédrica en el límite de elasticidad. Se considera a la relación  $(G_S^D)_1/G_0 \approx \frac{1}{2}$  en el momento en que se inicia el crecimiento del módulo de Poisson (Chen, 1982) (Límite convencional de inicio de la plasticidad, admitido por el modelo).

Finalmente, la relación tensión - deformación en el modelo presentado, puede escribirse como:

$$\sigma_{ij} = K_S^D \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G_S^D e_{ij} \quad (24)$$

Siendo  $\varepsilon_{kk}$  la deformación volumétrica,  $\delta_{ij}$  función Delta de Kronecker y  $e_{ij}$  el tensor desviador de deformaciones.

#### 4 TRATAMIENTO DE LA ANISOTROPIA

Debido a que la mampostería presenta un comportamiento marcadamente direccional, se presenta cierta complejidad al simularlo. Para el tratamiento de la anisotropía, se usa la técnica de mapeo de espacios, empleando la Teoría de Transformación de Espacios en la que se simula el comportamiento del sólido anisótropo real mediante un sólido ficticio isótropo (Betten 1981 y Oller, 1991). De esta manera, el problema se resuelve en el espacio isótropo ficticio, lo que permite utilizar modelos elastoplásticos y/o de daño desarrollados para materiales isótropos.

Los tensores de tensión en ambos espacios están relacionados mediante una transformación del tipo:

$$\tau_{ij} = A_{ijkl}(\sigma_{ij}, d_G^e) \sigma_{kl} \quad (25)$$

donde  $\tau_{ij}$  y  $\sigma_{kl}$  son los tensores de tensión en los espacios anisótropo real e isótropo ficticio respectivamente. El tensor de cuarto orden  $A_{ijkl}$  contiene la información sobre la anisotropía de resistencia. En el caso más general, este tensor es función del tipo de estado tensional y de la evolución del proceso elastoplástico. Se propone para el mismo la siguiente expresión:

$$A_{ijkl} = S_{klmn} A_{ijkl}^t(d_G^e) + (I_{klmn} - S_{klmn}) A_{ijkl}^c(d_G^e) \quad (26)$$

donde  $I_{klmn}$  es el tensor identidad de cuarto orden. Los tensores  $A_{ijkl}^t(d_G^e)$  y  $A_{ijkl}^c(d_G^e)$  son los tensores de transformación correspondientes a procesos de tracción y compresión simple y son funciones de la variable de daño  $d_G^e$  (Oller et al, 1988 y Luccioni, 1993).

El tensor  $S_{klmn}$  tiene en cuenta el tipo de estado tensional y se calcula como:

$$S_{klmn} = \delta_{kr} \delta_{ls} \delta_{mr} \delta_{ns} \frac{|\sigma_{rs}| + \sigma_{rs}}{2\sigma_{rs}} \quad (27)$$

El umbral de daño se define mediante una función de discontinuidad:

$$F(\sigma_{ij}, \alpha_k) = \bar{F}(\tau_{ij}, \bar{\alpha}_k) = 0$$



donde  $F$  y  $\bar{F}$  representan las funciones de fluencia en los espacios anisótropo real e isotropo ficticio y  $\alpha_k$  y  $\bar{\alpha}_k$  son variables internas correspondientes a dichos espacios.

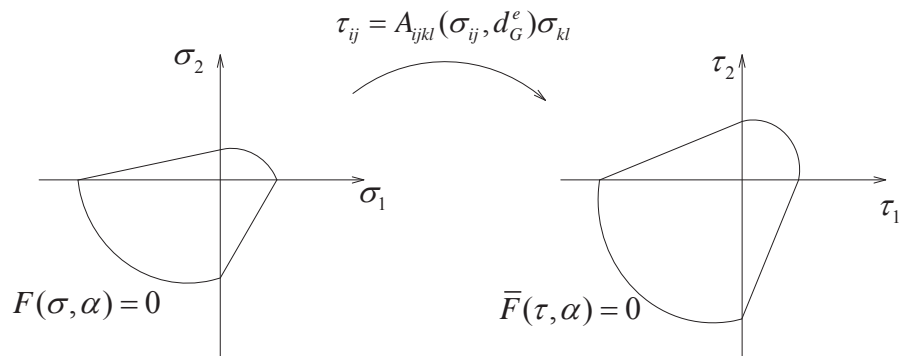


Figura 4. Transformación de espacios

## 5 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Para la obtención de resultados numéricos se realizó la implementación y calibración de lo descrito anteriormente en un programa marco de elementos finitos [PLCD5] desarrollado por el Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras de la Universidad Politécnica de Cataluña (PLCD Manual, 1991-presente).

Como se ha mencionado, el uso de homogeneización para la resolución de problemas estructurales, mediante la interacción de la micro-escala y la macro-escala y su retroalimentación, permite separar el comportamiento de los materiales componentes, esto es, que cada uno de ellos se rige por un modelo constitutivo distinto, que relaciona sus tensiones y deformaciones. Para el caso de los mampuestos o ladrillos, se considera una ley constitutiva lineal elástica. Denominando  $C_L$  a la matriz elástica del ladrillo, la relación tensión - deformación puede escribirse como:

$$\sigma_L = C_L \varepsilon_L \quad (28)$$

con,

$$\sigma_L = (\sigma_{xL}, \sigma_{yL}, \tau_{xyL})^T \text{ y } \varepsilon_L = (\varepsilon_{xL}, \varepsilon_{yL}, \gamma_{xyL})^T$$

Mientras que para las juntas de mortero se utiliza el modelo de degradación diferenciada presentado en este trabajo, en el cual sólo se permite la degradación del módulo de corte.

## 6 RESULTADOS

### 6.1 Superficies de falla

Se muestra a continuación la formulación de la superficie de discontinuidad utilizada para delimitar el comportamiento elástico de la mampostería. Como se detalló anteriormente, la falla esta regida por el comportamiento del mortero, lo que le confiere a la mampostería las características de un material friccional, dependiente de la cohesión del mismo. Por ello, el criterio de falla utilizado es el de Mohr-Coulomb. Este criterio, formulado por Coulomb en 1773 y desarrollado en profundidad por Mohr en 1882, forma parte de los criterios que dependen de dos parámetros, siendo éstos la cohesión interna entre partículas del sólido  $c$  y el rozamiento interno entre ellas, medido por el ángulo  $\phi$ . En función de las tensiones principales, la expresión matemática que lo define es:

$$F(\sigma, c, \phi) = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \operatorname{sen} \phi - c \cos \phi = 0 \quad (29)$$

Debido al valor de ángulo de fricción  $\phi$  del mortero, que normalmente oscila entre  $30^\circ$  y  $35^\circ$ , el criterio original de Mohr-Coulomb presenta el inconveniente de no cumplir con la relación inicial entre la resistencia uniaxial de tracción y compresión:

$$R^0 = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (30)$$

Evaluada la relación dada por la ecuación (30) en los valores de  $\phi$  mencionados para el mortero, se concluye que el valor de la misma está lejos de la que corresponde a un mortero,  $R^0 = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0| \approx 10$ . La opción para solucionar este problema, sería aumentar el ángulo de fricción, lo que provocaría un exceso de dilatación, o bien formular una modificación del criterio original, como lo hiciera Oller (1991), que consiste en afectar la tensión principal mayor  $\sigma_1$  de un parámetro de ajuste  $\alpha_R$  que permite regular la relación de resistencia uniaxial hasta cumplir con el valor deseado. De esta manera, la ecuación (29) queda expresada como:

$$F(\sigma, c, \phi, \alpha_R) = \left( \frac{\alpha_R \sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left( \frac{\alpha_R \sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \operatorname{sen} \phi - c \cos \phi = 0 \quad (31)$$

Operando algebraicamente, la ecuación (31) puede ser reducida a:

$$\sigma_3 = \alpha_R \sigma_1 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \quad (32)$$

con  $R_{Mohr} = R^0$  como se definió anteriormente en la ecuación (30).

A partir de la ecuación (32) se puede obtener el valor de  $\alpha_R$  necesario para cumplir con la relación de resistencia uniaxial requerida  $R'_{Mohr} = \alpha_R R_{Mohr}$ , cualquiera que sea el ángulo de rozamiento interno  $\phi$  que se proponga (cuidando que éste ángulo esté comprendido entre  $0^\circ < \phi < 90^\circ$ ). Esto implica (de ecuación (32)):

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma_1 = 0 & \quad \rightarrow \quad \sigma_3 = 2c \sqrt{R_{Mohr}} \\ \text{si } \sigma_3 = 0 & \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{2c}{\alpha_R \sqrt{R_{Mohr}}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la ecuación (30) resulta:

$$R^0 = \frac{|\sigma_3|}{|\sigma_1|} = \frac{2c \sqrt{R_{Mohr}}}{\frac{2c}{\alpha_R \sqrt{R_{Mohr}}}} = \alpha_R R_{Mohr} = R'_{Mohr} \quad (33)$$

obteniéndose así la expresión del ángulo de rozamiento interno en función de las variables del modelo:

$$\phi = 2 \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{R'_{Mohr}}{\alpha_R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \quad (34)$$

## 6.2. Validación del modelo de homogeneización

A modo de validación se presentan comparaciones de las superficies de falla obtenidas con el modelo propuesto y resultados experimentales. Se muestran resultados en el espacio de tensiones principales (Figuras 5a) obtenidos aplicando carga perpendicular y paralela a la junta de mortero y, por otra parte en la Figura 5b con cargas oblicuas respecto a las juntas de mortero. Los resultados experimentales corresponden a ensayos biaxiales de tracción-compresión y compresión-compresión obtenidos por Page (1983 y 1981), en un programa de ensayos con control de carga de 102 paneles de mampostería de  $360 \times 360 \times 54 \text{ mm}^3$ , con mampuestos en escala de dimensiones  $115 \times 40 \times 54 \text{ mm}^3$ .

En las Figuras 6a, 6b y 6c se muestran, en el espacio tensión normal - tensión tangencial una comparación de los resultados obtenidos con el modelo propuesto y con resultados experimentales obtenidos por Ganz and Thürlimann (1982) con un programa de ensayos de 12 paneles de dimensiones  $1200 \times 1200 \times 150 \text{ mm}^3$ .

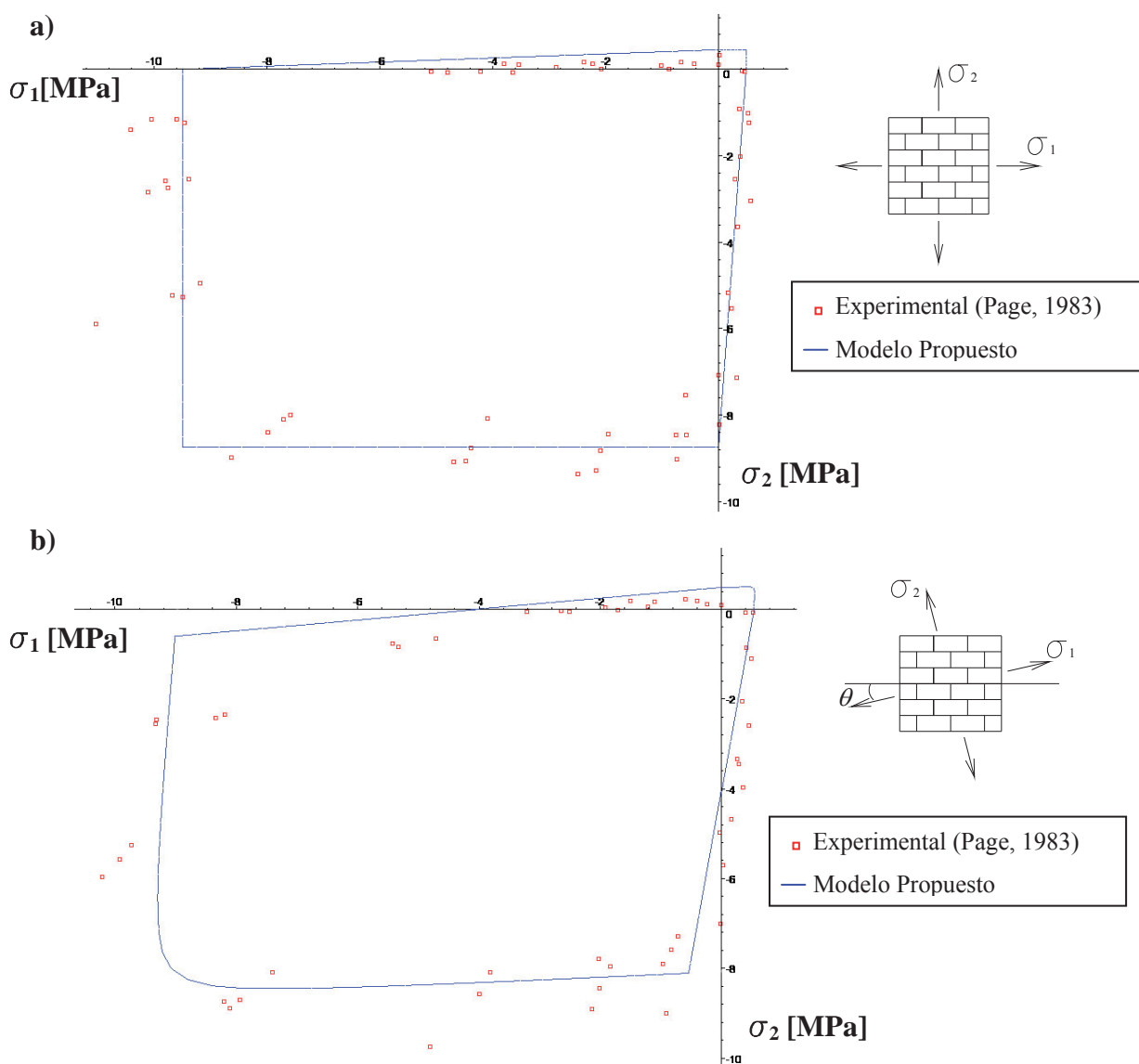


Figura 5. Comparación entre el modelo propuesto y resultados experimentales  
 a) con cargas perpendicular y paralela a la junta  
 b) con una orientación de  $\theta = 22,5^\circ$

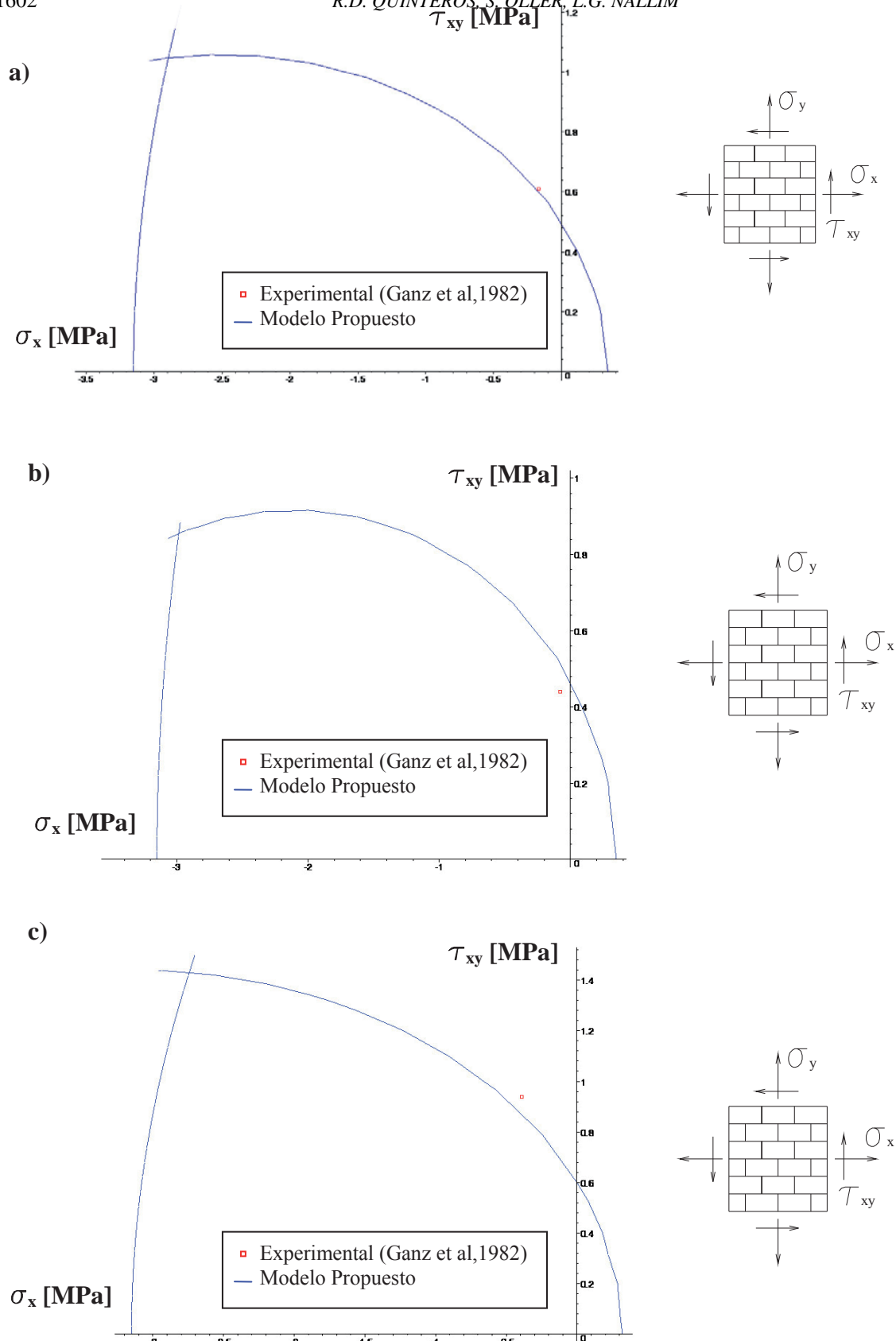


Figura 6. Comparación entre el modelo propuesto y resultados experimentales,

- a) con  $\sigma_y = -1.42$  MPa
- b) con  $\sigma_y = -0.92$  MPa
- c) con  $\sigma_y = -2.25$  MPa

Se observa un buen acuerdo entre las curvas obtenidas en ambos espacios con la metodología presentada y los resultados experimentales obtenidos por Page (1983 y 1981) y por Ganz and Thürlimann (1982).

## 6.2. Validación del modelo de degradación diferenciada

Si bien el modelo de degradación propuesto en el presente trabajo permite degradar de manera independiente la parte volumétrica y la parte desviadora, como se mencionó anteriormente, en este trabajo sólo se utiliza la degradación del modulo cortante  $G$ . Por lo tanto, una manera sencilla de validar su implementación computacional se lleva a cabo mediante la simulación de dos estados tensionales característicos como lo son el estado hidrostático y el estado de cortante o cizallamiento puro. El primero consiste en someter a un elemento a tensiones normales de igual magnitud y dirección en todas sus caras, por lo que es de esperar que el material no degrade y se mantenga la proporcionalidad entre tensiones normales y deformaciones longitudinales en todas las direcciones (Figura 7a). Mientras que se espera en el estado de cortante puro una caída en la curva tensiones tangenciales y deformaciones transversales cuando la tensión alcance un valor igual a la mitad de la tensión límite del material analizado (Figura 7b)

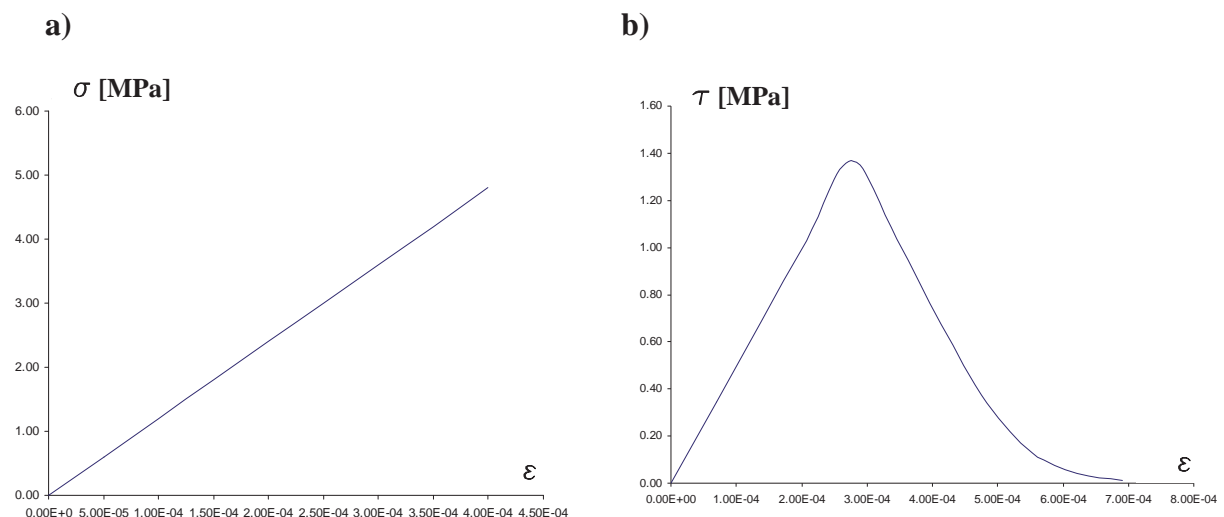


Figura 7. Validación del modelo propuesto

- a) Caso hidrostático
- b) Estado de cortante puro

Se muestra a continuación el resultado de la comparación de una curva tensión normal - deformación longitudinal  $\sigma - \epsilon$  a los efectos de analizar el comportamiento anelástico de una estructura de mampostería aplicando el modelo propuesto. La curva utilizada para la comparación corresponde a la obtenida por Pelá (2009), quien representa el comportamiento ortótropo de una estructura de mampostería con las siguientes características mecánicas:  $E_x = 3000MPa$ ,  $E_y = 2000MPa$ ,  $\nu_{xy} = 0.1$ ,  $\nu_{yx} = 0.15$ , y  $G_{xy} = 900MPa$ . El modelo constitutivo es el de daño unilateral formulado por Faria et al. (1998) y se simula una sollicitación de compresión uniaxial en la dirección paralela a la junta. En la Figura 8 se observa un buen acuerdo entre las curvas hasta el valor del pico de tensión de compresión, es allí donde la curva obtenida por Pelá presenta un ablandamiento exponencial, luego de un endurecimiento parabólico, y la tensión no se recupera. Mientras que el presente modelo

permite que la mampostería, una vez que ha fallado el mortero, evidencie un comportamiento en paralelo y se recupere debido a la hipótesis de asumir un comportamiento elástico lineal en el mampuesto.

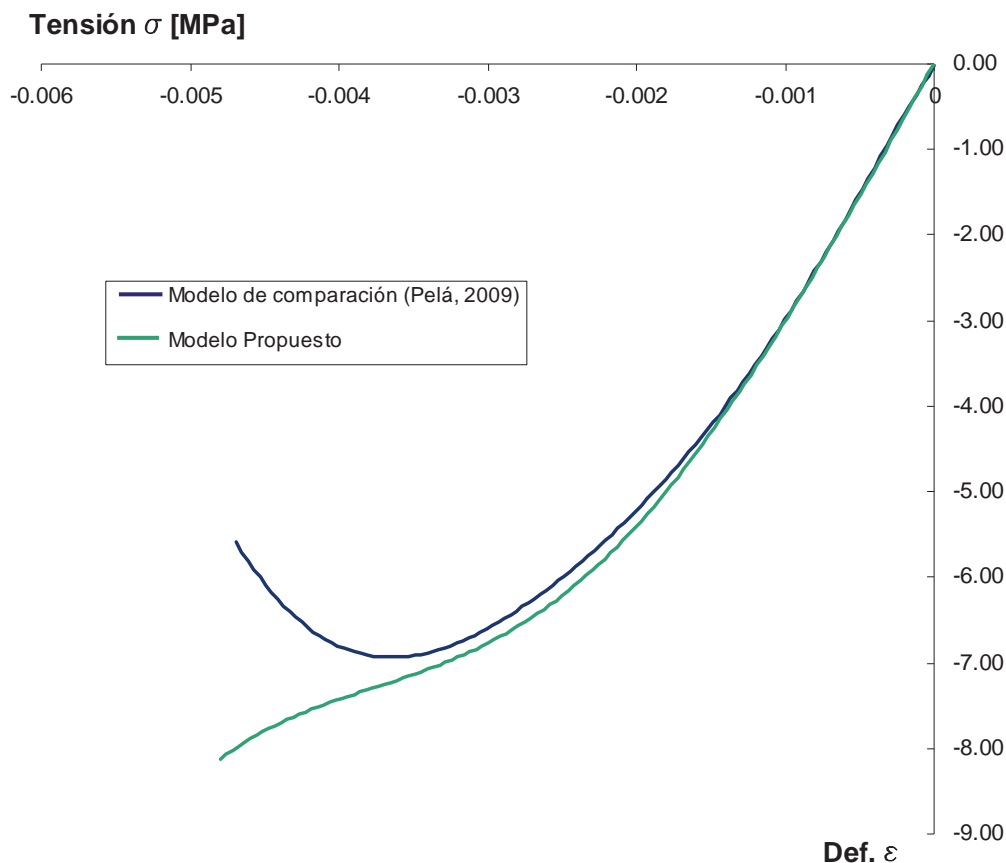


Figura 8. Comparación de la respuesta a compresión uniaxial en la dirección paralela a la junta horizontal

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo presenta un modelo que permite degradar de manera diferenciada a los módulos de rigidez volumétrico y cortante de un material. El citado modelo es apto para cualquier tipo de material friccional, y se destaca la diferenciación de la degradación selectiva, ya que es una mejora en relación a los modelos de daño clásicos que consideran la falla debido a las tensiones normales, ignorando lo que sucede con las tensiones tangenciales, lo que lleva a errores groseros en casos donde éstas alcanzan valores importantes. El modelo fue aplicado dentro de una técnica de homogeneización *ad hoc* para permitir su aplicación en estructuras de mampostería. El modelo general y la homogeneización han sido implementados computacionalmente en un programa marco de elementos finitos, lo que permite obtener el comportamiento no lineal de este tipo de estructuras con un grado de precisión razonable.

## 8 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo del CONICET, a través del PIP 0105/2010, Proyecto CIUNSa N°1903 y Proyecto Redes V, financiado por la Secretaría de Políticas Universitarias.

**REFERENCIAS**

- Anthoine, A., Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures* 32(2):137-163, 1995.
- Betten, J., Creep theory of anisotropic solids. *Journal of Reology*, 25(6):565-581, 1981.
- Chen W. F., Plasticity in reinforced Concrete - *Mc Graw Hill*, 1982.
- Faria, R., Oliver, J., Cervera, M., A Strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *International Journal of Solids and Structures* 35(14): 1533-1558, 1998.
- Gambarotta L., Lagomarsino S., Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*; 26: 423-439, 1997.
- Ganz H.R., Thürlimann B., Tests on the biaxial strength of masonry. Report No. 7502-3, Institute of Structural Engineering, ETH Zurich, Zurich, Switzerland, 1982.
- Kachanov, L., Introduction to Continuum Damage Mechanics. *Martinus Nijhoff Publishers*, Dordrecht, The Netherlands, 1986.
- Lopez, J., Oller, S., Oñate, E., Lubliner, J., A homogeneous constitutive model for masonry. *International journal for numerical methods in engineering* 46: 1651-1671, 1999.
- Mazars J. and Pijaudier-Cabot G., Continuum Damage Theory – Application to concrete. *Journal of Engineering. Mechanics*. ASCE 115 (2), 354-365, 1989.
- Luccioni B., Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortótropos. *Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Tucumán*, Argentina, 1993.
- Oller, S., Oliver, J., Lubliner, J., Oñate, E., Un Modelo Constitutivo de Daño Plástico para Materiales Friccionales. Parte I: Variables Fundamentales, Funciones de Fluencia y Potencial, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 4, 397-431. 1988.
- Oller, S., Un Modelo de Daño Continuo para Materiales Friccionales, Tesis doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, 1988.
- Oller, S., Modelización numérica de materiales friccionales, *Monografía N° 3, Ed. CIMNE*. Barcelona, 1991.
- Page, A.W., Finite element model for masonry. *Journal of the Structural Division*, ASCE, 104(ST8): 13957, 1267-1285, 1978.
- Pelá, L., Continuum Damage Model for Nonlinear Analysis of Masonry Structures, Tesis Doctoral, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria, Universidad Politècnica de Catalunya, España, 2009.
- PLCD Manual. Non-linear thermomechanic finite element code oriented to PhD student education, code developer at CIMNE, 1991 – to present.
- Quinteros, R., Oller, S., Nallim, L., Nonlinear homogenization techniques to solve masonry structures problems. *Composite Structures*, 94: 724–730. 2012
- Roca P., Molins C., Marí A.R., Strength capacity of masonry wall structures by the equivalent frame method. *Journal of Structural Engineering*, 131(10): 1601-1610, 2005.

- Sacco, E., A nonlinear homogenization procedure for periodic masonry. *European Journal of Mechanics A/Solids* 28: 209–222, 2009.
- Simo, J. C. & Ju, J. M., Strain and stress based continuum damage model - Part I : Formulation, *Int. Solids and Structures - Vol. 23*, Nro. 7, pp. 281,841. 1987.
- Zucchini, A., Lourenço, P. B., A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry. *International Journal of Solids and Structures* 39: 3233–3255, 2002.