

VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS TIMOSHENKO AHUSADAS Y CENTRÍFUGAMENTE RIGIDIZADAS

D.V. Bambill^{a,b}, C.A. Rossit^{a,b}, R.E. Rossi^a, A.R. Ratazzi^a, D.H. Felix^a, G. J. Gilardi^a

^a *Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur (UNS), Argentina,*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina,
dbambill@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

Palabras clave: viga, Timoshenko, velocidad de rotación, vibración, sección variable, cuadratura diferencial, elementos finitos.

Resumen. En este trabajo se presenta el caso de vibraciones libres de vigas Timoshenko ahusadas y centrífugamente rigidizadas. El interés se centra en las vibraciones transversales de la viga. Las ecuaciones diferenciales de movimiento que interpretan el problema son las derivadas del Principio de Hamilton siguiendo el desarrollo de Banerjee. Para oscilaciones armónicas se plantean dos ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden que gobiernan las amplitudes del desplazamiento flexional y la rotación flexional, respectivamente. Se incluye en el estudio propuesto el efecto que tiene el radio del eje de giro, la forma en que varía la sección transversal de la viga, así como condiciones de vinculación elástica. Se utiliza un procedimiento basado en el método de cuadratura diferencial para resolver el sistema diferencial gobernante. Se presentan algunos ejemplos numéricos ilustrativos. Los resultados se comparan con aquellos disponibles en la literatura y con los calculados por el método de elementos finitos.

1 INTRODUCCIÓN

Las vigas rotantes son estructuras de interés práctico, tienen múltiples aplicaciones, particularmente en el campo de la ingeniería mecánica se las encuentra en aspas de molinos eólicos, en álabes de turbinas, en la ingeniería aeronáutica, se utilizan en el diseño de modelo de hélices y aspas de helicópteros.

La teoría de vigas Timoshenko resulta adecuada para hacer un estudio del comportamiento dinámico de estructuras rotantes de esbeltez reducida. Los resultados que se obtienen son más precisos que los correspondientes al modelo de viga Bernoulli-Euler, ya que considera los efectos de la deformación por corte y de la inercia rotatoria, (Rossi *et al.* 1993); (Lin *et al.* 2001); (Karami *et al.* 2003). La influencia del efecto de corte y la inercia rotatoria, al ser tenidos en cuenta en la formulación producen resultados más cercanos a la realidad y mejores predicciones para las frecuencias superiores

Banerjee, plantea en sus trabajos (Banerjee, 2000); (Banerjee, 2001) el caso de la viga Cantilever rotante bajo la teoría de Timoshenko, y utiliza el método de matriz de rigidez dinámica, para resolver ejemplos numéricos. En el 2006 (Banerjee *et al.* 2006), estudia el caso de una viga rotante escalonada. Sari y Butcher, utilizaron el método de colocación de Chebyshev (Sari y Butcher, 2012) para obtener las frecuencias de vibración transversal de vigas de sección constante con condiciones elásticas de borde.

En este trabajo se utilizó el Método de Cuadratura Diferencial (MCD) para resolver el problema planteado en el título. El Método de Elementos Finitos (MEF) se utilizó para codificar un algoritmo computacional basado en el procedimiento clásico (Przenienieck, 1968); (Petyt, 1990); (Rossi, 2007).

Como antecedentes del uso del MCD cabe mencionar que fue utilizado por primera vez por Bellman y sus colaboradores, (Bellman *et al.* 1971). El presente desarrollo en MCD puede considerarse una extensión de trabajos previamente presentados por los autores (Felix *et al.* 2009a,b, 2010, 2011); (Bambill *et al.* 2010, 2012), que permite contemplar en el modelo variaciones tanto continuas como discontinuas de la sección transversal, considerar vinculación elástica de la viga al eje de rotación y obtener tanto las frecuencias como las formas modales de vibración transversal de la viga rotante. (Shu C. y Chen, 1999)

El sistema de las ecuaciones diferenciales gobernantes provienen de la derivación del principio de Hamilton, siguiendo el proceso indicado por (Banerjee, 2001) se utiliza un término dependiente de la velocidad que mejora la precisión en particular para velocidades de rotación altas.

El método de cuadratura diferencial permite transformar las ecuaciones gobernantes del problema en un sistema de ecuaciones lineales equivalente, denominado ecuaciones análogas de cuadratura diferencial. Resolviendo ese sistema lineal de ecuaciones, es posible obtener los coeficientes naturales de frecuencia del problema y las correspondientes formas modales.

2 ECUACIONES QUE INTERPRETAN EL PROBLEMA DE LA VIGA ROTANTE

El presente estudio trata el problema de las vibraciones transversales de vigas rotantes Timoshenko considerando que la vinculación en los extremos no es una vinculación perfecta sino que puede sufrir pequeños desplazamientos proporcionales a las reacciones de vínculo. La sección transversal de la viga puede ser constante o variable linealmente o en forma cuadrática. Además la viga puede tener más de un tramo con distintas características. Se considera en el análisis la dimensión del eje de rotación.

La longitud de la viga es L . En cada tramo k de longitud L_k . la sección transversal es

variable. Y con R_1 se indica el radio del eje de rotación.

En la **Figura 1** se muestra una viga rotante de d tramos. Los vínculos en los extremos se modelan con resortes a traslación y a rotación. La viga rota con velocidad de rotación $\bar{\eta}$ y se consideran para el estudio las vibraciones que se producen en el plano transversal al plano de giro.

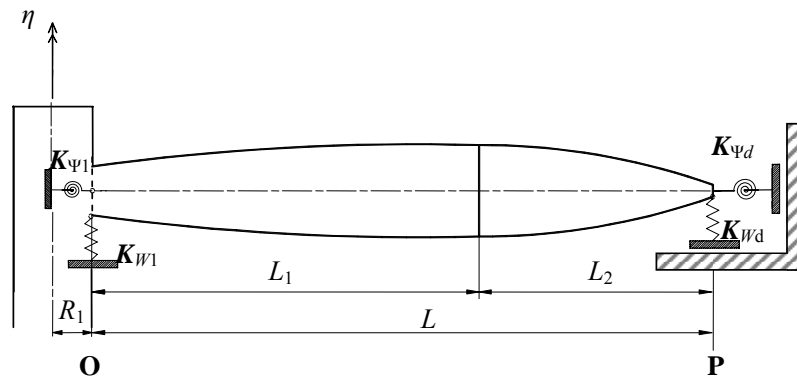


Figura 1: Viga rotante Timoshenko de más de un tramo con variación de altura y vínculos elásticos.

Dependiendo de la geometría, del material y de las discontinuidades, la viga puede considerarse dividida en d subdominios o tramos. Las ecuaciones gobernantes para cada tramo, las condiciones de compatibilidad de esfuerzos internos y deformaciones entre tramos adyacentes y las condiciones de contorno en los bordes externos pueden ser obtenidas utilizando el Principio de Hamilton, o utilizando directamente la ley de movimiento de Newton. En este análisis las ecuaciones derivadas el Principio de Hamilton de la referencia (Banerjee, 2001), fueron extendidas para una viga de más de un tramo y de sección variable se considera también la posibilidad de tener vinculación elástica en sus extremos

Las ecuaciones que interpretan el problema descripto, aplicadas a un tramo k de la viga rotante, Figura 2, son:

$$\frac{\partial \left(\bar{N}_k(x_k) \frac{\partial w_k}{\partial x} \right)}{\partial x} - \rho_k A_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \kappa_k A_k G_k \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} \right) = 0; \tag{1}$$

$$E_k I_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_k^2} + \kappa_k A_k G_k \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_k} - \psi_k \right) - \rho_k I_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} + \bar{\eta}^2 \rho_k I_k \psi_k = 0. \tag{2}$$

donde con $\bar{\eta}$ se indica la velocidad angular de rotación de la viga, x_k es la coordenada en la dirección del eje de la viga en cada tramo; A_k es el área transversal, w_k es el desplazamiento en dirección y , transversal al plano de rotación; ψ_k es el giro de la sección; ρ_k es la densidad del material; I_k es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro de flexión.; t es el tiempo, $E_k I_k$ es la rigidez a flexión y $\kappa_k A_k G_k$ es la rigidez al corte ; κ_k es el factor de la deformación por corte.

La fuerza centrífuga generada por la velocidad de rotación $\bar{\eta}$ en una sección genérica del tramo k es:

$$\bar{N}_k = \bar{N}_k(x_k) = \bar{\eta}^2 \left(\bar{R}_k \int_{\bar{x}_k}^{L_k} \rho_k A_k(x_k) dx_k + \int_{\bar{x}_k}^{L_k} \rho_k A_k(x_k) x_k dx_k \right) + \bar{F}_{k+1}; \quad (3)$$

donde \bar{F}_{k+1} es la fuerza axial resultante en el extremo del tramo más alejado del eje de rotación. L_k es la longitud del tramo y $L = \sum_{k=1}^d L_k$ es la longitud total de la viga de d tramos.

Ver Figura 1. Con \bar{R}_k se indica a la distancia entre el eje de rotación y la sección transversal del tramo más próxima al eje, medida tal como se observa en la Figura 2.

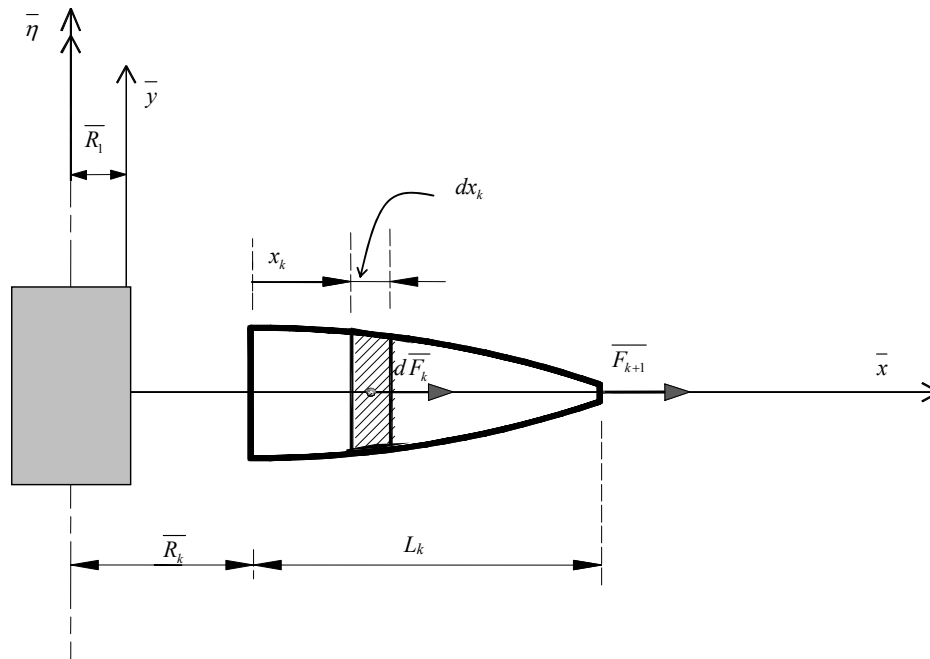


Figura 2: tramo k de la viga rotante.

Adoptando variables y parámetros adimensionales como indica a continuación:

$$x = \frac{x_k}{L_k}; I_k = \frac{L_k}{L}; R_k = \frac{\bar{R}_k}{L}; \alpha_k = \frac{E_k A_k(0)}{E_1 A_1(0)}; \beta_k = \frac{E_k I_k(0)}{E_1 I_1(0)}; w_k = \frac{w_k(x_k, t)}{L_k}; \psi_k = \psi_k(x_k, t). \quad (4)$$

Las expresiones adimensionales de las constantes de los resortes de los vínculos elásticos de los extremos externos de la viga se adoptaron como:

$$K_{w_i} = \bar{K}_{w_i} \frac{L}{E_1 A_1(0)}; K_{\psi_i} = \bar{K}_{\psi_i} \frac{L}{E_1 I_1(0)}, \text{ con } i=1 \text{ e } i=d. \quad (5)$$

El parámetro de esbeltez s_k es:

$$s_k = L \sqrt{\frac{A_k(0)}{I_k(0)}} \quad (6)$$

Y en particular el referido a la esbeltez del primer tramo resulta:

$$s_1 = L \sqrt{\frac{A_1(0)}{I_1(0)}}$$

Los esfuerzos internos relacionados con las características de la primera sección del tramo:

$$N_k(x) = \frac{\bar{N}_k(x_k)}{E_k A_k(0)}; \quad N_{k+1} = \frac{\bar{F}_{k+1}}{E_k A_k(0)}; \quad Q_k(x) = \frac{\bar{Q}_k(x_k)}{E_k A_k(0)}; \quad M_k(x) = \frac{L_k}{E_k I_k(0)} \bar{M}_k(x_k).$$

Finalmente, la velocidad adimensional de rotación se define como:

$$\eta^2 = \frac{\rho_1 A_1(0)}{E_1 I_1(0)} L^4 \bar{\eta}^2 \quad (7)$$

Asumiendo un movimiento armónico los desplazamientos w y giros ψ pueden escribirse como:

$$w_k = W_k(x).e^{i\omega t}; \quad (8)$$

$$\psi_k = \Psi_k(x).e^{i\omega t}; \quad (9)$$

donde la amplitud del desplazamiento transversal y la amplitud de giro son indicados como $W_k(x)$ y $\Psi_k(x)$ respectivamente.

La expresión adimensional del parámetro de frecuencia natural ω se indica como:

$$\lambda_i^2 = \Omega_i = \sqrt{\frac{\rho_1 A_1(0)}{E_1 I_1(0)}} L^2 \omega_i. \quad (10)$$

Las expresiones adimensionales de los esfuerzos de corte y momento flector, en términos de los desplazamientos son las siguientes:

$$Q_k(x) = \left(N_k(x) + \frac{\kappa}{2(1+\nu_k)} a_k(x) \right) \frac{dW_k(x)}{dx} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_k(x) \Psi_k(x); \quad (11)$$

$$M_k(x) = b_k(x) \frac{d\Psi_k(x)}{dx}; \quad (12)$$

donde $a_k(x)$ y $b_k(x)$ indican la variación del área y del momento de inercia de la sección transversal, respectivamente; y ν_k es el coeficiente de Poisson del material.

Las formas adimensionales de las ecuaciones de movimiento (1) y (2) en cada tramo k de la viga resultan:

$$\begin{aligned} & \eta^2 a_k(x) (R_k + x) \frac{dW_k(x)}{dx} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_k(x) \left(\frac{d^2 W_k(x)}{dx^2} - \frac{d\Psi_k(x)}{dx} \right) - \\ & - \frac{s_1^2}{l_k^2} N_k(x) \frac{d^2 W_k(x)}{dx^2} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a'_k(x) \left(\frac{dW_k(x)}{dx} - \Psi_k(x) \right) = \lambda^4 a_k(x) W_k(x); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} s_1^2 s_k^2 a_k(x) \left(\frac{dW_k(x)}{dx} - \Psi_k(x) \right) - \frac{s_1^2}{l_k^2} b_k(x) \frac{d^2\Psi_k(x)}{dx^2} \\
& - \frac{s_1^2}{l_k^2} b'_k(x) \frac{d\Psi_k(x)}{dx} - \eta^2 b_k(x) \Psi_k(x) = \lambda^2 b_k(x) \Psi_k(x);
\end{aligned} \tag{14}$$

donde $a'_k(x) = da_k(x)/dx$ y $b'_k(x) = db_k(x)/dx$, son las derivadas de las funciones que establecen la forma de variación del área y del momento de inercia de la sección transversal.

Las ecuaciones de compatibilidad de esfuerzos y corrimientos entre tramos son:

$$\alpha_{k-1} Q_{k-1}(1) - \alpha_k Q_k(0) = 0; \tag{15}$$

$$\frac{1}{l_{k-1}} \beta_{k-1} M_{k-1}(1) - \frac{1}{l_k} \beta_k M_k(0) = 0; \tag{16}$$

$$-l_{(k-1)} W_{(k-1)}(1) + l_k W_k(0) = 0; \tag{17}$$

$$-\Psi_{(k-1)}(1) + \Psi_k(0) = 0; \tag{18}$$

En el borde O de la viga más cercano al eje de rotación se cumple que:

$$l_1 K_{W1} W_1(0) - Q_1(0) = 0; \tag{19}$$

$$l_1 K_{\Psi1} \Psi_1(0) - M_1(0) = 0; \tag{20}$$

y en forma análoga para el borde P de la viga, más alejado del eje de rotación:

$$Q_d(1) - K_{Wd} \frac{l_d}{\alpha_d} W_d(1) = 0; \tag{21}$$

$$M_d(1) - K_{\Psi d} \frac{l_d}{\beta_d} \Psi_d(1) = 0. \tag{22}$$

3 ECUACIONES ANÁLOGAS DE CUADRATURA DIFERENCIAL

La solución aproximada del problema se desarrolla mediante la discretización del dominio de cada tramo k de la viga. En cada uno se define un conjunto finito de puntos o nodos i en los que se plantean las denominadas ecuaciones análogas de cuadratura diferencial, (Bambill *et al.* 2010). La referencia (Bert and Malik, 1996) contiene un desarrollo detallado del método.

Las ecuaciones análogas de cuadratura para el dominio discreto de cada tramo de viga, se determinan a partir de las ecuaciones planteadas para el dominio continuo.

A continuación se expresan las expresiones de la amplitud de los esfuerzos internos de corte y momento flector:

$$Q_k(x_i) = \left(N_k(x_i) + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_k(x_i) \right) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj}; \tag{23}$$

$$M_k(x_i) = b_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} \tag{24}$$

Los $A_{ij}^{(1)}$ son los coeficientes de peso del método de cuadratura diferencial (Bert and Malik, 1996) que se obtienen a partir de la malla de nodos del modelo. El valor de n de la sumatoria, indica la cantidad de nodos adoptada en cada tramo de viga.

Las ecuaciones análogas de movimiento son:

$$\begin{aligned} & \left(\eta^2 a_k(x_i) (R_k + x_i) - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_{1k}(x_i) \right) \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(1)}) W_{kj} - \\ & \left(\frac{s_1^2}{l_k^2} N_k(x_i) + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_k(x_i) \right) \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(2)}) W_{kj} - \\ & + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} \frac{s_1^2}{l_k^2} a_{1k}(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} = \lambda^4 a_k(x_i) W_{ki}; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} s_1^2 s_k^2 a_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} W_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} b_k(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} \Psi_{kj} + \\ & \left(\frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} s_1^2 s_k^2 a_k(x_i) - \eta^2 b_k(x_i) \right) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} b_{1k}(x_i) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} = \lambda^4 b_k(x_i) \Psi_{ki}. \end{aligned} \tag{26}$$

Las ecuaciones análogas de compatibilidad de esfuerzos internos son:

$$\begin{aligned} & -\alpha_{(k-1)} \left(\left(N_{(k-1)}(1) + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_{(k-1)}(1) \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{(k-1)j} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_{(k-1)}(1) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} \right) \\ & + \alpha_k \left(\left(N_k(0) + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_k(0) \right) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_k(0) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} \right) = 0; \end{aligned} \tag{27}$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} b_{(k-1)}(1) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{(k-1)j} + \frac{\alpha_k}{l_k} b_k(0) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} \Psi_{kj} = 0. \tag{28}$$

Las ecuaciones análogas de compatibilidad de desplazamientos se expresan como:

$$-l_{(k-1)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} W_{(k-1)j} + l_k \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} W_{kj} = 0; \tag{29}$$

$$-\sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} + \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} = 0. \tag{30}$$

En forma similar, las ecuaciones análogas de cuadratura correspondientes a las condiciones de vinculación elástica en los extremos de la viga son:

$$\left(N_1(0) + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_1(0) \right) \sum_{j=1}^n C_{1j}^{(1)} W_{1j} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_1(0) \Psi_{11} - l_1 K_{w1} W_{11} = 0; \tag{31}$$

$$K_{\psi 1} \Psi_{11} - \frac{b_1(0)}{l_1} \sum_{j=1}^n C_{1j}^{(1)} \Psi_{1j} = 0; \tag{32}$$

$$\left(N_d(1) + \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_d(1) \right) \sum_{j=1}^n C_{nj}^{(1)} W_{dj} - \frac{\kappa_k}{2(1+\nu_k)} a_d(1) \Psi_{dn} - l_d K_{wd} W_{dn} = 0; \quad (33)$$

$$K_{\Psi_n} \Psi_{dn} - \frac{b_d(1)}{l_d} \sum_{j=1}^n C_{nj}^{(1)} \Psi_{dj} = 0. \quad (34)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones análogas de cuadratura se obtienen las frecuencias naturales adimensionales del sistema rotante y las formas modales

4 ANÁLISIS CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

En la formulación del algoritmo para el análisis de las vibraciones libres de una viga rotante con el método de elementos finitos, se consideró una viga no rotante sujeta a una fuerza distribuida variable actuando a lo largo de la viga. El elemento viga implementado por los autores posee un nodo en cada extremo, con tres grados de libertad en cada nodo, que se reducen a dos cuando no se incluye la deformación axial. El efecto deformante del esfuerzo de corte y la inercia rotatoria de las secciones transversales han sido incluidos en la formulación (teoría de Timoshenko). Se utilizaron polinomios de segundo grado completos para las rotaciones de las secciones transversales y de tercer grado para los desplazamientos transversales. El efecto de segundo orden del esfuerzo axial, que introduce una rigidez adicional cuando el elemento es traccionado, se implementó con una matriz de rigidez geométrica, que a su vez incluye el efecto de la deformación por corte. Al codificar el algoritmo computacional, las matrices de rigidez y de masa fueron calculadas utilizando el clásico procedimiento del MEF (Przemieniecki, 1968); (Petyt, 1990). Un desarrollo detallado de las matrices puede verse en un trabajo de los autores ya publicado (Felix et al, 2011). Las frecuencias naturales se determinaron con el método de iteración inversa (Burden and Faires, 2001).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

En la [Tabla 1](#) se presentan los seis primeros coeficientes adimensionales de frecuencia natural de una viga Timoshenko de sección constante de un tramo y doblemente empotrada, E-E, que rota a velocidad η . Se adopta $\nu_1=0.30$ y $\kappa_1=5/6$ (Sari et al., 2012). No se considera el efecto de la dimensión del eje de rotación, $R_1=0$.

Este primer caso, se adoptó como referencia para analizar los cambios en los coeficientes de frecuencia al generar variaciones en los diferentes parámetros de la viga rotante: área transversal, diámetro del eje de rotación, esbeltez, condiciones de borde en los extremos.

Se presentan tres casos de relación de la altura de la sección respecto de la longitud de la viga:

- $h_1(0)/L=0.30$, lo que es equivalente a expresar $s_1 = L \sqrt{A_1(0)/I_1(0)} = 11.547$,
- $h_1(0)/L=0.20$, o $s_1 = 17.3205$; y
- $h_1(0)/L=0.02$, o $s_1 = 173.205$.

En la [Tabla 1](#) se observa cómo los coeficientes de frecuencia aumentan con la velocidad de rotación. Para el caso de menor esbeltez, a) $s_1=11.547$, comparando el coeficiente de frecuencia fundamental con velocidad $\eta=15$ y el de la viga en reposo, se observa que la velocidad produce un aumento del 38% en el coeficiente fundamental. El segundo coeficiente

aumenta un 34%, 28% es el aumento para el tercer coeficiente, 10% para el cuarto coeficiente y el 13% para el quinto y sexto coeficientes respectivamente. La menor variación de produce en el tercer coeficiente.

El efecto que produce la esbeltez de la viga sobre las frecuencias adimensionales puede analizarse en la Tabla 1 al variar s_1 . Para las esbelteces b) y c) de la viga de sección uniforme puede notarse que los coeficientes de las primeras tres frecuencias naturales comparados con la viga menos esbelta, $s_1=11.547$, aumentan pero ese aumento es menor a medida que la velocidad crece de $\eta=0$ hasta 15.

Es así que para caso b) la frecuencia fundamental adimensional en reposo difiere 9.4% y al rotar con $\eta=15$ la diferencia se reduce a un 4.8%. De manera análoga ocurre para la segunda de 13.8% a 7.2%; tercera de 15.8% a 10% y sexta frecuencias adimensionales de 31.8% a 23.5%. Diferente es la situación de la cuarta y quinta frecuencias adimensionales, pues comparando los coeficientes λ_4 de las vigas con $\eta=0$, el porcentaje de diferencia es del 17,5% y para $\eta=15$ es aún mayor, 26.6%; y λ_5 aumenta de 22.3%, $\eta=0$, a 27%, $\eta=15$.

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	
			a)	$s_1=11.547$			
0	3.87686	5.63784	7.15756	8.43251	9.28133	9.58955	MCD
	3.87686	5.63784	7.15756	8.43251	9.28133	9.58956	MEF
5	4.17861	6.01469	7.56113	8.82761	9.32595	10.00335	MCD
	4.18023	6.01671	7.56251	8.83012	9.33185	10.00524	MEF
10	4.76494	6.78331	8.40774	9.18126	9.90087	10.39228	MCD
	4.76899	6.79050	8.41395	9.20997	9.90617	10.41024	MEF
15	5.36012	7.57382	9.16854	9.30724	10.46655	10.87087	MCD
	5.36631	7.59207	9.21786	9.34220	10.50151	10.88662	MEF
			b)	$s_1=17.3205$			
0	4.24201	6.41794	8.28532	9.90372	11.34875	12.64025	MCD
	4.24201	6.41794	8.28532	9.90373	11.34875	12.64025	MEF
	4.24201	6.41794	8.28532	9.90362	11.34874	12.64024	Sari et al., 2012
5	4.49911	6.70305	8.56941	10.19405	11.64839	12.93819	MCD
	4.50028	6.70403	8.57010	10.19457	11.64878	12.93869	MEF
10	5.04036	7.35710	9.25386	10.90754	12.39102	13.38190	MCD
	5.04343	7.36013	9.25625	10.90949	12.39262	13.39103	MEF
15	5.62009	8.11285	10.08277	11.78635	13.29862	13.42301	MCD
	5.62471	8.11820	10.08764	11.79090	13.30359	13.44469	MEF
			c)	$s_1=173.205$			
0	4.72350	7.82817	10.93412	14.01543	17.06787	20.08680	MCD
	4.72350	7.82817	10.93412	14.01543	17.06787	20.08680	MEF
	4.72350	7.82817	10.93412	14.01543	17.06787	20.08680	Sari et al., 2012
5	4.94792	8.02573	11.09181	14.14539	17.17824	20.18283	MCD
	4.94794	8.02575	11.09183	14.14540	17.17825	20.18284	MEF
10	5.46351	8.53490	11.52462	14.51322	17.49602	20.46224	MCD
	5.46357	8.53496	11.52467	14.51326	17.49606	20.46227	MEF
15	6.05770	9.20198	12.14259	15.06458	17.98650	20.90159	MCD
	6.05780	9.20209	12.14268	15.06467	17.98658	20.90166	MEF

Tabla 1: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko uniforme E-E, con $h_1(0)/L=0.3; 0.2; 0.02$.

Cuando la viga uniforme tiene mayor esbeltez, $s_1=173.205$, caso c), todos los coeficientes

son mayores que los correspondientes del caso a). En todos los casos al aumentar el parámetro de velocidad η , desde $\eta=0$ a $\eta=15$ las diferencias con los coeficientes del caso a) se reducen entre un 9% y un 20%, según el modo de vibración: λ_1 21,8% ($\eta=0$) y 13,0% ($\eta=15$); λ_4 66,2% ($\eta=0$) y 61,8% ($\eta=15$); y λ_6 109,5% ($\eta=0$) y 92.3% ($\eta=15$).

Las Tablas siguientes (2 a 10) muestran las seis primeras frecuencias adimensionales de una viga de sección variable linealmente con $h_d(1)/h_1(0) = 1/2$. La altura de la viga es máxima en la unión con el eje de rotación y disminuye linealmente hacia el otro extremo.

Se considera en el análisis siguiente el efecto del radio del eje de rotación R_1 , de la esbeltez de la viga y la velocidad de rotación así como distintas condiciones de borde.

La Tabla 2 corresponde a la viga corta, $s_1=11.547$, con la sección variable indicada Empotrada-Empotrada, E-E. Cuando no se considera la dimensión del eje de rotación, $R_1=0$, las tres primeras frecuencias adimensionales resultan ser menores que en el caso de referencia para todos los valores de η . La cuarta resulta ser menor para η igual 0 y 5 y mayor para 10 y 15; en particular para $\eta=15$, es un 8,4% mayor, y es esta la máxima diferencia que se produce para $R_1=0$. La quinta prácticamente no varía para η igual a 0 y 15 y tiene la mayor diferencia 4,4%, para $\eta=5$, la sexta es un 6,6% mayor para $\eta=0$ y un 4,3% para $\eta=15$.

El efecto del radio, $R_1=0.5$; $R_1=1$, se presenta en general como un aumento de las frecuencias adimensionales al aumentar el efecto rigidizador de la fuerza centrífuga con la mayor distancia al eje de rotación.

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	
			$R_1=0$				
0	3.56079	5.33406	6.85674	8.17488	9.34920	10.22130	MCD
	3.56079	5.33406	6.85674	8.17488	9.34920	10.22130	MEF
5	3.86716	5.69240	7.22282	8.55260	9.73660	10.27601	MCD
	3.86912	5.69413	7.22408	8.55361	9.73755	10.28107	MEF
10	4.46018	6.44816	8.03537	9.39415	10.26031	10.67848	MCD
	4.46489	6.45322	8.03993	9.39924	10.27971	10.68328	MEF
15	5.06138	7.25987	8.93115	10.08800	10.55998	11.34423	MCD
	5.06834	7.26892	8.94247	10.12707	10.57808	11.37283	MEF
			$R_1=0.5$				
5	4.05730	5.91685	7.46088	8.80084	9.97967	10.30903	MCD
	4.05897	5.91841	7.46209	8.80187	9.98108	10.31367	MEF
10	4.87459	6.97176	8.61452	9.92592	10.38638	11.19704	MCD
	4.87820	6.97606	8.61908	9.93677	10.40074	11.20625	MEF
15	5.62980	7.99076	9.68776	10.25380	11.22222	11.58533	MCD
	5.63507	7.99893	9.70779	10.29357	11.24554	11.60464	MEF
			$R_1=1$				
5	4.21882	6.11257	7.67140	9.02030	10.15386	10.37851	MCD
	4.22030	6.11401	7.67256	9.02138	10.15679	10.38164	MEF
10	5.18796	7.37629	9.06030	10.13530	10.68083	11.37737	MCD
	5.19097	7.38021	9.06528	10.15420	10.68722	11.39087	MEF
15	6.04114	8.52538	10.01554	10.53974	11.37564	12.07639	MCD
	6.04557	8.53358	10.05897	10.55769	11.40898	12.08689	MEF

Tabla 2: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Empotrada-Empotrada, $h_1(0)/L=0.3$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

Para $R_1=0.5$ y $\eta=15$ el cuarto coeficiente es el que más varía (9.2%), los demás están entre

5% y 6.7%. Con $R_1=1$ y $\eta=15$ el cuarto coeficiente también es el que más aumenta (11.7%), pero en este caso también el primer y el segundo coeficiente de frecuencia tienen un incremento del mismo orden 11.3%, 11.2%, respectivamente.

Las Tablas 1 y 2 incluyen también valores de los coeficientes de frecuencia calculados con el método de elementos finitos. Se puede observar que el término de velocidad de Banerjee genera diferencias pequeñas entre ambos conjuntos de coeficientes al incrementarse la velocidad. Para $\eta=0$ los coeficientes de ambos métodos concuerdan.

La Tabla 3 corresponde a una viga con condiciones de borde articulada-articulada, A-A. Con $R_1=0$ todos los coeficientes de frecuencia son menores que los de referencia, Tabla 1 caso a). En particular las mayores diferencias se producen en los coeficientes de la frecuencia fundamental de la viga en reposo es un 33.7% más bajo; con la rotación este efecto se amortigua siendo para $\eta=15$ del orden del 13%. Con $R_1=0.5$ y $\eta=15$ solo el de la frecuencia fundamental es más bajo, un 1.14%, pero los demás coeficientes son superiores siendo el quinto coeficiente el que tiene la mayor diferencia 3.8%. En la relación $R_1=1$ y $\eta=15$ todos los coeficientes están por encima de los de referencia.

Se puede decir que la condición A-A en general reduce los valores de los coeficientes de frecuencia al darle a la viga mayor flexibilidad.

Además, puede observarse que para esta condición de esbeltez, los cambios más significativos se producen en la frecuencia fundamental para la viga en reposo.

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	2.567590	4.778008	6.544992	8.013290	9.263391	9.319772
5	3.134146	5.208465	6.941697	8.410387	9.302239	9.687255
10	3.950813	6.060172	7.803116	9.260228	9.332300	10.630456
15	4.659095	6.927237	8.733457	9.264552	10.305821	10.849764
			$R_1=0.5$			
5	3.437084	5.473143	7.196446	8.670156	9.304933	9.959635
10	4.461764	6.631509	8.404669	9.292354	9.949045	10.863573
15	5.299078	7.689005	9.232278	9.603703	10.866455	11.173703
			$R_1=1$			
5	3.666141	5.697711	7.419846	8.899924	9.308193	10.202849
10	4.820542	7.060435	8.856512	9.312400	10.430607	10.889352
15	5.742107	8.223846	9.274967	10.127213	10.961692	11.594944

Tabla 3: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Articulada- Articulada, $h_1(0)/L=0.3$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

La Tabla 4 corresponde a la viga con condición de borde articulada en el eje de rotación y deslizante en el otro extremo, A-D.

La condición de borde deslizante corresponde desplazamiento transversal permitido y giro impedido. Esta vinculación en el extremo P de la viga se establece con las siguientes condiciones de borde:

$$\Psi_d(1) = 0; Q_d(1) = 0 \quad (35)$$

Este modelo de viga tiene condiciones de borde de mayor flexibilidad que A-A, lo que se traduce en coeficientes de frecuencia mucho menores a los de referencia. Para el caso estático la frecuencia fundamental adimensional es un 68.6% menor que el caso de referencia. Para las

frecuencias altas los cambios no son muy significativos, lo que podría indicar que no son tan dependientes de estas condiciones de borde.

Las tres tablas siguientes corresponden a una viga de factor de esbeltez de 17.3205. La [Tabla 5](#), viga E-E, muestra como hecho distintivo que los coeficientes de frecuencia que sufren mayores aumentos son los de las frecuencias superiores: λ_4 , λ_5 y λ_6 , con respecto al caso de referencia; entre un 20 y un 36% para $\eta=15$.

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	1.216025	3.737079	5.702924	7.309246	8.665360	9.309813
5	2.277340	4.263182	6.124759	7.710711	9.071323	9.306221
10	3.164054	5.187315	7.007909	8.601243	9.286822	10.004277
15	3.858181	6.070667	7.944480	9.250320	9.600397	10.880741
			$R_1=0.5$			
5	2.621835	4.555788	6.387166	7.969767	9.290014	9.357343
10	3.659124	5.758777	7.607223	9.197709	9.327148	10.665252
15	4.464410	6.817319	8.736585	9.295287	10.417929	10.961861
			$R_1=1$			
5	2.862206	4.795096	6.614611	8.198569	9.303851	9.584176
10	4.001525	6.181971	8.063558	9.289916	9.726833	10.911210
15	4.883779	7.352458	9.136034	9.491892	10.796884	11.196504

Tabla 4: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Articulada- Deslizante, $h_1(0)/L=0.3$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	3.788329	5.895240	7.748740	9.383013	10.851140	12.185151
5	4.067181	6.184421	8.021301	9.649264	11.117101	12.454498
10	4.635163	6.845822	8.689087	10.321697	11.799245	13.150054
15	5.229174	7.608659	9.513530	11.180625	12.684731	14.048587
			$R_1=0.5$			
5	4.242389	6.370792	8.205554	9.834055	11.304372	12.645490
10	5.036229	7.327969	9.206567	10.861918	12.357676	13.720451
15	5.791095	8.321910	10.314745	12.037399	13.570900	14.726610
			$R_1=1$			
5	4.394338	6.539072	8.375524	10.006167	11.479659	12.824608
10	5.345519	7.715166	9.632626	11.312564	12.825476	14.185964
15	6.204163	8.861794	10.930858	12.698474	14.216906	14.873068

Tabla 5: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Empotrada- Empotrada, $h_1(0)/L=0.2$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

En la [Tabla 6](#), A-A, este rasgo se mantiene si bien la mayor flexibilidad de vinculación lo atenúa relativamente.

La [Tabla 7](#), A-D, muestra que en reposo los coeficientes de frecuencia fundamental son menores que en el caso de referencia en un (-68.5%) muy similar al caso de esbeltez 11.547. Para R_1 igual 0, 0.5 y 1, para los tres valores de η , los primeros dos coeficientes de frecuencia son inferiores a los del caso testigo. En esta Tabla también cambian las frecuencias superiores,

y a mayor velocidad de rotación los coeficientes que más aumentan nuevamente son los tres de las frecuencias superiores.

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	2.620788	5.058566	7.160346	8.985231	10.587517	12.015013
5	3.176721	5.440118	7.475010	9.273222	10.866793	12.294472
10	3.997658	6.243879	8.220440	9.990134	11.578980	13.016372
15	4.717896	7.105388	9.108533	10.890880	12.498982	13.742170
			$R_1=0.5$			
5	3.477581	5.683329	7.686872	9.472126	11.062468	12.492067
10	4.512424	6.807233	8.787065	10.559121	12.157883	13.607992
15	5.365558	7.889529	9.957703	11.778983	13.417504	13.756067
			$R_1=1$			
5	3.706972	5.894855	7.879546	9.656336	11.245235	12.677427
10	4.875570	7.239975	9.243883	11.029350	12.642011	13.756398
15	5.816007	8.463697	10.598683	12.457934	13.749738	14.141612

Tabla 6: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Articulada- Articulada, $h_1(0)/L=0.2$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	1.221544	3.879213	6.140056	8.099734	9.808661	11.319516
5	2.287985	4.373806	6.494012	8.403639	10.093967	11.600155
10	3.179452	5.277934	7.291975	9.144140	10.813900	12.321082
15	3.877906	6.164274	8.200674	10.053649	11.732999	13.260126
			$R_1=0.5$			
5	2.632058	4.655468	6.723428	8.609791	10.291823	11.797289
10	3.673739	5.848341	7.868639	9.716911	11.390752	12.910143
15	4.483120	6.922465	9.037910	10.932643	12.644052	13.748596
			$R_1=1$			
5	2.872649	4.889302	6.928411	8.799288	10.475969	11.981887
10	4.016293	6.274963	8.325046	10.185734	11.871061	13.403234
15	4.902821	7.473180	9.664390	11.602982	13.337783	13.764909

Tabla 7: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Articulada- Deslizante, $h_1(0)/L=0.2$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

Las Tablas 8, 9 y 10 se refieren a vigas de factor esbeltez más alto, 173.205, $h_1(0)/L=0.02$. Aún cuando también se observa el efecto de las condiciones de vínculo y de la velocidad η , en este tipo de vigas es aún más marcado el incremento en las tres frecuencias adimensionales superiores.

De la observación de la Tabla 8, surge que los coeficientes de las frecuencias superiores mantienen una diferencia prácticamente constante con los valores de referencia si bien aumenta un poco con el R_1 considerado: con $R_1=0$, para λ_6 el promedio es del orden del 73%, para λ_5 del 55% y para λ_4 del 40%; con $R_1=0.50$, para λ_6 el promedio es del orden del 75%,

para λ_5 del 57% y para λ_4 del 43%; y finalmente considerando $R_1=1$, para λ_6 el promedio es del orden del 77%, para λ_5 del 60% y para λ_4 del 45%.

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	4.038716	6.695212	9.359741	12.012621	14.651915	17.275075
5	4.299518	6.926650	9.544022	12.163738	14.779556	17.385520
10	4.861267	7.498372	10.037065	12.584416	15.142887	17.704212
15	5.473024	8.211128	10.715790	13.198616	15.692910	18.198068
			$R_1=0.5$			
5	4.464864	7.077624	9.669107	12.268635	14.869394	17.463983
10	5.260633	7.932299	10.442229	12.947914	15.467034	17.994659
15	6.043038	8.895414	11.417505	13.872226	16.322354	18.780717
			$R_1=1$			
5	4.611250	7.218329	9.789033	12.370662	14.957492	17.541312
10	5.574396	8.296397	10.799931	13.280035	15.770030	18.270378
15	6.468361	9.432781	11.995187	14.449397	16.878844	19.308234

Tabla 8: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Empotrada- Empotrada, $h_1(0)/L=0.02$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	2.668115	5.376766	8.047798	10.709179	13.359600	15.996524
5	3.215529	5.716276	8.288271	10.894144	13.509720	16.122930
10	4.040116	6.470271	8.902166	11.396921	13.931295	16.484651
15	4.770650	7.315243	9.697735	12.105429	14.555658	17.037257
			$R_1=0.5$			
5	3.514506	5.938104	8.454903	11.025574	13.617761	16.214579
10	4.558489	7.018356	9.401604	11.833280	14.311307	16.818460
15	5.425853	8.102345	10.507600	12.879001	15.271817	17.693200
			$R_1=1$			
5	3.744212	6.135427	8.611484	11.152127	13.723108	16.304589
10	4.925911	7.448577	9.824532	12.221793	14.660695	17.131877
15	5.883600	8.687158	11.145307	13.520142	15.889803	18.276664

Tabla 9: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Articulada- Articulada, $h_1(0)/L=0.02$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

La [Tabla 9](#), presenta coeficientes menores a los de referencia para λ_1 y λ_2 , pero al aumentar el valor de R_1 y la velocidad de rotación η , se invierte el sentido de la diferencia. Así resulta que λ_1 es casi un 10% mayor cuando $R_1=1$ y $\eta=15$. Los demás coeficientes son mayores a los de referencia. Nuevamente las mayores diferencias se dan para los coeficientes de las tres frecuencias superiores, con un comportamiento similar a la Tabla anterior (para λ_6 el promedio es del orden del 63%, para λ_5 del 45% y para λ_4 del 29%).

η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
			$R_1=0$			
0	1.226042	4.021051	6.700072	9.368414	12.026423	14.671807
5	2.296634	4.489646	6.994366	9.582333	12.194456	14.810321
10	3.191663	5.374676	7.700891	10.147511	12.659279	15.203205
15	3.892932	6.259527	8.556456	10.913403	13.331779	15.794654
			$R_1=0.5$			
5	2.640399	4.760973	7.190156	9.731543	12.314168	14.910120
10	3.685368	5.941763	8.238024	10.620110	13.069186	15.560784
15	4.497290	7.021588	9.377047	11.716090	14.082046	16.483411
			$R_1=1$			
5	2.881215	4.989299	7.369955	9.873686	12.430236	15.007810
10	4.028067	6.369660	8.677568	11.031328	13.440502	15.893245
15	4.917100	7.577969	10.006516	12.365515	14.717221	17.087305

Tabla 10: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko Articulada- Deslizante, $h_1(0)/L=0.02$; $h_d(1)/h_1(0)=0.5$

La **Tabla 10** presenta coeficientes menores a los de referencia para λ_1 en todos los casos. Así resulta que λ_1 es casi un 27% menor cuando $R_1=0$ y $\eta=15$; y un 8% menor cuando $R_1=0$ y $\eta=15$. Las mayores diferencias por encima de los valores de referencia, se dan para los coeficientes de las tres frecuencias superiores, con un comportamiento similar a la Tabla anterior (para λ_6 el promedio es del orden del 63%, para λ_5 del 45% y para λ_4 del 29%).

A continuación se muestra una viga ahusada de dos tramos, $d=2$, como la de la **Figura 1**. El área transversal de cada tramo varía de acuerdo a la expresión:

$$A_k(x) = A_k(0) a_k(x); a_k(x) = 1 + c_{1k} x + c_{2k} x^2. \quad (36)$$

Y el momento de segundo orden del área varía según la expresión:

$$I_k(x) = I_k(0) b_k(x); b_k(x) = a_k(x)^3 = (1 + c_{1k} x + c_{2k} x^2)^3. \quad (37)$$

El coeficiente de corte se adopta en función de la geometría del área transversal y del coeficiente de Poisson, según la expresión:

$$\kappa_k = \frac{10(1+\nu_k)}{12+11\nu_k}. \quad (38)$$

En la **Tabla 11** se muestran los primeros seis coeficientes de frecuencia, para $R_1=0$ calculados con el método de cuadratura diferencial, MCD y con el método de elementos finitos, MEF. Se observan pequeñas diferencias con el aumento de la velocidad de rotación a causa de la diferente formulación tomada como base de estos métodos. Las características de la viga son $\nu_1=\nu_2=0.30$; $\kappa_1=\kappa_2 \cong 0.849673$; $s_1=30$; para $k=1$: $l_1=2/3$; $\alpha_1=1$; $c_{11}=4$; $c_{21}=-2$ y para $k=d=2$: $l_2=1/3$; $\alpha_2=3$; $c_{12}=0$; $c_{22}=-29/30 \cong -0.966667$. En la formulación MCD se incluyó el término de la velocidad considerado por [Banerjee, 2001](#). Este efecto adicional de la

velocidad angular no se tomó en cuenta en la formulación del algoritmo del MEF. Es por ello que las diferencias se manifiestan al aumentar la velocidad de rotación. Con $\eta=15$, los coeficientes de frecuencia fundamental difieren en 0.58%, siendo ésta la diferencia mayor entre ambos métodos observada en la [Tabla 11](#). En el método de cuadratura diferencial n indica la cantidad de nodos del modelo y en el método de elementos finitos la cantidad de elementos utilizados

Método	n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
					$\eta=0$		
MCD	41	2.1484	6.2444	9.8516	12.3632	14.3815	14.4995
MEF	3000	2.1484	6.2444	9.8516	12.3632	14.3815	14.4995
		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
					$\eta=10$		
MCD	41	3.3077	6.7900	10.3160	12.8227	14.4060	14.9695
MEF	3000	3.3252	6.8002	10.3187	12.8244	14.4131	14.9704
		0.53%	0.15%	0.03%	0.01%	0.05%	0.01%
					$\eta=15$		
MCD	41	3.9397	7.2999	10.7805	13.2811	14.4292	15.4592
MEF	3000	3.9625	7.3196	10.7861	13.2852	14.4444	15.4612
		0.58%	0.27%	0.05%	0.03%	0.11%	0.01%

Tabla 11: Coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko ahusada de dos tramos Empotrada-Libre $R_1=0, s_1=30$.

En la [Tabla 12](#) se presentan los coeficientes de frecuencia de la viga ahusada de dos tramos cuando varía la condición de vinculación en el extremo **O** de la viga, más cercano al eje de rotación. Dicha condición se establece adoptando diversos valores de la rigidez de la vinculación elástica de traslación y manteniendo impedido el giro. El extremo **P** no tiene vínculos: borde libre. La velocidad de es $\eta=5$. La [Tabla 13](#) y la [Tabla 14](#) son similares a la 12 pero para una velocidad de rotación de $\eta=10$ y $\eta=15$, respectivamente. En las tres Tablas los valores fueron calculados por el método de cuadratura diferencial y por el método de elementos finitos. El efecto del parámetro de rigidez del resorte trasnacional sobre los parámetros de frecuencia, puede observarse en las Tablas. También es posible observar que al aumentar la velocidad de rotación también aumentan las pequeñas diferencias entre los resultados de ambos métodos.

La [Figura 3](#) muestra las formas modales y los coeficientes de frecuencia natural de tres casos de vinculación elástica en el extremo **O**, y sin vínculos en extremo **P** (extremo libre). La forma de la viga de dos tramos, responde a una doble variación parabólica de la altura ([Figura 1](#)). Las características de la viga son $\nu=0.30$; $\kappa=13/15.3 \cong 0.849673$; $s_1=30$; para $k=1$: $l_1=2/3$; $\alpha_1=1$; $c_{11}=4$; $c_{21}=-2$ y para $k=d=2$: $l_2=1/3$; $\alpha_2=3$; $c_{12}=0$; $c_{22}=-29/30$. La única diferencia con el modelo utilizado para la [Tabla 12](#), es que en los tres casos se adoptó $R_1=0$.

6 CONCLUSIONES

Se puede concluir del análisis de los casos presentados y de las comparaciones entre ellos que:

- como cabe esperar, el aumento de la velocidad de rotación siempre incrementa la rigidez flexional de la viga, con el consiguiente aumento de las frecuencias naturales;
- de igual manera, el considerar la dimensión del eje de rotación y al aumentarla, se produce

un incremento de las frecuencias cuando $\eta > 0$;

-por el contrario, una mayor flexibilidad en los vínculos produce disminución de las frecuencias;

-comparados con el caso de referencia de la viga uniforme E-E se observa que el factor de esbeltez de la viga condiciona su comportamiento dinámico. En vigas más cortas $h_1(0)/L=0.3$, los efectos antes mencionados se producen en forma más pronunciada en los coeficientes de la frecuencia fundamental λ_1 y λ_2 y λ_3 , permaneciendo con pequeñas variaciones los de las frecuencias superiores. En vigas con mayor esbeltez los cambios también aparecen en los coeficientes superiores y superan a los efectos que se produce en las tres primeras frecuencias. En particular la forma de variación lineal de la sección transversal adoptada para las vigas de las Tablas 2 a 10, disminuye los coeficientes de frecuencia respecto de la viga de sección uniforme.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS) así como al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) bajo cuyo auspicio se desarrolló este trabajo.

K_{w1}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	método
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	4.17340	8.51281	11.45491	13.76034	14.41187	MCD
0.01	1.40430	4.20463	8.51957	11.45749	13.76183	14.41187	
0.1	2.32041	4.46771	8.57936	11.48037	13.77512	14.41201	
0.2	2.57980	4.71331	8.64342	11.50552	13.78985	14.41211	
0.5	2.81955	5.21566	8.81928	11.57908	13.83340	14.41253	
1	2.92105	5.65617	9.05827	11.69329	13.90324	14.41326	
10	3.02263	6.48433	9.95866	12.41737	14.38767	14.52921	
1000	3.03436	6.61831	10.16912	12.67659	14.40333	14.81557	
100000	3.03448	6.61969	10.17133	12.67935	14.40340	14.81884	
$\rightarrow \infty$	3.03448	6.61971	10.17133	12.67939	14.40340	14.81887	
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	4.18275	8.51436	11.45589	13.76143	14.41485	MEF
0.01	1.40439	4.21379	8.52112	11.45845	13.76291	14.41486	
0.1	2.32168	4.47531	8.58087	11.48132	13.77623	14.41497	
0.2	2.58214	4.71968	8.64488	11.50649	13.79095	14.41509	
0.5	2.82347	5.22029	8.82063	11.58004	13.83450	14.41549	
1	2.92585	5.65990	9.05950	11.69421	13.90434	14.41623	
10	3.02843	6.48725	9.95975	12.41840	14.39053	14.53039	
1000	3.04028	6.62117	10.17023	12.67768	14.40639	14.81664	
100000	3.04040	6.62255	10.17241	12.68045	14.40644	14.81993	
$\rightarrow \infty$	3.04040	6.62256	10.17243	12.68047	14.40644	14.81997	

Tabla 12: Efecto del parámetro K_{w1} , en los coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko ahusada de dos tramos, con $K_{w1} \rightarrow \infty$ $R_1=1$. $s_1=30$ y libre en el extremo P. $\eta=5$ (MCD y MEF)

K_{W1}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	método
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	5.48441	9.34488	12.25076	14.31971	14.66356	MCD
0.01	1.41286	5.49517	9.34891	12.25243	14.32009	14.66421	
0.1	2.45113	5.58951	9.38472	12.26756	14.32372	14.67011	
0.2	2.84018	5.68857	9.42357	12.28422	14.32756	14.67678	
0.5	3.33486	5.94565	9.53387	12.33317	14.33824	14.69731	
0.7	3.48977	6.08567	9.60204	12.36483	14.34465	14.71139	
1	3.62972	6.25745	9.69632	12.41076	14.35333	14.73292	
10	4.01333	7.19882	10.58608	13.05278	14.42560	15.19530	
1000	4.06366	7.40964	10.89358	13.39029	14.44836	15.57607	
100000	4.06416	7.41190	10.89697	13.39418	14.44860	15.58085	
$\rightarrow \infty$	4.06417	7.41191	10.89697	13.39418	14.44863	15.58085	
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	5.50223	9.34939	12.25287	14.32699	14.66631	MEF
0.01	1.41289	5.51290	9.35341	12.25456	14.32740	14.66696	
0.1	2.45167	5.60651	9.38914	12.26968	14.33107	14.67279	
0.2	2.84137	5.70478	9.42791	12.28634	14.33499	14.67938	
0.5	3.33786	5.95995	9.53800	12.33528	14.34585	14.69972	
0.7	3.49371	6.09903	9.60605	12.36695	14.35236	14.71369	
1	3.63471	6.26979	9.70017	12.41286	14.36115	14.73508	
10	4.02247	7.20779	10.58896	13.05505	14.43374	15.19685	
1000	4.07348	7.41821	10.89631	13.39286	14.45621	15.57775	
100000	4.07400	7.42045	10.89966	13.39671	14.45646	15.58246	
$\rightarrow \infty$	4.07400	7.42048	10.89969	13.39675	14.45646	15.58251	

Tabla 13: Efecto del parámetro K_{W1} , en los coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko ahusada de dos tramos, con $K_{\psi 1} \rightarrow \infty$ $R_1=1$. $s_1=30$ y libre en el extremo P. $\eta=10$. (MCD y MEF).

K_{W1}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	método
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	6.53419	10.23103	13.15431	14.38527	15.55246	MCD
0.01	1.41496	6.53943	10.23347	13.15538	14.38541	15.55307	
0.1	2.48665	6.58601	10.25563	13.16511	14.38652	15.55863	
0.2	2.91954	6.63629	10.27983	13.17585	14.38777	15.56480	
0.5	3.54054	6.77703	10.35002	13.20750	14.39146	15.58320	
0.7	3.76611	6.86217	10.39471	13.22811	14.39392	15.59532	
1	3.99169	6.97725	10.45863	13.25824	14.39760	15.61330	
2	4.35928	7.26927	10.64481	13.35163	14.40965	15.67112	
10	4.78570	7.94068	11.28946	13.76267	14.48803	15.99219	
10000	4.91500	8.26702	11.73853	14.08375	14.65773	16.42495	
$\rightarrow \infty$	4.91513	8.26740	11.73904	14.08403	14.65804	16.42556	
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	6.56008	10.23922	13.15819	14.40254	15.55496	MEF
0.01	1.41498	6.56529	10.24169	13.15928	14.40266	15.55558	
0.1	2.48691	6.61150	10.26373	13.16901	14.40377	15.56116	
0.2	2.92014	6.66137	10.28785	13.17975	14.40500	15.56733	
0.5	3.54228	6.80095	10.35780	13.21141	14.40866	15.58571	
0.7	3.76859	6.88538	10.40237	13.23204	14.41109	15.59784	
1	3.99519	6.99951	10.46606	13.26223	14.41472	15.61582	
2	4.36529	7.28936	10.65172	13.35575	14.42657	15.67365	
10	4.79653	7.95729	11.29502	13.76860	14.50295	15.99510	
10000	4.92776	8.28254	11.74344	14.09493	14.66720	16.42930	
$\rightarrow \infty$	4.92790	8.28291	11.74397	14.09525	14.66750	16.42989	

Tabla 14: Efecto del parámetro K_{W1} , en los coeficientes de frecuencia natural de una viga Timoshenko ahusada de dos tramos, con $K_{\psi 1} \rightarrow \infty$ $R_1=1$. $s_1=30$ y libre en el extremo P. $\eta=15$ (MCD y MEF)

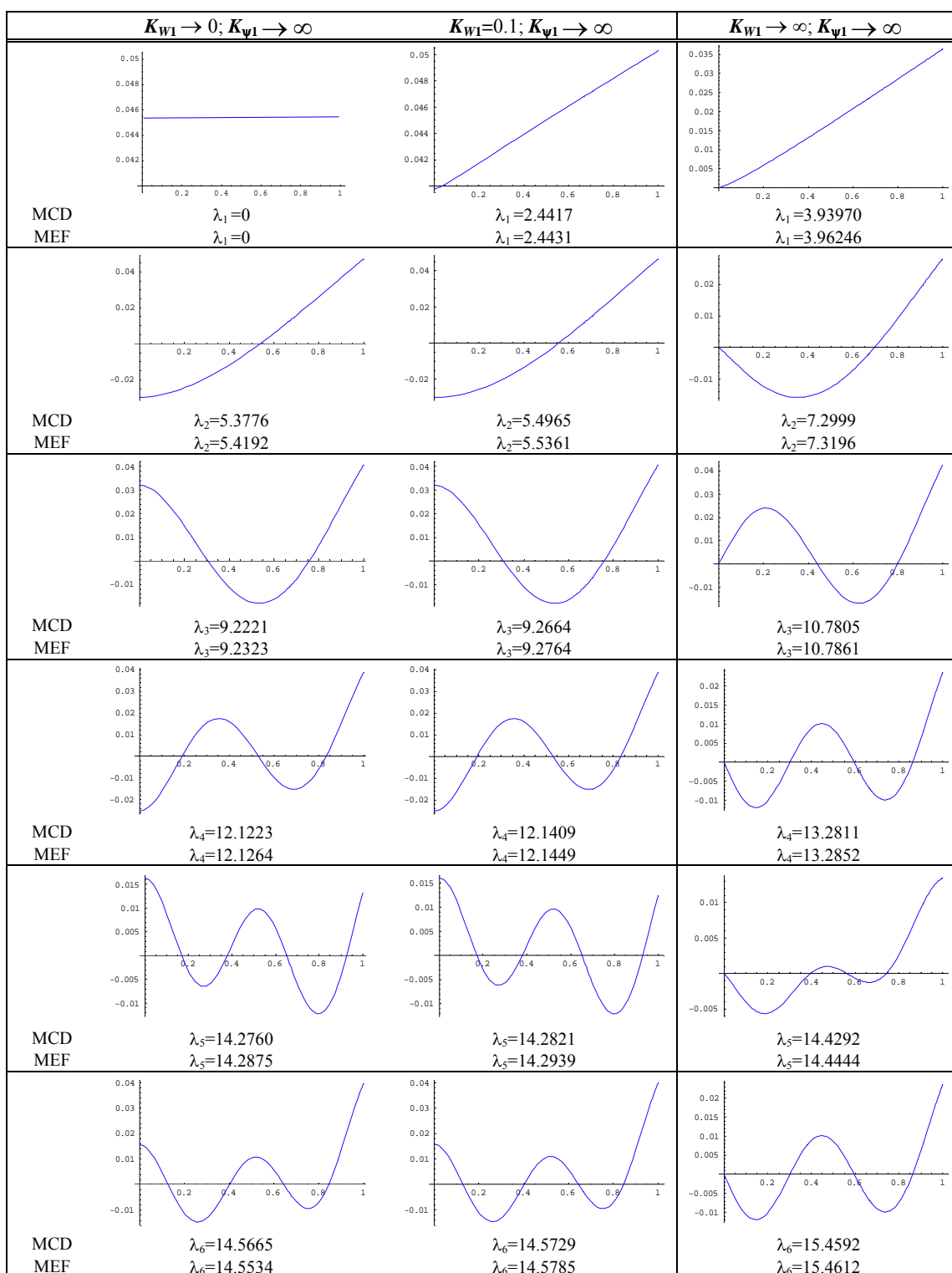


Figura 3: Formas modales de la viga Timoshenko ahusada de dos tramos, para $\eta=15$; $R_1=0$; $s_1=30$; E-L

REFERENCIAS

Banerjee, J.R., Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 233: 857-875. 2000.

- Banerjee J.R. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 247:97-115. 2001.
- Banerjee, J.R., H. Su, Jackson, D.R., Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 298: 1034-1054. 2006.
- Bambill, D.V., Felix, D.H., Rossi, R.E. Vibration analysis of rotating Timoshenko beams by means of the differential quadrature method. *Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 34, (2) 231-245, 2010.
- Bambill, D.V., Rossit, C.A., Rossi, R.E., Felix, D.H., Ratazzi, A.R. Free vibration analysis of non uniform rotating Timoshenko beams and elastically clamped boundary conditions. Sometido a publicación. 2012.
- Bellman R., Casti. J. Differential quadrature and long-term integration. *J. Math. Anal. App.*, 34, 235-238. 1971.
- Bert C.W., Malik. M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review* 49:1-28. 1996.
- Burden R.L., Faires J.D., *Numerical Analysis (7th Edition)*. Brooks/Cole, 2001.
- Felix, D.H., Bambill, D.V., Rossi, R.E, Análisis de vibración libre de una viga Timoshenko escalonada, centrífugamente rigidizada, mediante el método de cuadratura diferencial, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 25(2): 111-132, 2009a.
- Felix, D.H., Bambill, D.V, Rossi, R.E., Vibraciones transversales y formas modales de vigas timoshenko rotantes con sección variable, *Mecánica Computacional Vol XXX:1957-1973*. 2011.
- Felix, D.H., Bambill, D.V., Rossi, R.E, Samanta J. E. y Ratazzi A.R., Determinación de frecuencias en vigas Timoshenko rotante de sección transversal variable en forma continua por tramos. *Mecánica Computacional Vol XXIX: 809-827*, 2010.
- Felix, D.H., Rossi, R.E, Bambill, D.V., Vibración transversal de vigas Timoshenko rotantes de sección transversal variable por el método de cuadratura diferencial, *Mecánica Computacional Vol XXVIII: 467-484*, 2009b.
- Karami, G. Malekzadeh P., Shahpari S.A., A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures* 25:1169-1178. 2003.
- Lin S.C., Hsiao K.M. Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration* 240:303-322. 2001.
- Petyt M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1990.
- Przemieniecki J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1968.
- Rossi R.E., Laura P.A.A., Numerical experiments on vibrating linearly tapered Timoshenko beam. *J. Sound Vib.* 145: 241-245: 1993.
- Rossi R.E. *Introducción al análisis de Vibraciones con el Método de Elementos Finitos*. Editoria. EdiUNS, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. 238 pp. ISBN 978-987-1171-71-2. 2007.
- Sari, M. S., Butcher, E. A. Free vibration analysis of non-rotating and rotating Timoshenko beams with damaged boundaries using the Chebyshev collocation method. *International Journal of Mechanical Sciences* 60 (1): 1-11. 2012.
- Shu C. y Chen W., On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2): 239-257, 1999.