

ELEMENTO FINITO DO TIPO ZIENKIEWICZ EM FLUIDODINÂMICA INCOMPRESSÍVEL: AVALIAÇÃO EM ESCOAMENTO TRANSITÓRIO ATRAVÉS DE OBSTÁCULO RETANGULAR

Diego Samuel Rodrigues^a, Vitoriano Ruas^{b‡} and Gustavo Carlos Buscaglia^a

^aLaboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica, Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos, SP, Brazil, 13566-590, diegosr@icmc.usp.br, gustavo.buscaglia@icmc.usp.br, <http://www.icmc.usp.br>

^bUPMC, Université Paris 6, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert/CNRS, Couloir 55-65, 5^e étage, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex, France, vitoriano.ruas@upmc.fr

[‡]Currently visiting professor in ^a.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Equações de Navier-Stokes, Número de Strouhal, escoamento em torno de corpos rombudos.

Resumo. O elemento finito de Zienkiewicz tem sido frequentemente utilizado para resolver problemas de mecânica dos sólidos. Seu emprego em fluidodinâmica computacional, contudo, permanece apenas marginalmente explorado. Assim sendo, analisamos aqui um elemento misto para escoamentos incompressíveis proposto recentemente por G. C. Buscaglia e V. Ruas que, até o presente, somente fora utilizado em problemas estacionários, lineares e sem inércia. A fim de avaliar o desempenho numérico deste elemento em problemas de caráter mais geral, reportamos aqui resultados relativos a um interessante teste numérico: escoamento externo através de um obstáculo retangular. Este é um teste adequado pois, neste, quantidades do escoamento (como o padrão de geração de vórtices) são bastante sensíveis a alterações da corda do obstáculo retangular. Empregamos o método de Crank-Nicolson para discretização temporal e, espacialmente, a formulação de Galerkin para então completar a construção do algoritmo final. Extensivas simulações numéricas bidimensionais são aqui reportadas, as quais reproduzem a bem conhecida duplicação de período que ocorre para certos valores de comprimento de corda. O elemento testado comportou-se de modo robusto, mostrando-se um atrativa alternativa por seu custo reduzido em termos de menor número de incógnitas do que o elemento de Taylor-Hood. Os resultados aqui apresentados incentivam o uso do referido elemento no emprego de soluções numéricas das equações de Navier-Stokes.

1 INTRODUÇÃO

Além de sua frequente utilização em mecânica dos sólidos (Zienkiewicz and Taylor, 2000), muito recentemente o elemento finito de Zienkiewicz também tem se mostrado apto a resolver problemas de natureza fluidodinâmica (Buscaglia and Ruas, 2013; Ruas, 2012). Nessa perspectiva, discutimos aqui seu emprego na solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis. O elemento proposto interpola a velocidade com um elemento simplicial (triângulo em 2D) cujas interpolantes locais são polinômios de grau três. Como proposta, os graus de liberdade desse elemento são as componentes da velocidade e suas derivadas nos vértices da triangulação; o campo de pressão é interpolado com o espaço usual P_1 conforme. Maiores detalhes a esse respeito serão fornecidos oportunamente, ao final da seção 2.

Como problema-teste para o elemento, escolhemos o escoamento laminar de um fluido newtoniano através de um cilindro¹ retangular. A justificativa para tal escolha é que a solução de tal problema possui características físicas peculiares interessantes (entre outras, a descontinuidade na frequência de geração de vórtices com respeito ao aumento da corda do obstáculo retangular) que realmente põem a obtenção da solução numérica à prova. Iniciamos nosso relato recapitulando interessantes características físicas do problema-teste. Posteriormente, detalhamos a formulação variacional para solução numérica das equações Navier-Stokes e então damos um breve descritivo do elemento proposto.

Em se tratando de escoamentos através de corpos rombudos, a quantificação da geração de vórtices tem sido um dos principais focos de interesse. Em estudos dessa natureza, os cilindros circulares têm sido os mais investigados, embora a geometria retangular seja igualmente relevante do ponto de vista de aplicações. Como fenômeno físico, porém, o escoamento no entorno de um obstáculo retangular pode ser até mais complexo. Por exemplo, com respeito à frequência de geração de vórtices: em regime laminar, o aumento da corda do obstáculo retangular pode, por um lado, eliminá-la completamente (o escoamento passa a ter um estado estacionário) ou, por outro, duplicá-la (o escoamento transiciona *descontinuamente*). Embora tal descontinuidade seja bastante conhecida e estudado através de simulações numéricas (Berrone et al., 2011; Islam et al., 2012; Liu and Kopp, 2011) e experimentos (Okajima, 1982), não deixa de ser um fenômeno físico memorável no qual se constata a grande complexidade que as equações de Navier-Stokes são capazes de capturar. A fim de descrevê-lo em detalhes, vamos agora definir algumas quantidades físicas.

Seja um cilindro de seção retangular com corda c , altura a e razão de aspecto c/a . Definimos o número de Reynolds como $Re = \rho U_\infty a / \mu$, em que ρ e μ são respectivamente a massa específica e viscosidade molecular do fluido, sendo a altura a perpendicular a velocidade de corrente livre U_∞ . Nesse escoamento externo, se a viscosidade predomina ($Re \ll 1$), as linhas de corrente são simétricas à montante e à jusante pois os efeitos inerciais não são significativos. A medida que Re é ligeiramente aumentado tal simetria desaparece e surgem dois vórtices à jusante do obstáculo, permanecendo ainda estacionário o escoamento e sem despreendimento de vórtices. Já para $Re = 100$, o estado estacionário é atingido se $c/a = 5.0$ (Berrone et al., 2011), enquanto que para $c/a = 4.0$ o escoamento é sempre transitório (Islam et al., 2012). Em escoamentos não estacionários, ocorre geração alternada de vórtices entre as regiões situadas acima e abaixo do cilindro retangular, cuja quantificação adimensional se dá pelo número de Strouhal: $St_c = f_v c / U_\infty$, em que f_v é a frequência dimensional de geração dos vórtices. Para $100 < Re < 300$, St_c sofre mudanças suaves com o aumento da corda c do cilindro; se $Re \geq 300$

¹Em hidráulica, a palavra cilindro refere-se à um obstáculo qualquer, isto é, um corpo plano de qualquer seção transversal que exerce força sobre o fluido no qual se encontra imerso – e não apenas àqueles cuja seção é *circular*.

(mas ainda a escoamento laminar), St_c se altera de modo descontínuo (conferir Nakamura et al. (1996) para maiores detalhes). Para $Re = 400$, por exemplo, St_c praticamente dobra de valor para c/a entre 5.5 e 6.0 (Liu and Kopp, 2011). Estas particularidades configuram tal problema como um teste para métodos numérico-computacionais.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E ABORDAGEM NUMÉRICA

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) um domínio aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, em que $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$. Neste, supondo-se escoamento incompressível, a dinâmica de um fluido newtoniano é regida pelas equações de Navier-Stokes:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \nabla \cdot (2\mu \nabla^S \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{b} \text{ em } \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\partial\Omega_1} \text{ em } \partial\Omega_1, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \check{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_2, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ em } \Omega, \quad t = 0 \quad (5)$$

em que $\nabla^S \mathbf{u} \doteq \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$; $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu \nabla^S \mathbf{u}$; \mathbf{b} é uma força volumétrica (suposta conhecida), $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ é a restrição de incompressibilidade; $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\partial\Omega_1}$ é uma condição de contorno Dirichlet em $\partial\Omega_1$; $\boldsymbol{\sigma} \cdot \check{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ é uma condição de contorno Neumann homogênea em $\partial\Omega_2$; e \mathbf{u}_0 é a condição inicial para o campo de velocidade. Nos casos bidimensionais aqui apresentados nos referiremos as componentes do campo de velocidade das direções x e y por u e v , respectivamente.

2.1 Formulação variacional

Na forma fraca, definindo

$$V \doteq \{\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^d \mid \mathbf{w} = \mathbf{u}_{\partial\Omega_1} \text{ em } \partial\Omega_1\}, \quad (6)$$

$$\mathring{V} \doteq \{\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^d \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_1\}, \quad (7)$$

$$Q \doteq L^2(\Omega), \quad (8)$$

o problema a ser resolvido é

Para $t > 0$, encontrar $(\mathbf{u}(t), p(t)) \in V \times Q$ tal que

$$\int_{\Omega} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \nabla^S \mathbf{u} : \nabla^S \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad (10)$$

$\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathring{V} \times Q$.

Para discretização temporal utilizamos o método θ . A discretização espacial é baseada numa malha de elementos finitos \mathcal{T}_h , a partir da qual são definidos um espaço discreto de velocidade $V_h \subset V$ (e seu homogêneo $\mathring{V}_h \subset \mathring{V}$) e um espaço discreto de pressão $Q_h \subset Q$. A formulação variacional discreta é

Encontrar $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u &\doteq \int_{\Omega} \mathcal{G}_u \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \nabla^S \mathbf{u}_h^{n+\theta} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h^{n+\theta} \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_u}{\rho} \int_K (\mathcal{G}_u - \nabla \cdot (2\mu \nabla^S \mathbf{u}_h^{n+\theta}) + \nabla p_h^{n+\theta}) \cdot (\rho(\mathbf{u}_h^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h) \, d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &\doteq \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, d\Omega \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_p}{\rho} \int_K (\mathcal{G}_u - \nabla \cdot (2\mu \nabla^S \mathbf{u}_h^{n+\theta}) + \nabla p_h^{n+\theta}) \cdot \nabla q_h \, d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \dot{V}_h \times Q_h$, em que $\mathbf{u}_h^{n+\theta} = \theta \mathbf{u}_h^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{u}_h^n$, $p_h^{n+\theta} = \theta p_h^{n+1} + (1 - \theta) p_h^n$, e \mathcal{G}_u é dado por

$$\mathcal{G}_u = \rho \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}_h^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta} - \mathbf{b}^{n+\theta} \right). \quad (13)$$

Notar que deixamos a possibilidade de τ_u e τ_p serem distintos, isto é, pode-se colocar pesos diferentes às estabilizações de velocidade e de pressão. Salvo quando mencionado, será tomado

$$\tau_u = \tau_p = c_\tau \left(\frac{4\mu}{\rho h^2} + \frac{2\|\mathbf{u}_h^n\|}{h} \right)^{-1}, \quad (14)$$

com $c_\tau = 0.1$ em geral. Resultados para a formulação estabilizada serão aqui discutidos apenas para o elemento P_1/P_1 . Para os elementos Z_2/P_1 e P_2/P_1 , utilizamos a formulação de Galerkin (que corresponde a tomar $c_\tau = 0$).

Resolvemos simultaneamente a velocidade e a pressão através do método de Newton-Raphson. No caso de rodar o código na formulação de Galerkin ($\tau_u = \tau_p = 0$), para evitar pivôs nulos na fatoração da matriz jacobiana \mathbf{J} , adicionamos no bloco pressão-pressão uma pequena matriz de difusão, isto é

$$\mathbf{J}^{jk} = \mathbf{M}^{jk} = \frac{\partial \mathcal{R}_p^j}{\partial P^k} + \int \epsilon \frac{\bar{h}^2}{\mu} \nabla M^j \cdot \nabla M^k, \quad (15)$$

em que P^k denota a incógnita de pressão, M é a função de base de pressão, \bar{h} é a aresta média dos triângulos da malha e ϵ é uma constante ($\epsilon = 10^{-5}$ nos dois problemas-teste aqui apresentados). Assim sendo, como o resíduo do sistema de equações não foi alterado, uma vez alcançada a convergência, a solução satisfaz o sistema dado pela equações (11) e (12). Essa estratégia para evitar pivôs nulos foi tomada da “penalização iterativa” proposta por Codina (1993).

2.2 Formulação proposta

Iniciamos com a descrição do elemento finito de Hermite conhecido como triângulo de Zienkiewicz (Zienkiewicz and Taylor, 2000), o qual foi utilizado para aproximar o campo de velocidade localmente, isto é, em cada triângulo K de uma malha em \mathbb{R}^d , com $d = 2$. Denotemos por S_i os vértices de K , $i = 1, \dots, d + 1$, e G o baricentro de K . Seja ainda λ_i a coordenada baricêntrica de K associada a S_i de modo que

$$h_{ij} \doteq d(S_i, S_j) \quad (\text{distância de } S_i \text{ a } S_j). \quad (16)$$

A versão aqui utilizada, que denotaremos aqui por Z_2 , interpola com polinômios cúbicos incompletos, mas contendo o espaço P_2 de polinômios quadráticos. Os nove graus de liberdade do Z_2 estão postos nos nós; são estes os valores nodais da função incógnita e de suas primeiras derivadas ao longo das arestas do triângulo. Por facilidade de descrição do elemento, a derivada ao longo de uma aresta em um dado vértice é sempre avaliada na direção do outro vértice que pertence à aresta considerada. Denotemos a função bolha de K por $\varphi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ e $P_m(K)$ sendo o espaço de polinômios de grau menor do que ou igual a m definidas em K . O espaço Z_2 é, localmente no triângulo K , o espaço gerado pelas nove funções linearmente independentes $[\{\zeta_i\}_{i=1}^3 \cup \{\zeta_{ij}\}_{i \neq j=1}^3]$, em que $\zeta_i = \lambda_i^3 - \varphi$ e $\zeta_{ij} = \lambda_i^2\lambda_j - \varphi/2$. As nove funções de base canônica que correspondem aos graus de liberdade ora especificados são:

- Para o valor da função em S_i : $\varphi_i \doteq 3\lambda_i^2 - 2\zeta_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$;
- Para as primeiras derivadas em S_i na direção $\overrightarrow{S_i S_j}/h_{ij}$: $\varphi_{ij} \doteq h_{ij}\zeta_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

As propriedades de aproximação do elemento bidimensional (e da sua variante tridimensional) são descritas por Ciarlet (1978), Buscaglia and Ruas (2013) e Ruas (2012).

É importante ressaltar que as expressões acima relacionadas aos graus de liberdade de derivada nos vértices não são convenientes do ponto de vista computacional. Isto assim ocorre devido ao fato de que em geral as derivadas em um dado vértice não possuem a mesma direção para todos os elementos que compartilham o dado vértice em questão. Todavia, podemos combinar linearmente as correspondentes funções de base em cada d -simplex com o intuito de expressá-las nas direções dos eixos cartesianos, isto é, na direção dos vetores unitários \mathbf{e}^m , $m = 1, \dots, d$, de modo a formar uma base ortonormal de \mathbb{R}^d . Deste modo, a montagem das matrizes elementares levará a uma matriz global correta (relacionada as derivadas nas direções \mathbf{e}^d), em todos os nós da malha.

Para i, j distintos e (x_i^1, \dots, x_i^d) sendo as coordenadas cartesianas de S_i , $i \in 1, \dots, d+1$,

$$\varphi_i^m = \sum_{j=1, j \neq i}^{d+1} \varphi_{ij}(x_j^m - x_i^m). \quad (17)$$

Mais concretamente, a equação (17) se refere as funções de base φ_i^m pertencentes a Z_2 tais que $[\nabla \varphi_i^m \cdot \mathbf{e}^n](S_j) = \delta_{ij}\delta_{mn}$ e $\varphi_i^m(S_j) = 0$ para $i, j \in \{1, \dots, d+1\}$ e $m, n \in \{1, \dots, d\}$. Naturalmente, as funções de base de valor φ_i não precisam de modificação, já que em todos os vértices, o gradiente de tais funções se anula por construção. Assim, a base $\{\Phi_1, \dots, \Phi_9\}$ do elemento Z_2 , ordenada de maneira a colocar juntos os graus de liberdade de um mesmo vértice é

$$\{\Phi_1, \dots, \Phi_9\} = \{\varphi_1, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_2, \varphi_2^1, \varphi_2^2, \varphi_3, \varphi_3^1, \varphi_3^2\}. \quad (18)$$

Lembremos que Z_2 é o espaço definido pelo elemento de Zienkiewicz para cada componente da velocidade, e P_1 conforme é o espaço para a pressão; essa escolha de V_h e Q_h caracteriza o elemento Z_2/P_1 . Neste, o número de incógnitas do elemento é de 18 para velocidade (valor e derivadas parciais segundo x e y de cada componente da velocidade, em cada vértice do elemento) e de 3 para pressão (valor em cada vértice).

O elemento Z_2/P_1 tem a mesma ordem de interpolação do bem conhecido elemento de Taylor-Hood P_2/P_1 , caracterizado como um elemento de segunda ordem na norma natural (i.e.; na norma $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)}$). As vantagens com respeito ao P_2/P_1 são a menor quantidade de incógnitas (o Z_2 tem assintoticamente 3/4 dos graus de liberdade do P_2 para velocidade) e a utilização da mesma malha para velocidade e pressão (mas utilizando-se interpolações diferentes para cada campo).

Estimativas de interpolação para velocidade e pressão em problemas regulares são, já que o espaço Z_2 e P_1 contém, respectivamente, os polinômios completos de grau menor do que ou igual a 2 e 1,

$$\min_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{w}_h\|_{H^p(K)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C h^{3-p} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)} \quad p \in \{0, 1, 2\}, \quad (19)$$

$$\min_{q_h \in Q_h} \|p(t) - q_h\|_{H^q(\Omega)} \leq C h^{2-q} \|p(t)\|_{H^2(\Omega)} \quad q \in \{0, 1\}, \quad (20)$$

em que C é uma constante independente de h .

Na norma natural de $V \times Q$, portanto, o elemento terá convergência ótima se

$$\|(\mathbf{u}(t_n), p(t_n)) - (\mathbf{u}_h^n, p_h^n)\|_{V \times Q} \leq C h^2, \quad (21)$$

em que C é uma constante que independe de h . Essa convergência pode ser provada rigorosamente para a formulação estabilizada ($c_\tau > 0$) para o problema de Stokes (Buscaglia and Ruas, 2013; Douglas and Wang, 1989; Hughes et al., 1986) e também, por extensão, para números de Reynolds moderados (Franca and Hughes, 1993; Franca and Frey, 1992).

O elemento P_2/P_1 de Taylor-Hood satisfaz a estimativa ótima de erro na formulação de Galerkin ($c_\tau = 0$), o que evita o cálculo de termos de estabilização. Isto se deve ao elemento P_2/P_1 satisfazer a desigualdade

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega}{\|\mathbf{w}_h\|_V \|p_h\|_Q} \geq \beta > 0, \quad (22)$$

conhecida como condição inf-sup ou de div-estabilidade, em que β é uma constante que independe da malha adotada. Essa condição não é satisfeita por elementos da mesma ordem de interpolação para velocidade e pressão, e de fato os únicos elementos simpliciais de segunda ordem que a satisfazem são o P_2/P_1 e o elemento P_2^+/P_1^{disc} de Crouzeix-Raviart.

Buscaglia & Ruas (2013) provaram recentemente que o elemento Z_2/P_1 satisfaz a condição (22) para malhas do tipo *criss-cross* (a qual caracteriza-se por quadriláteros divididos, pelas diagonais, em quatro triângulos cada um). A despeito da necessidade dessa hipótese, apresentamos evidência numérica de que a desigualdade (22) é satisfeita em malhas arbitrárias e com efeitos não-lineares significativos ($Re \approx 400$).

Uma vantagem adicional do elemento Z_2/P_1 é a unicidade da definição de $\nabla \mathbf{u}_h$ nos vértices da triangulação, já que neles a interpolada Z_2 é de classe C^1 . Isto oferece a possibilidade de obter a vorticidade $\omega_h \doteq \partial_x v_h - \partial_y u_h$ nos vértices sem pós-processar os resultados. A interpolada P_1 de ω_h (que denotaremos por $\mathcal{I}_1 \omega_h$), por outro lado, surge de interpolar linearmente os valores nodais de ω_h em cada triângulo. Esta interpolada permite representar facilmente a vorticidade na malha e de fato satisfaz (como também veremos nos exemplos numéricos)

$$\|\omega - \mathcal{I}_1 \omega_h\| \leq C h^2, \quad (23)$$

em que C é uma constante independente de h . Tal desigualdade indica que a vorticidade $\mathcal{I}_1 \omega_h$ possui a mesma ordem de convergência que a vorticidade ω_h (que é quadrática por partes). Nesse cenário, todas as quantidades utilizam os mesmos nós, com a praticidade de uma única malha ser utilizada para aproximar os campos de velocidade e pressão.

3 VALIDAÇÃO: ESCOAMENTO DE KOVASZNY

Primeiramente vamos considerar um caso teste para o qual se conhece a solução analítica: o escoamento de Kovasznay (Kovasznay, 1948). Trata-se de uma solução periódica bidimensional das Equações de Navier-Stokes no caso incompressível e estacionário, dada por $u(x, y) = 1 - \exp(\lambda x) \cos(2\pi y)$, $v(x, y) = (\lambda/2\pi) \exp(\lambda x) \sin(2\pi y)$, $p(x, y) = p_0 - (\rho/2) \exp(2\lambda x)$, em que $\lambda = (\rho/2\mu) - [(\rho/2\mu)^2 + 4\pi^2]^{\frac{1}{2}} < 0$ e p_0 é uma constante arbitrária, a qual escolhemos ser nula.

3.1 Condições de contorno e domínio computacional

Resolvemos o escoamento de Kovasznay, no domínio computacional $\Omega = [0, 30] \times [0, \frac{1}{2}]$, impondo, nas bordas esquerda, superior e inferior $u(x, y)$ e $v(x, y)$ dados pela solução analítica supracitada e, na borda direita, a condição de contorno natural $\boldsymbol{\sigma} \cdot \check{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$.

As quatro malhas utilizadas no escoamento de Kovasznay são descritas na Tabela 1, na qual se pode visualizar claramente que o elemento Z_2/P_1 apresenta menor número de incógnitas em relação ao elemento P_2/P_1 ; tal proporção é de 3 para 4 (valor assintótico).

Malha	# Elem.	# Vértices	\bar{h}^{\ddagger}	# Incóg. P_2/P_1	# Incóg. Z_2/P_1
K_1	1010	612	0.2033	5078	4284
K_2	4040	2233	0.1016	19243	15631
K_3	16160	8505	0.0508	74843	59535
K_4	64640	33169	0.0254	295123	232182

Tabela 1: Malhas de elementos triangulares construídas no *software* livre *Gmsh* (Geuzaine and Remacle, 2009); escoamento de Kovasznay. \ddagger Comprimento médio das arestas.

3.2 Resultados

Em posse da solução analítica, verificamos a ordem de convergência da solução numérica. Os resultados para o espaço de aproximação velocidade-pressão Z_2/P_1 são exibidos na Figura 1, em que, para comparação, apresentamos também o elemento P_2/P_1 de Taylor-Hood. Como mostramos nas Figuras 1 e 2, o espaço de aproximação Z_2/P_1 sem estabilização fornece as mesmas ordens de convergência em $L^2(\Omega)$ para a velocidade (ordem $\mathcal{O}(h^3)$) e a pressão (ordem $\mathcal{O}(h^2)$) do que elemento de Taylor-Hood. Os erros dos gradientes de velocidade e de pressão são de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ e $\mathcal{O}(h)$, respectivamente.

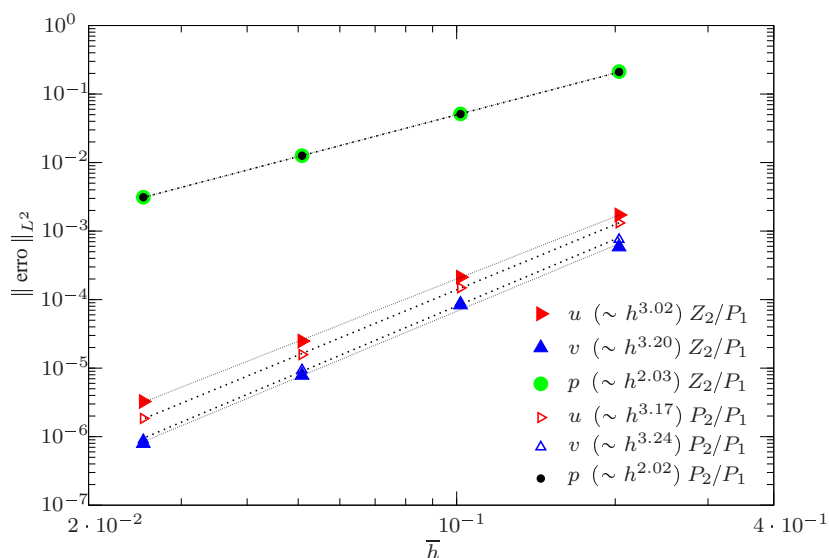


Figura 1: Erro em norma L^2 em função da aresta média elemental \bar{h} , com as respectivas ordens de convergência; elementos Z_2/P_1 e P_2/P_1 (ambos na formulação de Galerkin), escoamento de Kovasznay a $\rho = 40$ e $\mu = 1$.

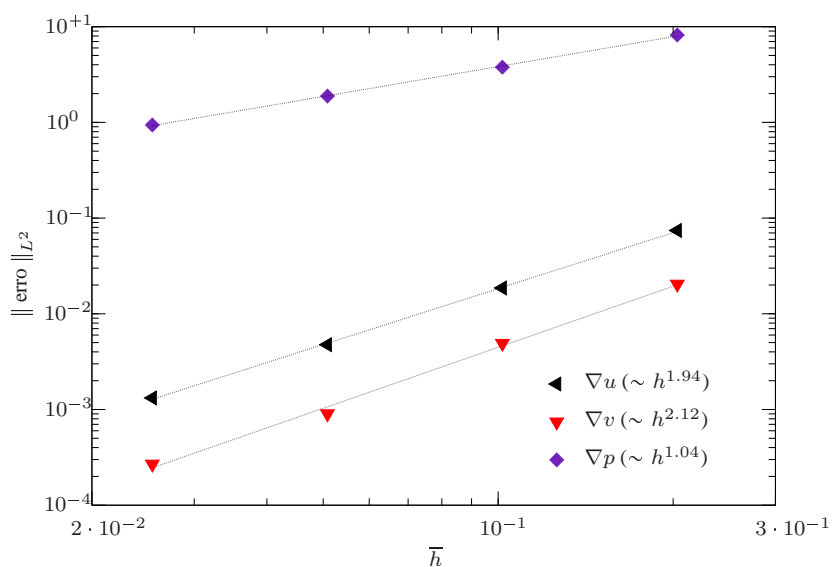


Figura 2: Erro em norma L^2 dos gradientes de u , v e p em função da aresta média elemental \bar{h} , elemento Z_2/P_1 (Galerkin), escoamento de Kovasznay a $\rho = 40$ e $\mu = 1$.

Na Figura 3 exibimos o erro da vorticidade numérica ω_h e de sua interpolada P_1 , $\mathcal{I}_1\omega_h$. Ambas convergem em $L^2(\Omega)$ com erro de ordem $\mathcal{O}(h^2)$, justificando a simples interpolação linear da vorticidade a partir dos valores nodais de $\nabla\mathbf{u}_h$.

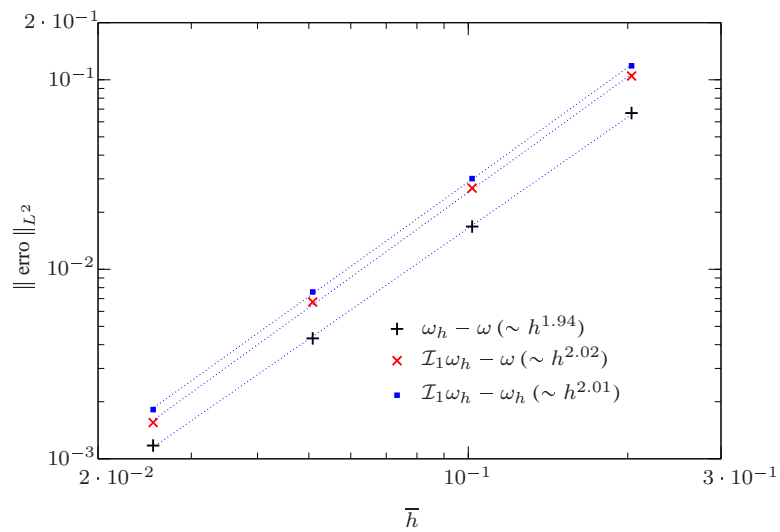


Figura 3: Erro em norma L^2 da vorticidade em função da aresta média elementar \bar{h} , elemento Z_2/P_1 (Galerkin), escoamento de Kovasznay a $\rho = 40$ e $\mu = 1$.

4 ESCOAMENTO ATRAVÉS DE UM OBSTÁCULO RETANGULAR

4.1 Condições de contorno, domínio computacional e malhas

Escolhemos que o escoamento externo através do obstáculo se dá da esquerda para a direita, com as condições de contorno especificadas a seguir. Para fronteira do domínio computacional, perfil de entrada uniforme na borda esquerda: $u = U_\infty, v = 0$; bordas superior e inferior: $v = 0$; e $\sigma \cdot \tilde{n} = \mathbf{0}$ na borda direita. No contorno do obstáculo, condição de não deslizamento: $u = v = 0$. Na Figura 4 exibimos as dimensões do domínio computacional. Supomos que o escoamento é bidimensional, ou seja, que o obstáculo retangular é infinito na direção z .

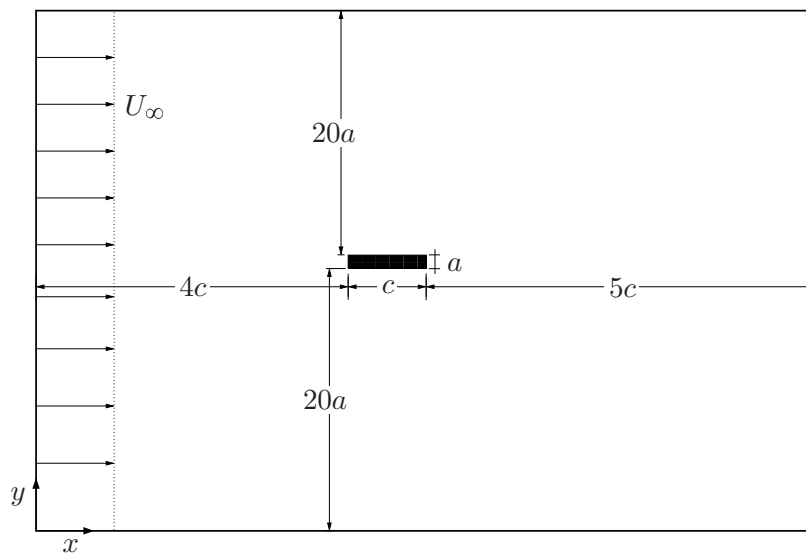


Figura 4: Domínio computacional.

Quanto à integração temporal, a velocidade e a pressão são resolvidas implicitamente através do método de Crank-Nicolson ($\theta = 0.5$). Foram utilizadas 4 malhas de elementos triangulares conforme descrito na Tabela 2 e ilustrado na Figura 5.

Malha	# Elementos	# Nós	# Elem. adj. cil. [†]	Comp. médio arestas adj. cil. [‡]
M_1	8084	4156	156	0.089744
M_2	16218	8256	222	0.063063
M_3	32048	16202	276	0.050725
M_{1r}^{\natural}	32336	16396	312	0.044871

Tabela 2: Malhas de elementos triangulares construídas no *software* livre *Gmsh* (Geuzaine and Remacle, 2009), escoamento através do obstáculo retangular. [†]Número de elementos adjacentes ao retângulo. [‡]Comprimento médio das arestas adjacentes ao retângulo. [‡] M_{1r} denotada a malha M_1 refinada, na qual cada elemento da malha M_1 foi dividido em 4 elementos triangulares.

As malhas M_1 , M_2 , M_3 e M_{1r} foram geradas para $a = 1.0$ e $c = 6.0$, em que somente para a malha M_3 as dimensões $4.0c$ e $5.0c$ (ver Figura 5) foram alteradas para $4.0c + 5.0$ e $5.0c + 5.0$, respectivamente. Malhas para outros valores de c/a foram obtidas a partir da transformação afim $x \mapsto \alpha x$. Em outras palavras, a coordenada x de cada nó foi multiplicada por um fator de escala $\alpha = c_{\text{new}}/6.0$, em que $c_{\text{new}} \in [4.0, 8.0]$ é a corda do obstáculo transformado.

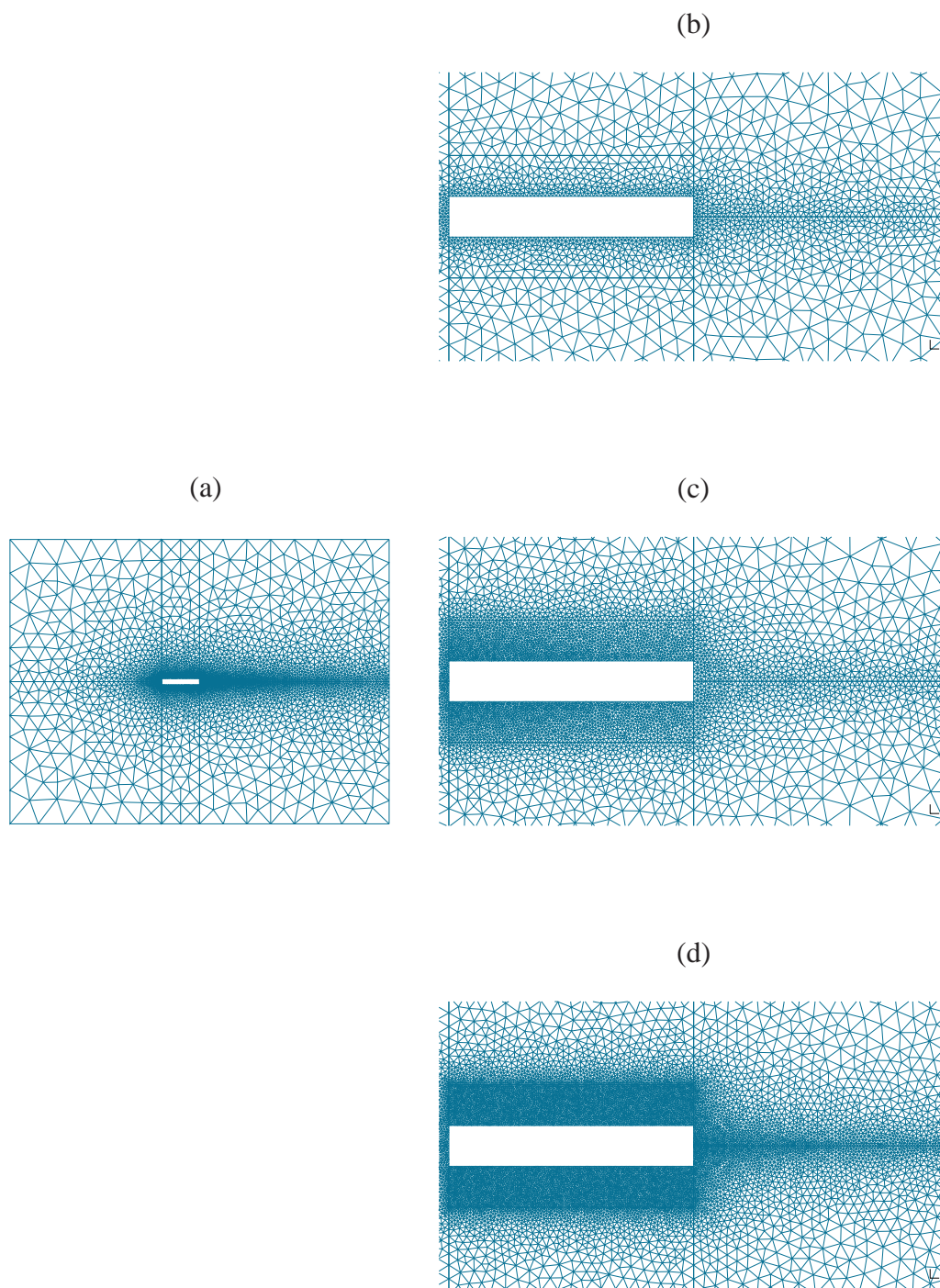


Figura 5: Malha M_1 em todo domínio (a) e *zoom* no entorno do obstáculo retangular para malhas M_1 (b), M_2 (c) e M_3 (d). A malha M_{1r} foi omitida.

4.2 Resultados

Na Figura 6 exibimos St_c para distintas razões corda/altura do obstáculo obtida com o elemento Z_2/P_1 na formulação de Galerkin (malha M_{1r}). Nessa, exibimos o número de Strouhal em duas situações: quando a corda do obstáculo é aumentada (a partir de $c = 5.0$), ou diminuída (a partir do valor $c = 6.0$). Em ambos casos o decréscimo/incremento é $\Delta c = 0.1$, em

que evidentemente St_c foi obtido após o término do transiente causado pela alteração no valor da corda do obstáculo. Observa-se claramente que há histerese; a duplicação da frequência de geração de vórtices ocorre em valores distintos: $c = 5.1$ (se c é diminuído) ou $c = 5.5$ (se c é aumentado). Ademais, observamos boa concordância com o resultado numérico de Tan et al. (1998), o qual fora obtido via método dos elementos espectrais. A pequena discrepância observada em $c/a = 8.0$, com respeito a solução de Tan et al. (1998), está aquém de 2.5%. Embora tenham sido considerados na fase preliminar deste estudo, resultados para outras malhas foram omitidos para maior clareza.

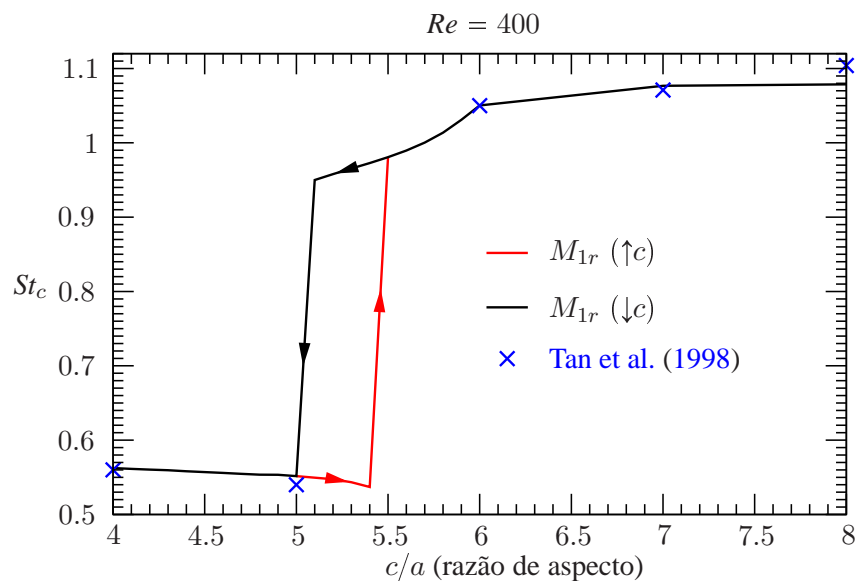


Figura 6: Número de Strouhal St_c em função da razão de aspecto c/a para malha M_{1r} , com escoamento a $Re = 400$ no entorno do obstáculo retangular; elemento Z_2/P_1 na formulação de Galerkin. Passo de tempo utilizado: $\Delta t = 0.1$.

Tomando como base o valor do número de Strouhal, interessa-nos ainda comparar o desempenho dos elementos Z_2/P_1 e P_1/P_1 . Ambos possuem suas incógnitas postas nos vértices, e então, para a mesma malha, o elemento Z_2/P_1 possibilita a obtenção de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ na norma natural, enquanto que o P_1/P_1 fornece apenas uma aproximação $\mathcal{O}(h^1)$. Isto ocorre às custas de incógnitas adicionais (derivadas parciais das componentes de velocidade são inclusas como graus de liberdade), mas em compensação, ao contrário do P_1/P_1 , não requer o uso de formulações estabilizadas. Ressaltamos que, para a mesma triangulação o Z_2/P_1 possui $7/3$ do número de incógnitas do P_1/P_1 (valor assintótico). A respeito de comparar o desempenho de ambos, listamos o valor de St_c na Tabela 3. Vejamos especialmente o resultado para Z_2/P_1 na malha M_1 e P_1/P_1 na malha M_{1r} . Ambos apresentam aproximadamente a mesma histerese, porém o P_1/P_1 assim resulta às custas de *quadruplicar* o número de elementos, acarretando um fator multiplicativo assintótico de $4 \cdot 3/7 = 12/7$ no número total de incógnitas.

	M_1		M_{1r}	
	P_1/P_1 (12468)	Z_2/P_1 (29092)	P_1/P_1 (49188)	Z_2/P_1 (114772)
$\uparrow c$	6.3	5.0	5.0	5.1
$\downarrow c$	6.7	5.9	5.7	5.5

Tabela 3: Valores de c onde ocorre descontinuidade no número de Strouhal, aumentando ($\uparrow c$) ou diminuindo ($\downarrow c$) a corda do obstáculo; escoamento a $Re = 400$. Entre parênteses está o número de incógnitas em cada caso.

Com relação ao passo temporal, na Tabela 4 exibimos St_c para $\Delta t = 0.05$ e $\Delta t = 0.02$. Notamos que o passo temporal $\Delta t = 0.05$ já pode ser considerado suficientemente pequeno para fim de cálculo do número de Strouhal. A despeito disso, como aqui nosso foco é discutir principalmente a transição de St_c , adotamos $\Delta t = 0.1$.

c/a	$St_c(\Delta t = 0.05)$	$St_c(\Delta t = 0.02)$	Diferença relativa [§]
4.0	0.554889	0.554968	1.4235e-04
5.0	0.542597	0.542578	0.3502e-04
5.1	0.950489	0.950817	3.4497e-04
5.2	0.958365	0.958628	2.7435e-04
5.3	0.965956	0.966214	2.6702e-04
5.4	0.973778	0.974022	2.5051e-04
5.5	0.982352	0.982373	0.2137e-04
5.6	0.992438	0.992654	2.1760e-04
5.7	1.004875	1.005075	1.9899e-04
5.8	1.020388	1.020629	2.3613e-04
5.9	1.040102	1.040478	3.6137e-04
6.0	1.055325	1.055790	4.4043e-04
7.0	1.077672	1.077999	3.0334e-04
8.0	1.076842	1.077444	5.5873e-04

Tabela 4: Número de Strouhal St_c para $\Delta t = 0.05$ e $\Delta t = 0.02$, malha M_3 e $Re = 400$. Observamos que St_c a $\Delta t = 0.05$ já apresenta precisão razoável. [§]Diferença relativa = $|St_c(\Delta t = 0.05) - St_c(\Delta t = 0.02)| / St_c(\Delta t = 0.02)$.

Por fim, a diferente estrutura dos escoamentos *antes* ($c/a = 5.0$) e *após* ($c/a = 5.1$) a transição em St_c é visível na Figura 7, na qual estão postas imagens instantâneas da vorticidade com intervalos de tempo de uma unidade para ambas razões de aspecto (corresponde ao caso de “descida” da curva de histerese – diminuição da corda de 5.1 para 5.0). A grande diferença na frequência é bem evidente a partir da diferente quantidade de vórtices desprendidos nos nove instantes exibidos. Esse efeito é altamente não-linear e resulta da interação do fluxo de esteira com as camadas limites formadas nas laterais como exibido na Figura 8; o escoamento evolui no tempo e afeta o processo de formação e desprendimento de vórtices na parte traseira do obstáculo.

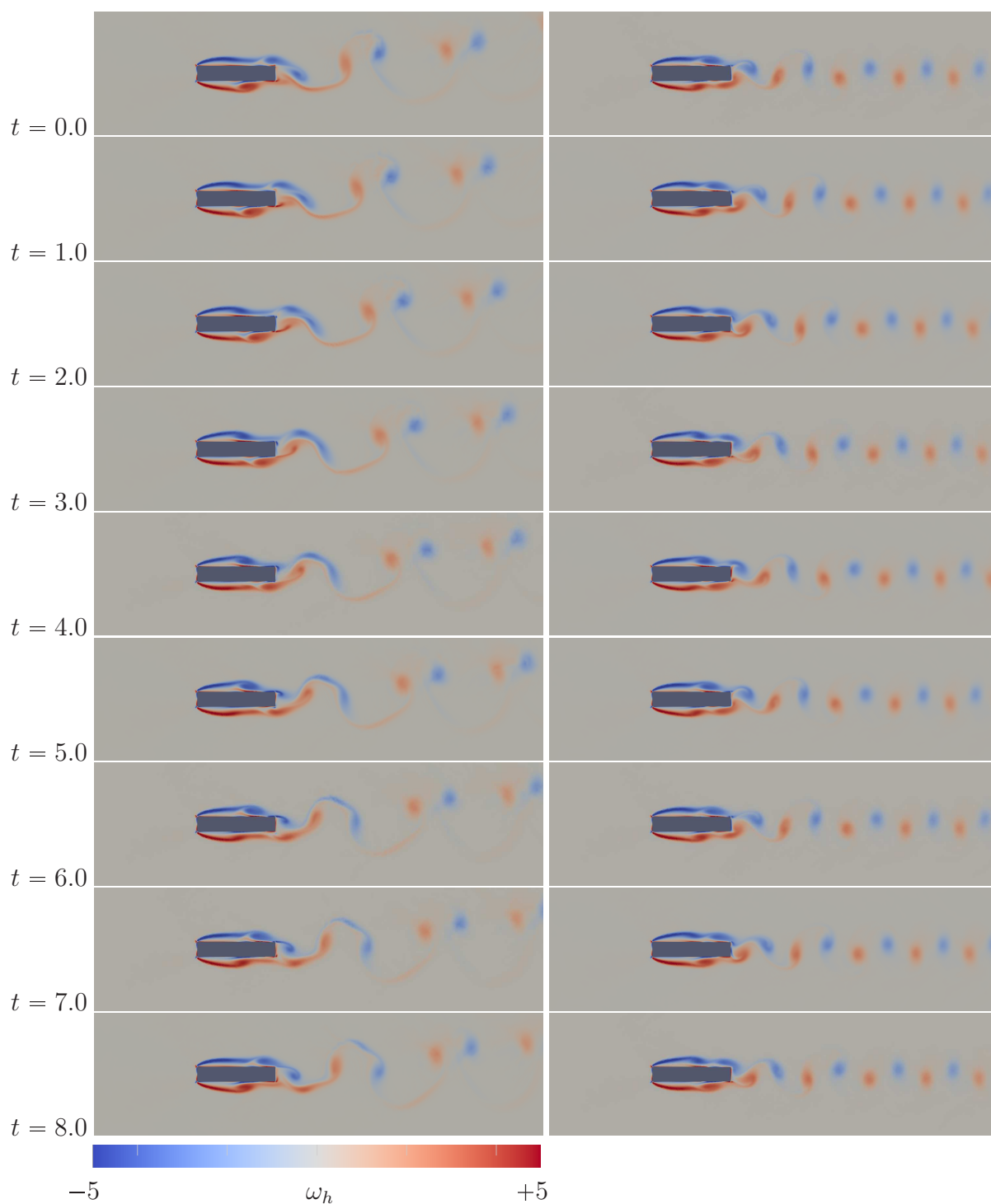


Figura 7: Campo de vorticidade ω_h para escoamento no entorno do obstáculo com razão de aspecto $c/a = 5.0$ (esquerda) ou 5.1 (direita), em que o comprimento da corda foi reduzido e então a transição se dá. A escala de cores vai do azul (vorticidade negativa, $\omega_h \leq -5$) ao vermelho (vorticidade positiva, $\omega_h \geq +5$). Passo de tempo utilizado: $\Delta t = 0.1$.

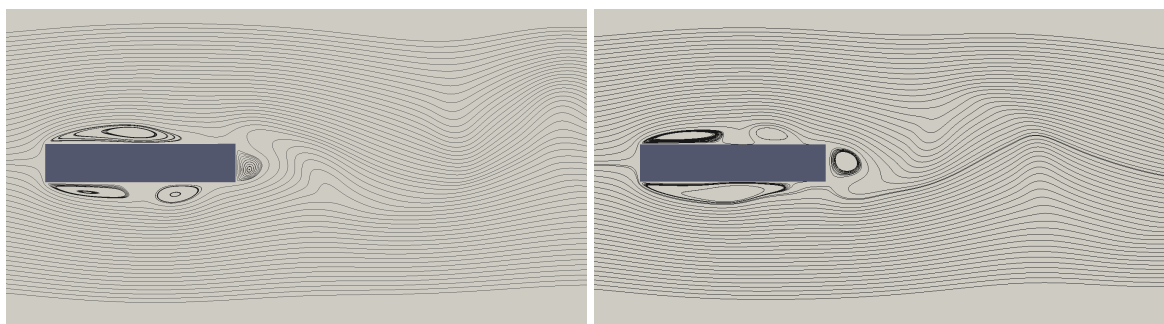


Figura 8: Linhas de corrente nas proximidades do obstáculo de razão de aspecto $c/a = 5.0$ em dois instantes distintos.

5 CONCLUSÕES

Apresentamos o novo espaço de aproximação Z_2/P_1 para escoamentos incompressíveis na formulação velocidade-pressão para as equações de Navier-Stokes transitórias, considerando números de Reynolds moderados a altos. Ressaltamos que o novo elemento se comporta de maneira estável e robusta, sem modos espúrios de pressão nem dificuldades especiais de convergência do sistema não-linear. Sem qualquer termo de estabilização, e com menor número de incógnitas do que o elemento simplicial de mesma ordem (assintoticamente $3/4$ do número de incógnitas do P_2/P_1 para a *mesma triangulação*), o elemento Z_2/P_1 resulta em ordem de convergência ótima na norma natural. Como pudemos ver no escoamento através de um obstáculo, até mesmo escoamentos de natureza transitória e complexa, o elemento Z_2/P_1 têm desempenho bastante satisfatório. De certo modo, podemos dizer que o Z_2/P_1 combina vantagens dos elementos P_2/P_1 (dispensa formulações estabilizadas e é de ordem $\mathcal{O}(h^2)$), mas com menor número de incógnitas do que este, por um fator $3/4$ e P_1/P_1 (praticidade de ter incógnitas postas apenas nos vértices).

Nos cabe lembrar que o elemento misto Z_2/P_1 foi provado ser div-estável em malhas do tipo *criss-cross* (Buscaglia and Ruas, 2013). Motivados por fortes evidências dos experimentos numéricos aqui reportados, estudos em desenvolvimento objetivam provar rigorosamente a div-estabilidade para malhas arbitrárias. Em andamento também se encontra a implementação da extensão do elemento Z_2/P_1 em superfícies curvas, o qual permitirá o estudo de escoamentos em variedades arbitrárias bidimensionais móveis em \mathbb{R}^3 . Espera-se que a continuidade C^1 (nodal) do elemento permita uma boa aproximação do operador de Boussinesq-Scriven (Gross and Reusken, 2011; Tasso and Buscaglia, 2013).

AGRADECIMENTOS

Agradecemos gentilmente o suporte financeiro da FAPESP, do CNPq e do INCT-MACC.

REFERÊNCIAS

- Berrone S., Garbeto V., and Marro M. Numerical Simulation of low-Reynolds number flows past rectangular cylinders based on adaptive finite element and finite volume methods. *Computers & Fluids*, 40:92–112, 2011.
- Buscaglia G. and Ruas V. Finite element solution of the Stokes system with a Zienkiewicz type N-simplex, 2013. Preprint.
- Ciarlet P. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.

- Codina R. An iterative penalty method for the finite element solution of the stationary Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110(3–4):237–262, 1993.
- Douglas J. and Wang J. An Absolutely Stabilized Finite Element Method for the Stokes Problem. *Mathematics of Computation*, 52(186):495–508, 1989.
- Franca L. and Frey S. Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2–3):209–233, 1992.
- Franca L. and Hughes T. Convergence analyses of Galerkin least-squares methods for symmetric advective-diffusive forms of the Stokes and incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 105(2):285–298, 1993.
- Geuzaine C. and Remacle J.F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.
- Gross S. and Reusken A. *Numerical Methods for Two-phase Incompressible Flows*, volume 40. Springer-Verlag, 2011. Series in Computational Mathematics.
- Hughes T., Franca L., and Balestra M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986.
- Islam S.U., Zhou C.Y., Shah A., and Xie P. Numerical simulation of flow past rectangular cylinders with different aspect ratios using the incompressible lattice Boltzmann method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26(3):1027–1041, 2012.
- Kovasznay L.I.G. Laminar flow behind a two-dimensional grid. *Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 44:58–62, 1948.
- Liu Z. and Kopp G.A. High-resolution vortex particle simulations of flows around rectangular cylinders. *Computers & Fluids*, 40:2–11, 2011.
- Nakamura Y., Ohya Y., Ozono S., and Nakayama R. Experimental and numerical analysis of vortex shedding from elongated rectangular cylinders at low Reynolds numbers $200 - 10^3$. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 65:301–305, 1996.
- Okajima A. Strouhal numbers of rectangular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 123:379–398, 1982.
- Ruas V. Hermite finite elements for second order boundary value with sharp gradient discontinuities. *J. Comp. Appl. Maths.*, 237:online version CAM–8865, 2012.
- Tan B.T., Thompson M.C., and Hourigan K. Simulated Flow around Long Rectangular Plates under Cross Flow Perturbations. *International Journal of Fluid Dynamics*, 2:article 1, 1998.
- Tasso I.V. and Buscaglia G.C. A finite element method for viscous membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255:226–237, 2013.
- Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. *The finite element method: Solid Mechanics*, volume II. McGraw Hill, 2000.