

## ENUMERACIÓN DE CADENAS CINEMÁTICAS DE MECANISMOS

**Martín A. Pucheta y Alberto Cardona**

*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), Universidad Nacional del  
Litoral-CONICET, Güemes 3450, S3000GLN Santa Fe, Argentina,  
e-mails: {mpucheta,acardona}@intec.unl.edu.ar, <http://www.cimec.org.ar>*

**Palabras Clave:** Cadenas cinemáticas, síntesis topológica, Teoría de Grafos, grafos contractos, algoritmos recursivos, mecanismos de eslabonamientos.

**Resumen.** Para el diseño conceptual de mecanismos mediante técnicas automáticas se requiere de una base de datos o atlas de cadenas cinemáticas previamente enumeradas. Con las cadenas cinemáticas se pueden enumerar mecanismos asignando el eslabón fijo, los tipos de juntas cinemáticas y los tipos de cuerpos. Existen metodologías desarrolladas por los autores basadas en Teoría de Grafos capaces de buscar las alternativas topológicas desde requerimientos topológicos y funcionales de diseño definidos para las partes a mover y para todo el mecanismo. En la metodología propuesta se busca el grafo de las partes a mover como subgrafo de los grafos del atlas (mecanismos) sin repetición, en forma automática y satisfaciendo restricciones topológicas complejas. En problemas que requieren soluciones de mecanismos con gran cantidad de partes surgió la necesidad de extender los atlas existentes en la bibliografía. En este trabajo se describen técnicas para enumerar computacionalmente a las cadenas cinemáticas y los avances en el desarrollo de algoritmos de enumeración. Una técnica tradicional para reducir la complejidad del problema es enumerar grafos contractos y luego asignar cadenas binarias minimizando los isomorfismos. Se describen algoritmos recursivos utilizados para resolver eficientemente ecuaciones enteras simultáneas y se muestran resultados de la enumeración de grafos contractos validados con publicaciones recientes e ilustrado con ejemplos prácticos.

### 1. INTRODUCCION

El diseño conceptual es la primer etapa del proceso de diseño de mecanismos en donde se deben generar y evaluar muchas alternativas que satisfagan requerimientos funcionales, estructurales, y otros específicos del diseño.

Para implementar computacionalmente este problema se utiliza la representación de grafo de un mecanismo (Tsai, 2001). En la Fig. 1-(a), se muestra un mecanismo utilizado en una máquina cepilladora automática y a la derecha de la misma se muestra su representación topológica mediante un grafo definido por vértices y aristas; se distingue al vértice fijo o fundación con un doble círculo y a las aristas se las etiqueta con el tipo de par cinemático (R para rotoidal y P para deslizante). Este mecanismo tiene una cadena cinemática subyacente mostrada en la

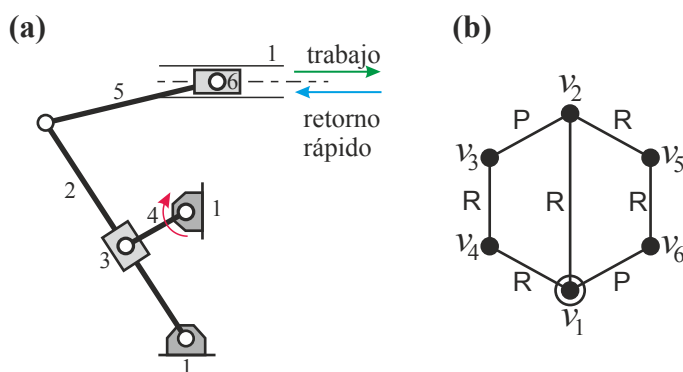


Figura 1: Representación de un mecanismo mediante un grafo.

Fig. 2-(a) que se puede representar por su grafo asociado mostrado en la Fig. 2-(b), el cual tiene varias representaciones matriciales que facilitan su implementación computacional y el empleo de diversos algoritmos disponibles de la Teoría de Grafos.

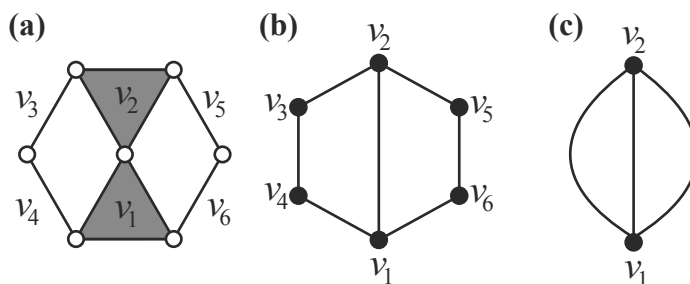


Figura 2: (a) Representación esquemática de la cadena cinemática de un mecanismo, (b) su grafo asociado, y (c) su grafo contracto correspondiente.

El alcance de este trabajo está limitado al estudio y enumeración computacional de grafos contractos de cadenas cinemáticas necesarias para diseñar mecanismos planos (Woo, 1967; Yan, 1998; Tsai, 2001). Si bien estas cadenas cinemáticas pueden verse inmediatamente como eslabonamientos con pares cinemáticos simples, se pueden utilizar equivalencias de grados de libertad para enumerar también mecanismos con pares cinemáticos altos (Hall Jr., 1961; Nito, 1977), como ser engranajes y levas, y además, mecanismos con pares múltiples mediante contracción de dimensiones de eslabones (Yan, 1998).

Los autores de este trabajo han desarrollado métodos para enumerar mecanismos de eslabonamientos planos que satisfacen restricciones topológicas y movimientos prescritos de un problema de diseño de mecanismos dado, utilizando un atlas de mecanismos previamente enumerado desde cadenas cinemáticas disponibles en la literatura (Pucheta y Cardona, 2007; Tsai, 2001; Mruthyunjaya, 2003). Recientemente, en aplicaciones de enumeración de mecanismos de eslabonamientos de un grado de libertad para múltiple guiado de alerones de ala de avión (Pucheta y Cardona, 2013) y en la enumeración de mecanismos de dos grados de libertad para interruptores de circuitos de bajo voltaje (Pucheta et al., 2012) resultó necesario el disponer de atlas con más mecanismos y, por lo tanto, se necesitó incursionar en la enumeración de cadenas cinemáticas. La enumeración de cadenas cinemáticas en forma computacional es un problema complejo de vigente interés y se puede enunciar matemáticamente como un problema de enumeración de grafos con restricciones.

En este trabajo se presenta una descripción de los métodos de enumeración y se muestran algunos resultados preliminares obtenidos que fueron validados con los de la literatura.

## 2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA Y METODOS EXISTENTES

La cadena cinemática de un mecanismo es un conjunto de cuerpos ligados por restricciones cinemáticas, también llamadas pares o uniones cinemáticas, o simplemente juntas. Una simplificación en los problemas de enumeración es considerar que cada restricción permite sólo un grado de libertad. Cuando se define un eslabón fijo en la cadena cinemática se dice que se forma un mecanismo. El número de grados de libertad del mecanismo es el número de movimientos de entrada necesarios para determinar unívocamente la configuración del resto de los cuerpos. Un mecanismo puede contener una subcadena cinemática bloqueada sin movilidad relativa entre sus miembros que es equivalente a un único cuerpo más grande, por lo que en general no es útil. Por lo tanto, en los problemas de enumeración deben eliminarse aquellos mecanismos con al menos una subcadena bloqueada. Otro tipo de mecanismo que puede obtenerse en una enumeración es un mecanismo fraccionado, es decir, que se puede obtener en términos de la unión de dos mecanismos que comparten un eslabón o una unión cinemática. En términos de grafos, serían los llamados grafos con vértice o arista de corte. Estos mecanismos son indeseados porque aumentan el número de soluciones y pueden obtenerse mediante operaciones de unión de dos o más mecanismos (Martins et al., 2010; Ding et al., 2012).

Desde los años 60, se han utilizado la Teoría de Grafos y el Análisis Combinatorio para enumerar y analizar topológicamente a las cadenas cinemáticas en forma sistemática y computacional; estos desarrollos se encuentran en las revisiones de Olson et al. (1985) y Mruthyunjaya (2003). Por la relación análoga entre cuerpos y pares cinemáticos con los vértices y aristas de un grafo, la teoría de grafos y los algoritmos derivados en ciencias de la computación han sido los preferidos para enumerar mecanismos. Los dos aspectos cruciales en este problema son: (i) evitar que existan topologías repetidas o isomórficas entre sí; (ii) evitar que existan subcadenas bloqueadas o cadenas degeneradas (que no satisfagan la restricción cinemática de que todo subgrafo parcial debe tener movilidad mayor que cero). Actualmente, los métodos atacan estos subproblemas en orden: primero, se enumeran cadenas con ciertas propiedades y luego se eliminan aquellas con subcadenas bloqueadas. Obviamente, en ambos pasos la completitud de los algoritmos debe garantizar, con igual importancia, que no se generen topologías repetidas y que no se omita alguna válida. Las técnicas difieren en que requieren o no de la identificación de isomorfismos. La comparación efectiva de las complejidades de ambos enfoques es un problema abierto de la ciencia de los mecanismos.

## 2.1. Enumeración con detección de isomorfismos

Woo (1967) en simultaneidad con Dobrjanskyj y Freudenstein (1967) fueron los pioneros en la enumeración computacional de cadenas cinemáticas. El enfoque de Woo divide a la enumeración de grafos en la enumeración de grafos contractos (multigrafos con vértices de grados mayores que 2) seguido de una expansión de cadenas binarias en donde por cada grafo contracto se enumeran todas las formas de agregar vértices binarios sin repetición y que no formen subcadenas bloqueadas; de este modo la cadena cinemática se obtiene de un multigrafo con aristas etiquetadas donde la etiqueta indica la subcadena binaria por la que debe reemplazarse la arista. Un nivel de abstracción adicional fue presentado por Fang y Freudenstein (1990) quienes representaron a las aristas múltiples por una única arista simple etiquetada con el número de aristas, obteniendo el denominado grafo simplificado. Este proceso fue extendido luego por Butcher y Hartman (2005) para la enumeración de mecanismos de un grado de libertad con hasta 14 eslabones, evitando la detección de isomorfismos. Recientemente, las enumeraciones de este grupo han sido reproducidas y extendidas por (Lu y Leinonen, 2005; Lu et al., 2012; Ding et al., 2011) con mejoras incrementales en la eficiencia en la detección de isomorfismos y en la detección de cadenas degeneradas.

## 2.2. Enumeración sin detección de isomorfismos

Son métodos para la enumeración de grafos basados en Teoría de Grupos (Tuttle et al., 1989; Tuttle, 1996; Yan, 1998) en los que se utilizan las simetrías en vértices y aristas para tomar decisiones en la asignación de determinadas propiedades. Los avances más importantes en esta área fueron logrados por Sunkari y Schmidt (2006) quienes adaptaron un algoritmo de generación no isomórfica de grafos de McKay para enumerar mecanismos que satisfacen el criterio de Grübler en combinación con un algoritmo para la detección de cadenas degeneradas. Recientemente, Simoni et al. (2009) extendieron el trabajo de Sunkari a cualquier sistema de helicoides y emplearon el algoritmo de detección de cadenas degeneradas de Martins y Carboni (2008), pero estuvieron limitados a trabajar con cuatro lazos independientes debido a la alta complejidad del algoritmo.

En este trabajo se procederá a reproducir algoritmos para la enumeración con detección de isomorfismos para generar cadenas cinemáticas de referencia y en trabajos futuros se implementarán algoritmos de McKay para compararlos y obtener lo mejor de cada método.

## 3. PROCEDIMIENTO DE ENUMERACION

Se introducirán definiciones preliminares relacionando grafos y mecanismos (Woo, 1967; Tsai, 2001; Mruthyunjaya, 2003) y luego se describirá el procedimiento de enumeración en términos de multigrafos.

### 3.1. Definiciones

Un grafo no dirigido, denotado como  $G(V, E)$ , es un estructura algebraica compuesta de un conjunto no vacío de vértices  $V$  y un conjunto de aristas conectando pares de vértices  $E \subseteq V \times V$ . Una cadena cinemática es un conjunto de cuerpos restringido a moverse según lo permitan las restricciones cinemáticas impuestas entre ellos mediante pares cinemáticos. La cadena cinemática se puede representar por un grafo en donde los  $n$  cuerpos o eslabones son representados por los vértices del grafo, y los  $j$  pares cinemáticos son representados por el par de cuerpos que conectan. En adelante, nos referiremos a vértices y eslabones en forma homóloga, igualmente que para los pares cinemáticos y las aristas. El tamaño del conjunto de vértices

$V$  se denota por  $v = n = |V|$ , y el tamaño del conjunto de aristas por  $e = j = |E|$ . La matriz de adyacencia  $A_G$  es una de las representaciones matriciales de un grafo y es una matriz cuadrada de  $n \times n$  indexada por las etiquetas de los vértices, en donde la entrada  $a_{ij}$  es igual a 1 si los vértices con etiquetas  $i$  y  $j$  son adyacentes, o 0 de otro modo.

Dos grafos simples  $G_1(V_1, E_1)$  y  $G_2(V_2, E_2)$  son isomorfos si existe una función biyectiva (1 a 1 y sobreyectiva)  $f$  desde el conjunto  $V_1$  a  $V_2$  con la propiedad de que  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si  $f(u)$  y  $f(v)$  son adyacentes  $G_2$ , para todo  $u$  y  $v$  en  $V_1$ . Si existe tal función  $f$  se dice que existe un isomorfismo.

Un camino simple es una secuencia de vértices y aristas en donde ninguna arista es atravesada más de una vez. Un lazo, circuito o ciclo es un camino simple que comienza y termina en el mismo vértice. La longitud del camino es el número de aristas, y en el ciclo coincide con el número de vértices. La ecuación de Euler establece que un grafo plano tiene  $\tilde{L} = e - v + 2$  ciclos, incluyendo  $L$  ciclos independientes y uno periférico, de modo que tiene  $\tilde{L} = L + 1$  en total; de aquí que hay  $L = e - v + 1$  ciclos independientes, también denominados circuitos fundamentales, base de lazos o base de ciclos porque esta base tiene las siguientes características: (a) cualquier otro ciclo se puede obtener por suma o combinación lineal de los ciclos de la base, (b) ningún ciclo base está contenido en otro ciclo base. Equivalentemente, una cadena cinemática tiene  $\nu = j - n + 1$  ciclos independientes y su movilidad se puede calcular como  $M = j - \lambda\nu$  si todos sus pares cinemáticos son simples (cada par cinemático permite sólo un grado de libertad de movimiento relativo entre dos cuerpos), en donde  $\lambda$  es el orden del sistema de helicoides o grados de libertad del espacio en que debe moverse el mecanismo ( $\lambda = 6$  para mecanismos espaciales, y  $\lambda = 3$  para mecanismos planos y esféricos). Por ejemplo, para mecanismos planos la movilidad se calcula como:

$$M = j - \lambda\nu = j - 3(j - n + 1) = 3(n - 1) - 2j. \quad (1)$$

Una cadena binaria de longitud  $k$  es un camino simple con  $k$  vértices y  $k + 1$  aristas en donde cada vértice tiene grado 2. Los vértices con grado mayor que 2, se denominan vértices mayores o no binarios. Necesariamente, una cadena binaria incide en sus extremos en dos vértices mayores. Un grafo contracto se obtiene de reemplazar, en un grafo  $G(V, E)$ , cada cadena binaria por una arista simple, ello puede producir aristas paralelas y el grafo contracto obtenido se dice que es un multigrafo. El grafo de una cadena cinemática se mapea a un único grafo contracto, y desde un grafo contracto, mediante el reemplazo de aristas simples por cadenas binarias se puede *expandir* a más de un grafo de cadena cinemática. El proceso de contracción o expansión preserva el número de ciclos, por lo tanto, el grafo de una cadena cinemática y el grafo contracto tienen el mismo número de ciclos.

Si se denota con  $n_2$  al número de vértices de grado 2, luego el número de vértices y aristas en  $G(V, E)$  están relacionados a los de su grafo contracto  $G^c(V^c, E^c)$  mediante:

$$\begin{aligned} v^c &= v - n_2, y \\ e^c &= e - n_2, \end{aligned} \quad (2)$$

respectivamente. La contracción preserva invariante el número de ciclos, dado que

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= e - v + 2 + (-n_2 + n_2) \\ &= (e - n_2) - (v - n_2) + 2 \\ &= e^c - v^c + 2 = \tilde{L}^c. \end{aligned}$$

La matriz de adyacencia  $A_{G^c}$  del multigrafo  $G^c$  es una matriz cuadrada de  $v^c \times v^c$  indexada por las etiquetas de los  $m$  vértices mayores, en donde la entrada  $a_{ij}$  es igual a  $k$  si los vértices con etiquetas  $i$  y  $j$  están conectados por  $k$  aristas paralelas, o 0 de otro modo (incluyendo  $i = j$ ).

### 3.2. Procedimiento de enumeración

Existen varios procedimientos para enumerar cadenas cinemáticas. Aquellos métodos en que se enumeran primero los grafos contractos o bases de cadenas cinemáticas y luego se expanden las cadenas binarias (Woo, 1967; Tsai, 2001; Mruthyunjaya, 2003; Ding et al., 2011) tienen menor complejidad algorítmica que aquellos métodos en que se enumeran todas las matrices de adyacencia directamente desde un listado de grados (Tsai, 2001). En general, todos parten de dividir el problema en otros mutuamente excluyentes basando la división en invariantes de una familia de grafos de tal modo que no pueda haber grafos isomorfos entre grafos de diferentes familias. Existen varios métodos basados en enumerar grafos contractos (Mruthyunjaya, 2003), en este trabajo se sigue el método propuesto por Tsai (2001) y extendido recientemente por Ding et al. (2011) con el empleo de simetrías y de un indentificador de isomorfismos basado en ciclos y reglas heurísticas. Previo a la descripción del algoritmo es necesario definir tres conceptos importantes:

1. **Frontera inferior y superior del grado (número de juntas) de un eslabón:** En cadenas cinemáticas no fraccionadas, cada eslabón debe estar conectado a al menos otros dos, imponiendo una restricción sobre la frontera inferior del grado  $d_i$  del vértice  $v_i$  asociado al eslabón  $i$ . Además, el máximo grado de un vértice es a lo sumo igual al número total de ciclos  $\tilde{L}$ .

$$2 \leq d_i \leq \tilde{L} \quad (3)$$

2. **Lista de grados:** Debido a que cada junta conecta dos eslabones la sumatoria de los grados de los vértices es un número par

$$\sum_{i=1}^n d_i = d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2j \quad (4)$$

y las soluciones a la Ec. (4) sujetas a la restricción Ec. (3) son los listados útiles para la enumeración mediante técnicas de obtención de cadenas cinemáticas en forma directa, sin usar grafos contractos. Pero, veremos que el número de soluciones infactibles se reduce si se utiliza este listado de grados para el grafo contracto y se lo obtiene mediante el cálculo de la multiplicidad de eslabones con determinado grado.

3. **Multiplicidades de eslabones con determinado grado (del inglés, "Link Assortments")**

Si denotamos con  $n_i$  al número de eslabones con  $i$  juntas (o grado  $i$ ), entonces  $n_2$  es el número de eslabones binarios,  $n_3$  el número de ternarios,  $n_4$  el número de cuaternarios, y así sucesivamente hasta un máximo de juntas por eslabón limitado por el número de ciclos,  $\tilde{L}$ , es decir, un número  $n_{\tilde{L}}$  de eslabones con  $\tilde{L}$  juntas. La suma de la lista de multiplicidades coincide con el número de eslabones totales por lo que las múltiples soluciones deben satisfacer:

$$\begin{aligned} n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_{\tilde{L}} &= n \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + \tilde{L}n_{\tilde{L}} &= 2j \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\tilde{L} = j - n + 2$ . Despejando  $n_2$  de las Ecs. (5) se deduce que el valor que adquiere  $n_2$  debe ser mayor o igual que  $3n + 2j$ .

### 3.3. Obtención de grafos contractos

Dado un sistema de helicoides  $\lambda$  y una movilidad deseada  $M$ , se pueden obtener los pares de número de eslabones y uniones cinemáticas  $(n, j)$  que son solución de la Ec. (1) hasta cierto número de eslabones prácticamente útil; en general, las soluciones se pueden clasificar por el número de ciclos  $\nu$ .

Para un par  $(n, j)$ , cada solución a las Ecs. (5) tiene la forma de listado  $A_{ss} = [n_2, n_3, \dots, n_r]$ , de donde se toma  $n_2$  para obtener el número de vértices y aristas del grafo contrato y las multiplicidades mayores,  $n_3, \dots, n_r$ , para generar los listados de grados de vértices de los grafos contractos. Los grados se listan en orden creciente  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{v^c}$ , claramente, satisfacen  $3 \leq d_i \leq \tilde{L}$ . Luego, se pueden establecer las ecuaciones de sumatorias por filas de las entradas de la matriz de adyacencia del grafo contrato (pueden existir múltiples soluciones).

$$\begin{aligned} 0 + a_{1,2} + a_{1,3} + \dots + a_{1,v^c} &= d_1, \\ a_{2,1} + 0 + a_{2,3} + \dots + a_{2,v^c} &= d_2, \\ a_{3,1} + a_{3,2} + 0 + \dots + a_{3,v^c} &= d_3, \\ &\vdots \\ a_{v^c,1} + a_{v^c,2} + \dots + a_{v^c,v^c-1} + 0 &= d_{v^c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Las Ecs. (6) sujetas a diversas restricciones, se pueden resolver en forma recursiva. Las restricciones evitan soluciones repetidas o infactibles:

- (i) La matriz es simétrica y tiene diagonal nula

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{j,i}, \\ a_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

de modo que hay  $v^c(v^c - 1)/2$  incógnitas.

- (ii) Cada entrada es no negativa y cada vértice debe estar conectado al menos a otros dos vértices. Para evitar vértices de corte, dos valores por cada fila y cada columna deben ser no nulos, o sea, que una entrada no puede igualar el valor del grado del vértice. Ambas condiciones se pueden resumir en

$$\min(d_i, d_j) > a_{i,j} \geq 0. \quad (8)$$

Nótese que por la simetría en la matriz de adyacencia la sumatoria de las entradas en la fila  $i$  es igual al grado  $d_i$  e igual a la sumatoria de las entradas en la columna  $i$ -ésima.

$$\sum_{i=1}^{v^c} \sum_{j=1}^{v^c} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{v^c} \sum_{i=1}^{v^c} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{v^c} d_j = 2e^c.$$

Por ello, cada par de entradas pertenecientes a vértices de igual grado (en la misma fila) deben ordenarse en orden decreciente para evitar soluciones repetidas.

$$a_{i,j} \leq a_{i,k} \quad \text{ssi} \quad d_j = d_k \wedge j > k. \quad (9)$$

Para resolver las Ecs. (6) sujeto a las restricciones (7-9), existen casos particulares fáciles de resolver que se pueden tratar por separado: el caso  $v^c = 2$  (trivial, ya que:  $a_{1,2} = a_{2,1} =$

$d_1 = d_2$ ), y el caso de  $v^c = 3$  en que hay tres ecuaciones en tres incógnitas. Para los casos en que  $v^c > 3$  se utiliza un algoritmo recursivo que resuelve las Ecs. (6) fila por fila incorporando las restricciones (7-9) en el procedimiento para eliminar tempranamente las soluciones infactibles. Se inicia el paso base con el cálculo de las soluciones enteras de la fila 1 para las entradas de la columna 2 hasta la  $v^c$ , cada solución factible es válida, por simetría, para la columna 1. En el paso recursivo general se calculan las soluciones enteras de las fila  $i$ -ésima y luego se actualizan las entradas  $a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \dots, a_{i,v^c}$  y se copian correspondientemente en las entradas  $a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \dots, a_{v^c,i}$  de la columna  $i$  y además se restan de los correspondientes grados  $d_{i+1}, d_{i+2}, \dots, d_{v^c}$  en el lado derecho de las Ecs. (6), modificando los datos para la fila  $i + 1$  calculados en la próxima recursión y en las siguientes, reduciendo así el número de soluciones infactibles. El algoritmo finaliza cuando se obtienen tres ecuaciones y se completan recursivamente y en forma exitosa todas las entradas de la matriz de adyacencia.

De cada matriz de adyacencia se obtiene un grafo contracto en el que: (i) se verifica que no sea fraccionado, o sea, que no contenga vértice ni arista de corte; (ii) se codifica para identificar si corresponde a un grafo ya almacenado, es decir, si el grafo contracto asociado es isomórfico a alguno anterior. Nótese que sólo puede haber isomorfismos dentro de una familia del árbol de soluciones  $(n, j); n_2; [n_3, \dots, n_r]$ , y, con el objetivo de minimizar el empleo de la identificación de isomorfismos, este chequeo se realiza en última instancia. Dos pasos posteriores son: primero, obtener la matriz de adyacencia de la cadena cinemática realizando la distribución de  $n_2$  vértices binarios por cada grafo contracto de la familia, y segundo, verificar que no existan subcadenas bloqueadas. Estos procedimientos se encuentran detallados en la literatura (Woo, 1967; Tsai, 2001) y no serán descriptos en este trabajo limitándonos a mostrar los resultados resultantes de la enumeración de grafos contractos.

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Ejemplo de cálculo para cadenas cinemáticas planas de un grado de libertad (GDL).

Las cadenas cinemáticas planas poseen  $\lambda = 3$  y pueden tener movibilidades  $M$  entre 1 y 6. Para el grado de libertad de este ejemplo, la ecuación de Grübler es  $M = 3(n - 1) - 2j = 1$ . Los pares  $(n, j)$  que son soluciones de esta ecuación limitada a 20 eslabones están tabulados junto con el número de ciclos independientes en la Tabla 1.

$n$	$j$	$L$
4	4	1
6	7	2
8	10	3
10	13	4
12	16	5
14	19	6
16	22	7
18	25	8
20	28	9

Tabla 1: Pares  $(n, j)$  y ciclos independientes para cadenas cinemáticas de 1 GDL.

Las cadenas cinemáticas de un ciclo tienen solución única y trivial, por lo que la metodología resuelve la enumeración para cadenas con más de un ciclo. Como ejemplo inicial se usará la



segunda fila de la Tabla 1.

**4.1.1. Grafos contractos para cadenas cinemáticas 1GDL-(6,7)**

Con  $n = 6$  y  $j = 7$  se tiene  $\tilde{L} = 3$ . Luego, por medio de la Ec. (5) se obtiene la solución de multiplicidades  $A_{ss} = [n_2, n_3] = [4, 2]$ , lo cual significa que existen 4 vértices de grado 2 y 2 vértices de grado 3. Para el  $n_2 = 4$ , a través de las Ecs. (2) se obtienen el número de vértices y aristas del grafo contracto como (2, 3). Luego, los 2 vértices del grafo contracto conducen a un listado de grados  $D_v = [d_1, d_2] = [3, 3]$ .

Utilizando el primer caso particular del algoritmo de obtención de grafos contractos se obtiene la matriz de adyacencia

$$A_{\{1/(6,7)/[4,2]/(2,3)/[3,3]/1\}}^c = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

De este grafo contracto se obtienen, mediante distribución de 4 vértices binarios, las conocidas cadenas cinemáticas de Stephenson y Watt mostradas en la Fig. 3.

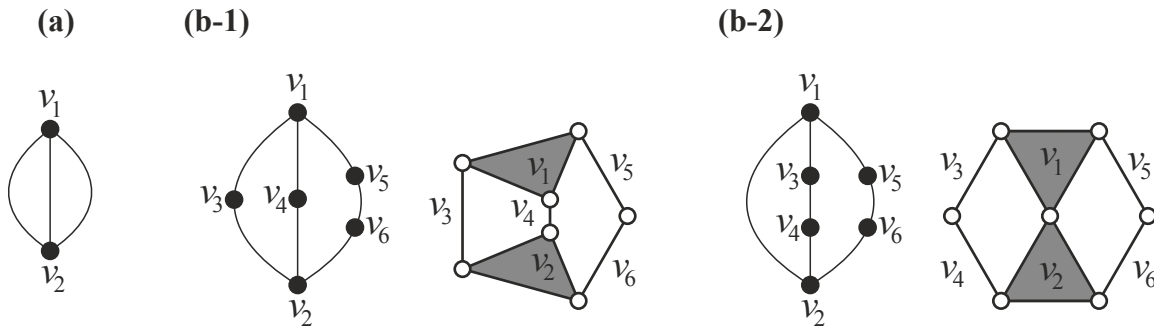


Figura 3: (a) Grafo contracto (2, 3) y sus cadenas cinemáticas de 1 GDL con 6 eslabones y 7 pares cinemáticos, Stephenson (b-1) y Watt (b-2), obtenidos del mismo mediante asignación de cadenas binarias.

**4.1.2. Grafos contractos para cadenas cinemáticas 1GDL- (8,10)**

Con  $n = 8$  y  $j = 10$  se tiene  $\tilde{L} = 4$ , por medio de la Ec. (5), se obtienen las multiplicidades de grados de la Tabla 2.

Familia	$n_2$	$n_3$	$n_4$
1	4	4	0
2	5	2	1
3	6	2	0

Tabla 2: Link assortments

Para la familia  $[4, 4, 0]$  se busca un grafo contracto (4, 6) con listado de grados  $[3, 3, 3, 3]$ , resultando en dos soluciones:

$$A_{\{1/(8,10)/[4,4,0]/(4,6)/[3,3,3,3]/1\}}^c = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$A_{\{1/(8,10)/[4,4,0]/(4,6)/[3,3,3,3]/2\}}^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para la familia  $[5, 2, 1]$  se busca un grafo contracto  $(3, 5)$  con listado de grados  $[4, 3, 3]$ , resultando en una única solución:

$$A_{\{1/(8,10)/[5,2,1]/(3,5)/[4,3,3]/1\}}^c = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para la última familia  $[6, 0, 2]$  se busca un grafo contracto  $(2, 4)$  con listado de grados  $[4, 4]$ , resultando en una única solución:

$$A_{\{1/(8,10)/[6,0,2]/(2,4)/[4,4]/1\}}^c = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

De las 3 familias se obtiene un total de 4 grafos contractos mostrados en la Fig. 4 que son base para obtener cadenas cinemáticas de 1 GDL, 8 eslabones y 10 juntas.

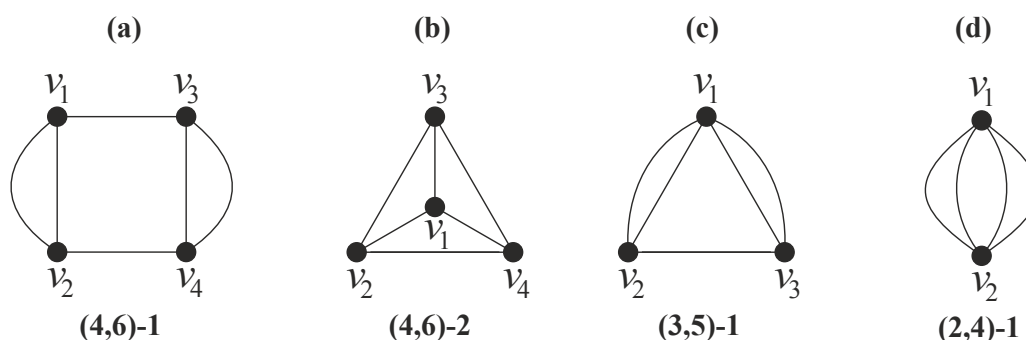


Figura 4: Grafos contractos para obtener cadenas cinemáticas de 8 eslabones y 10 juntas.

#### 4.1.3. Tabla de grafos contractos de 1 GDL

Los resultados para la enumeración realizada en este trabajo, se detallan en la Tabla 3 en donde se muestra el número de eslabones, el número de juntas, el número de ciclos independientes, la cardinalidad del conjunto de familias y la cardinalidad del conjunto de matrices de adyacencia de grafos contractos.

Se agregaron dos columnas adicionales (Butcher y Hartman, 2005; Ding et al., 2011) con los resultados deseados entre paréntesis. El número de grafos contractos de la quinta columna coincide con el número de grafos publicado por Ding et al. (2011), en donde existen grafos que podrán ser cinemáticamente infactibles, es decir, son grafos en que no se pueden distribuir los  $n_2$  vértices binarios evitando que se generen subcadenas bloqueadas. En la sexta columna se muestra la cantidad de grafos contractos que efectivamente resultan en cadenas cinemáticas y en la séptima columna se muestra el número de cadenas cinemáticas obtenidas.

$n$	$j$	$L$	$ A_{ss} $	$ A^c(G^c) $	Factibles	$ A(G) $
6	7	2	1	1	(1)	(2)
8	10	3	3	4	(4)	(16)
10	13	4	7	17	(15)	(230)
12	16	5	15	118	(97)	(6856)
14	19	6	30	1198	(923)	(318162)

Tabla 3: Resultados de la enumeración para cadenas cinemáticas de 1 GDL de 6 a 14 eslabones.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó la enumeración computacional de grafos contractos necesarios para generar cadenas cinemáticas sin fraccionamiento desde el grado de libertad y el espacio de helicoides deseado. El objetivo es construir una base de datos de cadenas cinemáticas para diseñar mecanismos en forma automática. Por simplicidad, se mostraron los resultados para grafos contractos de cadenas cinemáticas planas de 1 GDL, la ejecución para más grados de libertad sólo involucra el cambio de parámetros de entrada. Los resultados obtenidos coinciden con los publicados en la literatura. Como tareas a futuro, se tomará esta base de datos de grafos contractos como plataforma para tratar algunos problemas abiertos: (i) completar en forma general, eficiente y sin detección de isomorfismos la asignación de cadenas binarias y la detección de subcadenas bloqueadas, es decir, considerando cualquier sistema de helicoides (Martins y Simoni, 2009); (ii) obtener algoritmos eficientes para la identificación de isomorfismos; (iii) estudiar la construcción no isomórfica de cadenas cinemáticas fraccionadas (Martins et al., 2010; Ding et al., 2012); y (iv) obtener formas eficientes de representar las operaciones en mecanismos de topologías variables, también llamados mecanismos reconfigurables (Pucheta y Cardona, 2011; Pucheta et al., 2012).

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió apoyo de la *Universidad Nacional del Litoral* (CAI+D 2011 PI 506), el *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (PIP2009 112-200801-02473), y la *Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica* (PICT Bicentenario 2010-Cód.1240).

## REFERENCIAS

- Butcher E.A. y Hartman C. Efficient enumeration and hierarchical classification of planar simple-jointed kinematic chains: Application to 12- and 14-bar single degree-of-freedom chains. *Mech. Mach. Theory*, 40(9):1030–1050, 2005.
- Ding H., Hou F., Kecskeméthy A., y Huang Z. Synthesis of a complete set of contracted graphs for planar non-fractionated simple-jointed kinematic chains with all possible dofs. *Mech. Mach. Theory*, 46(11):1588–1600, 2011.
- Ding H., Huang P., Zi B., y Kecskeméthy A. Automatic synthesis of kinematic structures of mechanisms and robots especially for those with complex structures. *Appl. Math. Modelling*, 36(12):6122–6131, 2012.
- Dobrzanskyj L. y Freudenstein F. Some applications of Graph Theory to the structural analysis of mechanisms. *ASME J. Eng. Ind.*, 89:153–158, 1967.
- Fang W.E. y Freudenstein F. The stratified representation of mechanisms. *ASME J. Mech. Design*, 112(4):514–519, 1990.

- Hall (Jr.) A.S. *Kinematics and Linkage Design*. Waveland Press, U.S.A., 1961.
- Lu Y. y Leinonen T. Type synthesis of unified planar–spatial mechanisms by systematic linkage and topology matrix-graph technique. *Mech. Mach. Theory*, 40(10):1145–1163, 2005.
- Lu Y., Lu Y., Ye N., Mao B., Han J., y Sui C. Derivation of valid contracted graphs from simpler contracted graphs for type synthesis of closed mechanisms. *Mech. Mach. Theory*, 52(0):206–218, 2012.
- Martins D. y Carboni A.P. Variety and connectivity in kinematic chains. *Mech. Mach. Theory*, 43(10):1236–1252, 2008.
- Martins D. y Simoni R. Enumeration of planar metamorphic robots configurations. In *Proceedings of ASME/IFTOMM REMAR 2009 Conference*, páginas 580–588. London, United Kingdom, 2009.
- Martins D., Simoni R., y Carboni A. Fractionation in planar kinematic chains: Reconciling enumeration contradictions. *Mech. Mach. Theory*, 45(11):1628–1641, 2010.
- Mruthyunjaya T.S. Kinematic structure of mechanisms revisited. *Mech. Mach. Theory*, 38(4):279–320, 2003.
- Nieto J.N. *Síntesis de Mecanismos*. Editorial AC, Madrid, 1977.
- Olson D.G., Erdman A.G., y Riley D.R. A systematic procedure for type synthesis of mechanisms with literature review. *Mech. Mach. Theory*, 20(4):285–295, 1985.
- Pucheta M., Butti A., Tamellini V., Cardona A., y Ghezzi L. Topological synthesis of planar metamorphic mechanisms for low-voltage circuit breakers. *Mech. Based Des. Struc.*, 40(4):453–468, 2012.
- Pucheta M. y Cardona A. An automated method for type synthesis of planar linkages based on a constrained subgraph isomorphism detection. *Multibody Syst. Dyn.*, 18(2):233–258, 2007.
- Pucheta M. y Cardona A. Síntesis topológica de mecanismos metamórficos. In *Proc. of ENIEF 2011 Congr., Mecánica Computacional Vol. XXX*, páginas 2929–2941. Rosario, Argentina, 2011.
- Pucheta M. y Cardona A. Topological and dimensional synthesis of planar linkages for multiple kinematic tasks. *Multibody Syst. Dyn.*, 29(2):189–211, 2013.
- Simoni R., Martins D., y Carboni A. Enumeration of kinematic chains and mechanisms. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(4):1017–1024, 2009.
- Sunkari R.P. y Schmidt L.C. Structural synthesis of planar kinematic chains by adapting a McKay-type algorithm. *Mech. Mach. Theory*, 41(9):1021–1030, 2006.
- Tsai L. *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- Tuttle E., Peterson S., y Titus J. Further applications of group theory to the enumeration and structural analysis of basic kinematic chains. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 111(4):494–497, 1989.
- Tuttle E.R. Generation of planar kinematic chains. *Mech. Mach. Theory*, 31(6):729–748, 1996.
- Woo L.S. Type synthesis of plane linkages. *ASME Journal of Engineering for Industry, Series B*, 89:159–172, 1967.
- Yan H. *Creative Design of Mechanical Devices*. Springer-Verlag, Singapore, 1998. ISBN 981-3083-57-3.