

## EFECTO DEL RUIDO EN LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE REINYECCIÓN EN INTERMITENCIA TIPO I

**Gustavo J. Krause<sup>a,b,d</sup>, Sergio Elaskar<sup>a,b</sup> y Ezequiel del Río<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Vélez Sársfield 1611, 5000-Córdoba, Argentina,  
<http://www.uncarolina.edu.ar/gmc>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas – CONICET*

<sup>c</sup>*Departamento de Física, ETSIA, Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, España*

<sup>d</sup>*[gustavojavierkrause@gmail.com](mailto:gustavojavierkrause@gmail.com)*

**Palabras Clave:** Intermitencia, RPD, ruido

**Resumen.** La intermitencia es una forma particular de caos determinístico, la cual se presenta en numerosos procesos físicos tales como convección de Rayleigh-Bénard, osciladores no lineales periódicamente forzados, desarrollo de turbulencia, etc. En este fenómeno ocurren transiciones entre diferentes comportamientos del sistema, donde fases aproximadamente regulares de cierta duración se alternan con explosiones caóticas cortas a intervalos irregulares. El estudio del efecto del ruido en intermitencia tipo I fue realizado en trabajos anteriores, pero el enfoque se dirige principalmente al análisis de la influencia sobre la región laminar, sin considerar debidamente el efecto sobre el mecanismo de reinyección global del mapa. En este trabajo el análisis se hace sobre el efecto del ruido en la densidad de probabilidades de reinyección (RPD), ya que esta propiedad define las características principales del proceso de intermitencia. Para la representación analítica de la RPD se utiliza una metodología recientemente presentada [E. del Río and S. Elaskar, *J. Bifurcation Chaos* 20 (2010)], la cual se adapta para su aplicación en intermitencia tipo I con efecto del ruido. Para verificar los resultados analíticos se realiza una serie de simulaciones numéricas considerando distinta intensidad del ruido. Los resultados obtenidos muestran la validez de la aplicación y además permiten extraer conclusiones importantes respecto al efecto del ruido sobre la longitud laminar media y la distribución de probabilidad de las longitudes laminares.

## 1. INTRODUCCIÓN

La intermitencia es una de las rutas hacia caos determinístico. Este fenómeno se produce cuando un sistema se encuentra bajo un comportamiento regular, hasta que un pequeño cambio en un parámetro de control induce la aparición de explosiones caóticas cortas que se alternan con períodos de comportamiento aproximadamente regular de cierta duración denominados fases laminares. El concepto de intermitencia fue propuesto inicialmente en el contexto del sistema de Lorenz, donde de acuerdo a la forma del mapa de Poincaré local se clasificaron los tipos I, II y III (Manneville y Pomeau, 1979; Pomeau y Manneville, 1980). Estudios posteriores extendieron la clasificación a intermitencia tipo X, V, on-off, eyelet y de anillo (Kaplan, 1992; Price y Mullin, 1991; Platt et al., 1993; Pikovsky et al., 1997; Lee et al., 1998). Además del sistema de Lorenz, el fenómeno de intermitencia está asociado a numerosos procesos físicos: convección de Rayleigh-Bénard, osciladores no lineales periódicamente forzados, desarrollo de turbulencia en hidrodinámica, en la ecuación derivada no lineal de Schrödinger, entre otros (Dubois et al., 1983; Malasoma et al., 2004; Stavrínides et al., 2008; Sanchez-Arriaga et al., 2007).

En la caracterización de la intermitencia, se busca determinar la probabilidad de que las fases laminares presenten una duración determinada. Para conocer esta distribución es necesario conocer cómo se distribuyen los puntos de reinyección de las trayectorias en la región laminar, lo que se denomina distribución de probabilidad de reinyección (RPD). Una representación analítica de la RPD es en general difícil o imposible de obtener, y aproximar dicha función a través de los datos experimentales o numéricos también presenta dificultades debido a la necesidad de contar con grandes cantidades de datos para cubrir cada intervalo  $\Delta x$  dentro de la distribución. Por estos motivos se suelen imponer modelos de distribución de probabilidad simplificados donde la suposición de una RPD uniforme es el más utilizado (Dubois et al., 1983; Pikovsky, 1983; Kim et al., 1994; Malasoma et al., 2004), sin embargo funciones tan simples en general no representan correctamente el problema. En trabajos más recientes se recurre a aproximaciones analíticas que se obtienen a partir de cantidades auxiliares basadas en los datos numéricos, lo cual permite reproducir funciones RPD con formas más complejas (del Rio y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011), incluyendo a la distribución uniforme como una solución particular del método.

Ya que el ruido es un elemento siempre presente en la naturaleza, es de fundamental importancia conocer sus efectos en el fenómeno de intermitencia. Si bien el análisis de la influencia del ruido en el caso particular de intermitencia tipo I ya fue realizado en otros trabajos (Hirsch et al., 1982a,b; Pikovsky, 1983; Kye et al., 2003; Koronovskii y Hramov, 2008), los estudios se enfocan principalmente a la influencia sobre la región laminar, sin considerar debidamente el efecto sobre el mecanismo de reinyección global del mapa, el cual repercute directamente sobre la RPD. En este trabajo el estudio se realiza en ese sentido, utilizando para la determinación analítica de la RPD la técnica presentada en (del Rio y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Rio et al., 2012).

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Para el estudio se considera un mapa cuadrático ampliamente utilizado para el análisis de intermitencia tipo I:

$$x_{n+1} = f(x) = a x_n^2 + x_n + \varepsilon, \quad (1)$$

donde el parámetro  $\varepsilon$  es el ancho del canal en la región laminar, es decir, la distancia entre el mapa de Poincaré local y la bisectriz. Valores negativos de  $\varepsilon$  generan la aparición de dos puntos

fijos, uno estable y otro inestable que para  $\varepsilon = 0$  coalescen en el punto fijo  $x_0 = 0$ . Cuando  $\varepsilon > 0$  ya no existen puntos fijos y se produce intermitencia tipo I, siempre que haya un mecanismo que devuelva las trayectorias hacia la región  $x \approx x_0$ . En este trabajo se sigue el modelo de mapa utilizado por [del Rio et al. \(2013\)](#), donde el retorno se logra mediante la disposición de una función que se aplica para valores mayores que un  $x_r$  dado, el cual constituye el extremo derecho del mapa local (parábola (1)), y se obtiene de la condición  $f(x_r) = 1$ .

La función de retorno se define como  $g(x) = \hat{x} + h(x - x_r)^\gamma$ , donde el coeficiente  $h$  se obtiene de las condiciones  $g(x_r) = \hat{x}$  y  $g'(x_r) = f'(x_r) = 1$ , siendo  $\hat{x}$  el menor punto de reinyección LBR (lower bound of reinjection), el cual se asume perteneciente al intervalo laminar  $[-c, c]$ . El mapa global  $F(x)$  es entonces:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = ax^2 + x + \varepsilon, & \text{si } x \leq x_r, \\ g(x) = \hat{x} + \frac{1 - \hat{x}}{(1 - x_r)^\gamma} (x - x_r)^\gamma + \sigma\xi_n & \text{si } x > x_r \end{cases} \quad (2)$$

El exponente  $\gamma$  permite obtener distintas formas de las funciones RPD, para  $\gamma > 1$  las reinyecciones se concentran mayormente en  $\hat{x}$  y la RPD es decreciente, mientras que si  $0 < \gamma < 1$  las reinyecciones en el LBR tienden a cero y la RPD es creciente. El caso de  $\gamma = 1$  conduce a una RPD aproximadamente uniforme.

El término  $\sigma\xi_n$  representa el efecto del ruido, siendo  $\sigma$  la intensidad y  $\xi_n$  una variable aleatoria en el intervalo  $[-1, 1]$  cuya distribución de probabilidad se toma uniforme (“ruido blanco”). El efecto local del ruido no se considera ya que en ese caso existe una limitación que exige que  $\sigma \ll \varepsilon$ , lo cual restringe demasiado el análisis. Por otro lado, lo que interesa conocer es cómo afecta el ruido especialmente al mecanismo de reinyección global del mapa, sin incluir el efecto que significaría un ruido local que haga reingresar a la región laminar las órbitas que acaban de abandonarla.

En la Figura 1 se muestra el mapa (2) para distintos valores de  $\gamma$  y se indica el efecto del ruido sobre la posición del  $\hat{x}$ .

## 2.1. Aproximación Analítica de la RPD

La función RPD, aquí llamada  $\phi(x)$ , indica el comportamiento estadístico del fenómeno de intermitencia, pero en general su determinación a través de los datos numéricos no es una tarea simple. Para investigar la RPD, en este trabajo se extiende una metodología propuesta recientemente ([del Rio y Elaskar, 2010](#); [Elaskar et al., 2011](#); [del Rio et al., 2012](#)), en la cual el punto clave es evaluar la función RPD a través de una función auxiliar  $M(x)$ , la cual está definida sobre el intervalo laminar  $[-c, c]$ .

$$M(x) = \begin{cases} \frac{\int_{-c}^x \tau \phi(\tau) d\tau}{\int_{-c}^x \phi(\tau) d\tau}, & \text{si } \int_{-c}^x \phi(\tau) d\tau \neq 0, \\ 0, & \text{si } \int_{-c}^x \phi(\tau) d\tau = 0, \end{cases} \quad (3)$$

La función  $M(x)$  es más confiable que utilizar directamente los datos numéricos o experimentales, ya que al incorporarse las integrales, los efectos provenientes de las fluctuaciones estadísticas son reducidos. Por otro lado, el cómputo numérico de  $M(x)$  es muy sencillo, para

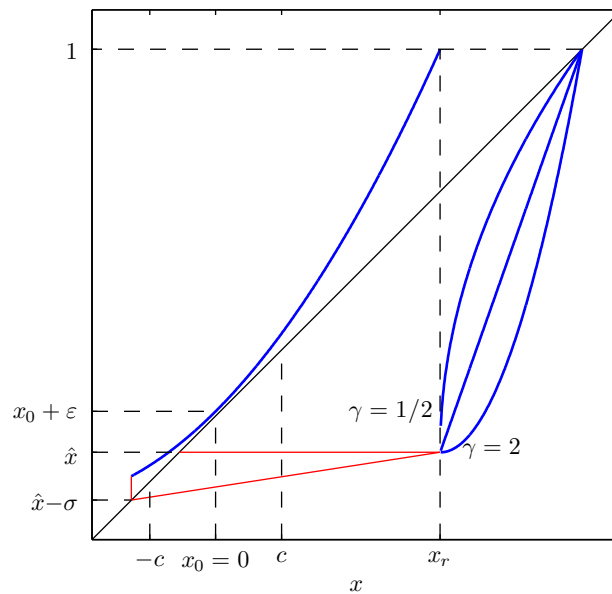


Figura 1: Mapa  $F(x)$  indicado en la ecuación (2) para distintos valores de  $\gamma$ , donde se indica la desviación del punto  $\hat{x}$  por efecto del ruido.

ello simplemente se ordenan los puntos de reinyección tal que  $x_j < x_{j+1}$ , para luego estimar  $M(x)$  mediante:

$$M(x_q) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x_j. \quad (4)$$

Para el caso sin ruido, cuando el LBR se encuentra dentro del intervalo laminar ( $\hat{x} > -c$ ), la función  $M(x)$  ha mostrado ser aproximadamente lineal (del Rio et al., 2013), es decir:

$$M(x) = m(x - \hat{x}) + \hat{x}, \quad (5)$$

donde la pendiente de la recta es  $0 < m < 1$ . De acuerdo con estos resultados, la RPD resulta (del Rio y Elaskar, 2010):

$$\phi(x) = b(x - \hat{x})^\alpha, \quad (6)$$

siendo  $b$  un parámetro de normalización y

$$\alpha = \frac{2m - 1}{1 - m}. \quad (7)$$

donde  $\alpha > -1$  ya que  $0 < m \leq 1$ .

El punto  $\hat{x}$  es un punto crítico de la RPD, donde  $\phi(\hat{x}) \rightarrow \infty$  para  $\alpha < 0$ , y  $\phi(\hat{x}) \rightarrow 0$  si  $\alpha > 0$ . El caso de  $\alpha = 0$  ( $m = 1/2$ ) corresponde a  $\phi(x) = \text{cte}$  que es el caso particular de reinyección uniforme.

## 2.2. Longitudes laminares

Además de la función RPD, una cantidad fundamental para caracterizar la intermitencia es la denominada densidad de probabilidad de las longitudes laminares  $\phi_l(l)$ , la cual indica cuál es la probabilidad de encontrar una fase laminar de una duración determinada.

Para la determinación de  $\phi_l(l)$  se considera el mapa de Poincaré local, ecuación (1), y se aproxima la ecuación en diferencias finitas  $x_{n+1} - x_n$  mediante la ecuación diferencial (Schuster y Just, 2005):

$$\frac{dx}{dl} = a x^2 + \varepsilon, \tag{8}$$

Resolviendo la ecuación anterior para el intervalo  $[-c, c]$  resulta

$$l(x, c) = \int_x^c \frac{1}{a x^2 + \varepsilon} dx = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} c \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} x \right) \right]. \tag{9}$$

La probabilidad  $\phi_l(l)$  de encontrar una fase laminar de duración entre  $l$  y  $l + dl$  es entonces (Schuster y Just, 2005):

$$\phi_l(l) = \phi[X(l, c)] \left| \frac{dX(l, c)}{dl} \right| = \phi[X(l, c)] |a [X(l, c)]^2 + \varepsilon|, \tag{10}$$

donde  $X(l, c)$  es la inversa de la función  $l(x, c)$  dada en la ecuación (9) con respecto al primer argumento, la cual para el mapa (1) puede escribirse en forma explícita.

$$X(l, c) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \tan \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} c \right) - \sqrt{a\varepsilon} l \right]. \tag{11}$$

La forma de la función  $\phi_l(l)$  depende de la combinación de parámetros  $\hat{x}$  y  $\alpha$ . En la Figura 2 se observan las diferentes posibilidades en función de estos valores, según se presentan en (del Rio et al., 2013).

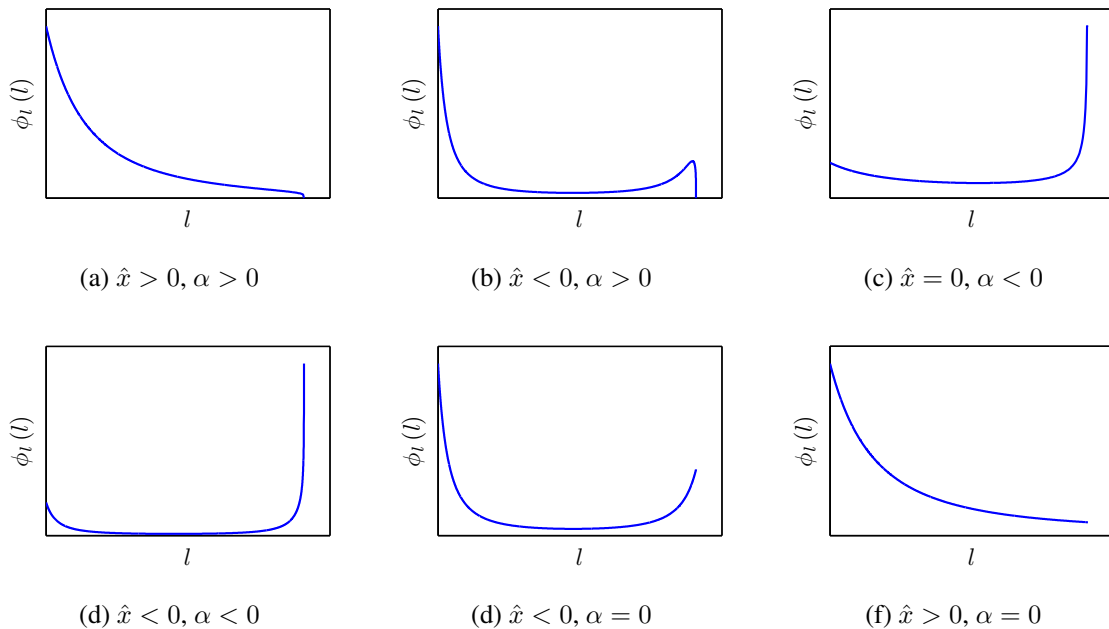


Figura 2: Distintas formas de la probabilidad de longitudes laminares  $\phi_l(l)$  en función de los valores de los parámetros  $\hat{x}$  y  $\alpha$

En la Figura 2 puede verse que existen variantes muy diferentes de formas de la función  $\phi_l(l)$ , pudiendo por ejemplo existir un máximo (caso (b)). Este hecho podría ser usado en estudios experimentales con el objetivo de identificar los parámetros desconocidos del sistema a partir de la forma de  $\phi_l(l)$  obtenida. Sin embargo, como se verá más adelante, la presencia del ruido puede alterar las formas esperadas llevando a confusiones.

### 3. EFECTO DEL RUIDO EN INTERMITENCIA TIPO I

Cuando se considera el modelo sin ruido, si el límite LBR se encuentra dentro del intervalo laminar, la función RPD correspondiente es continua y su forma depende del valor del exponente  $\gamma$  en la función de retorno  $g(x)$ . En ese caso, la determinación de la RPD a través de la función  $M(x)$  se hace de acuerdo a lo desarrollado en la sección anterior (del Rio et al., 2013).

La presencia del ruido no sólo produce la modificación de la función RPD por la redistribución de los puntos de reinyección, sino que además genera el corrimiento del punto LBR a la posición  $\hat{x} - \sigma$ . Este corrimiento hace que la función  $\phi_l(l)$  asociada se modifique respecto al modelo sin ruido, de acuerdo con las condiciones de la Figura 2 considerando el valor de  $\hat{x} - \sigma$ . Por otro lado, si este corrimiento es tal que  $\hat{x} - \sigma < -c$ , aparece una discontinuidad en la RPD cuyos detalles se explican más adelante. Más allá de la nueva posición del  $\hat{x}$ , el efecto del ruido hace que la función  $M(x)$  asociada a  $\phi(x)$  ya no sea lineal, por lo tanto a continuación se realiza una extensión de la metodología presentada previamente.

Para obtener una expresión analítica de la RPD con efecto del ruido (NRPD), se analiza la influencia del ruido sobre las trayectorias de reinyección, tal como se muestra en la Figura 1, donde una trayectoria sin ruido es perturbada pudiendo terminar dentro del intervalo  $[x - \sigma, x + \sigma]$ , siendo  $x$  el punto de mapeo para el caso sin ruido. Esto significa que la RPD sin ruido  $\phi(x)$  debe ser transformada a la nueva NRPD  $\Phi(x)$  de acuerdo a la convolución (del Rio et al., 2012):

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) G(x - z, \sigma) dz, \quad (12)$$

donde  $G(x - z, \sigma)$  es la distribución de probabilidad del término de ruido  $\sigma\xi_n$  en la ecuación (2).

Como fuente de ruido se utiliza una variable aleatoria de distribución uniforme  $\xi$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , por lo que la densidad de probabilidad  $G$  en la ecuación (12) resulta:

$$G(x, \sigma) = \frac{\Theta(x + \sigma) - \Theta(x - \sigma)}{2\sigma}, \quad (13)$$

donde  $\Theta$  es la llamada función escalón Heaviside, que es igual a 1 para un argumento mayor que cero y se anula en caso contrario.

Asumiendo en principio que  $\hat{x} - \sigma > -c$ , y teniendo en cuenta las ecuaciones (12), (13) y (6) resulta:

$$\Phi(x) = \frac{b}{2\sigma(\alpha + 1)} [(x - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+1} - \Theta(x - \hat{x} - \sigma)(x - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+1}] \quad (14)$$

La determinación del exponente  $\alpha$  puede hacerse mediante los resultados correspondientes a la función  $M(x)$  sin ruido, es decir, considerando los puntos de reinyección del mapa Ec. (2) con  $\sigma = 0$ . En ese caso  $M(x)$  es lineal y  $\alpha$  se calcula con la ecuación (7). Obviamente esta posibilidad no estará siempre disponible, pero afortunadamente la función  $M(x)$  con ruido puede aún brindar la información necesaria. En la Figura 3 se presentan resultados de funciones  $M(x)$  con y sin efecto del ruido. Puede observarse en las figuras que en la región  $x > \hat{x} + \sigma$  la función  $M(x)$  es aproximadamente lineal con una pendiente similar a la de  $M(x)$  sin ruido. Este comportamiento se repite independientemente de los valores utilizados, permitiendo así determinar el coeficiente  $\alpha$  aun si no se dispone de los resultados sin ruido.

La ecuación (14) modela el efecto del ruido en la distribución de los puntos de reinyección para  $\hat{x} - \sigma > -c$ . En caso de que el corrimiento del límite  $\hat{x}$  vaya más allá del extremo izquierdo del intervalo laminar, como ya se dijo, aparece una discontinuidad en la NRPD. Esta

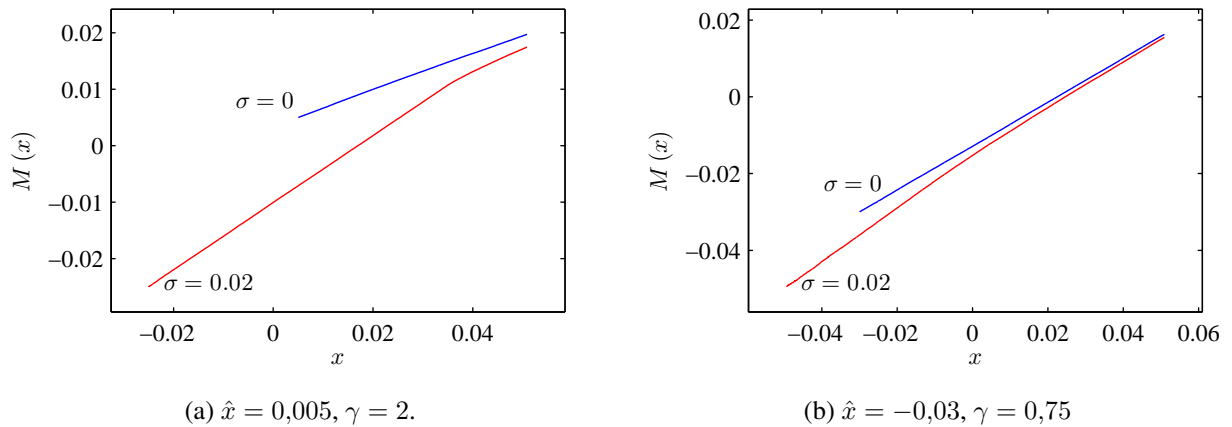


Figura 3: Comparación de los resultados de  $M(x)$  con diferentes niveles de ruido para  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $c = 0,05$  y los valores indicados. Debe notarse que para valores mayores de  $x$  las pendientes de ambas funciones son similares.

discontinuidad tiene la forma de un salto en el punto  $x_c = F(-c)$ , el cual se produce porque, debido al corrimiento del  $\hat{x}$  por debajo del extremo izquierdo del intervalo laminar, existen trayectorias que pasan por puntos  $x < -c$  las cuales se reinyectan únicamente en la región  $x < x_c$ . Esta situación genera una preponderancia de puntos de reinyección en el subintervalo  $[\hat{x}_2, x_c)$  respecto al resto del intervalo laminar, donde el punto  $\hat{x}_2$  es el menor punto de reinyección de las trayectorias provenientes de  $x < -c$ , es decir, si  $F(\hat{x} - \sigma) < -c$ ,  $\hat{x}_2 \equiv -c$ , por el contrario para  $F(\hat{x} - \sigma) > -c$ ,  $\hat{x}_2 \equiv F(\hat{x} - \sigma)$ .

Si se consideran solamente los puntos  $\hat{x}_2 \leq x < x_c$ , se observa en todos los casos que la función  $M(x)$  correspondiente también presenta una forma aproximadamente lineal, en consecuencia es posible asumir una solución de la forma

$$\phi_2(x) = bk(x - \hat{x}_2)^{\alpha_2}, \tag{15}$$

donde el coeficiente  $\alpha_2$  se calcula según la ecuación (7) considerando los puntos  $\hat{x}_2 \leq x < x_c$  y  $b$  es el parámetro de normalización. El factor  $k$  pondera la diferencia de proporción entre las reinyecciones que provienen desde  $x < -c$  y las que se producen desde  $g(x)$ .

La función adicional  $\phi_2(x)$  está definida en el subintervalo  $[\hat{x}_2, x_c)$ . La misma se suma a la solución de la ecuación (14) para  $\hat{x}_2 \leq x < x_c$  para incorporar de este modo ambos efectos en la solución general. En caso de que  $\hat{x} - \sigma > -c$  no existe concentración de puntos, entonces  $k = 0$  y en consecuencia  $\phi_2(x) = 0$ .

De acuerdo a lo anterior, la función NRPD  $\Phi(x)$  se reescribe de la siguiente manera:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{b}{2\sigma(\alpha+1)} \left[ (x - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+1} - \Theta(x - \hat{x} - \sigma)(x - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+1} \right] + & \text{si } \hat{x}_2 \leq x < x_c, \\ bk(x - \hat{x}_2)^{\alpha_2}, & \\ \frac{b}{2\sigma(\alpha+1)} \left[ (x - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+1} - \Theta(x - \hat{x} - \sigma)(x - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+1} \right], & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{16}$$

donde el parámetro de normalización  $b$  se calcula tal que  $\int_{x_{j\min}}^c \Phi(x) dx = 1$ , siendo  $x_{j\min}$  el menor punto de reinyección dado por el mayor de  $\hat{x} - \sigma$  y  $-c$ . Para determinar el factor  $k$  se utiliza la función  $M(x)$  como se describe a continuación.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3) y (16), para los puntos  $x > x_c$  resulta:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= \frac{\frac{1}{2\sigma(\alpha+1)} \int_{x_{j\min}}^x \tau \left[ (\tau - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+1} - \Theta(\tau - \hat{x} - \sigma) (\tau - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+1} \right] d\tau +}{\frac{1}{2\sigma(\alpha+1)} \int_{x_{j\min}}^x \left[ (\tau - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+1} - \Theta(\tau - \hat{x} - \sigma) (\tau - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+1} \right] d\tau +} \\
 &\quad + k \int_{\hat{x}_2}^{x_c} \tau (\tau - \hat{x}_2)^{\alpha_2} d\tau = \\
 &\quad + k \int_{\hat{x}_2}^{x_c} (\tau - \hat{x}_2)^{\alpha_2} d\tau \\
 M(x) &= \frac{\frac{1}{2\sigma(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \left\{ (x - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} [x(\alpha+2) + \hat{x} - \sigma] + \right.}{\frac{1}{2\sigma(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ (x - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} - (x_{j\min} - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} + \right.} \\
 &\quad \left. - (x_{j\min} - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} [x_{j\min}(\alpha+2) + \hat{x} - \sigma] + \right.}{\left. - \Theta(x - \hat{x} - \sigma) (x - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+2} [x(\alpha+2) + \hat{x} + \sigma] \right\} + k (x_c - \hat{x}_2)^{\alpha_2+1} \frac{x_c(\alpha_2+1) + \hat{x}_2}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}} \\
 &\quad \left. - \Theta(x - \hat{x} - \sigma) (x - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+2} \right] + k \frac{(x_c - \hat{x}_2)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)} \tag{17}
 \end{aligned}$$

Evaluando la función  $M(x)$  en algún punto  $x > x_c$ , es posible expresar el factor  $k$  en términos de los parámetros restantes:

$$k = \frac{(x - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} \left[ M(x) - \frac{x(\alpha+2) + \hat{x} - \sigma}{(\alpha+3)} \right] + (x_{j\min} - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} \left[ \frac{\hat{x}(\alpha+3) - \sigma}{(\alpha+3)} \right] +}{\frac{(x_c - \hat{x}_2)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2+1)} \left[ \frac{x_c(\alpha_2+1) + \hat{x}_2}{(\alpha_2+2)} - M(x) \right] 2\sigma(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ \frac{x(\alpha+2) + \hat{x} + \sigma}{(\alpha+3)} - M(x) \right] \tag{18}$$

Finalmente, el parámetro de normalización  $b$  resulta:

$$b = \left[ \frac{k(x_c - \hat{x}_2)^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} + \frac{(c - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} - (x_{j\min} - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+2} - \Theta(c - \hat{x} - \sigma)(c - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+2}}{2\sigma(\alpha+1)(\alpha+2)} \right]^{-1} \tag{19}$$

De esta manera quedan definidos todos los parámetros que intervienen en la función  $\Phi(x)$ .

#### 4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS NUMÉRICOS Y ANALÍTICOS

Para analizar la densidad de probabilidad de las longitudes laminares con efecto ruido  $\Phi_l(l)$ , se utiliza la ecuación (10), donde  $\phi[X(l, c)]$  se reemplaza por su versión con ruido  $\Phi[X(l, c)]$  y, teniendo en cuenta que el efecto del ruido se manifiesta en la función RPD, para determinar  $X(l, c)$  no se considera dicho efecto y por lo tanto se utiliza la ecuación (11).

En las Figuras 4 y 5 se muestran resultados para distintos valores de  $\varepsilon$ ,  $\hat{x}$ ,  $\gamma$  y  $\sigma$ , con  $a = 1$  y  $c = 0,05$ . En estas figuras se realiza la comparación entre los resultados obtenidos numéricamente (puntos color azul) y los correspondientes a la aproximación analítica presentada previamente (línea sólida color rojo). Además se muestra también el resultado del modelo sin ruido ( $\sigma = 0$ ) para observar claramente los efectos del ruido.

En las Figuras 4 y 5 puede observarse una muy buena concordancia entre los resultados numéricos y analíticos, tanto para la función NRPD como para la probabilidad de las longitudes laminares  $\Phi_l(l)$ ,



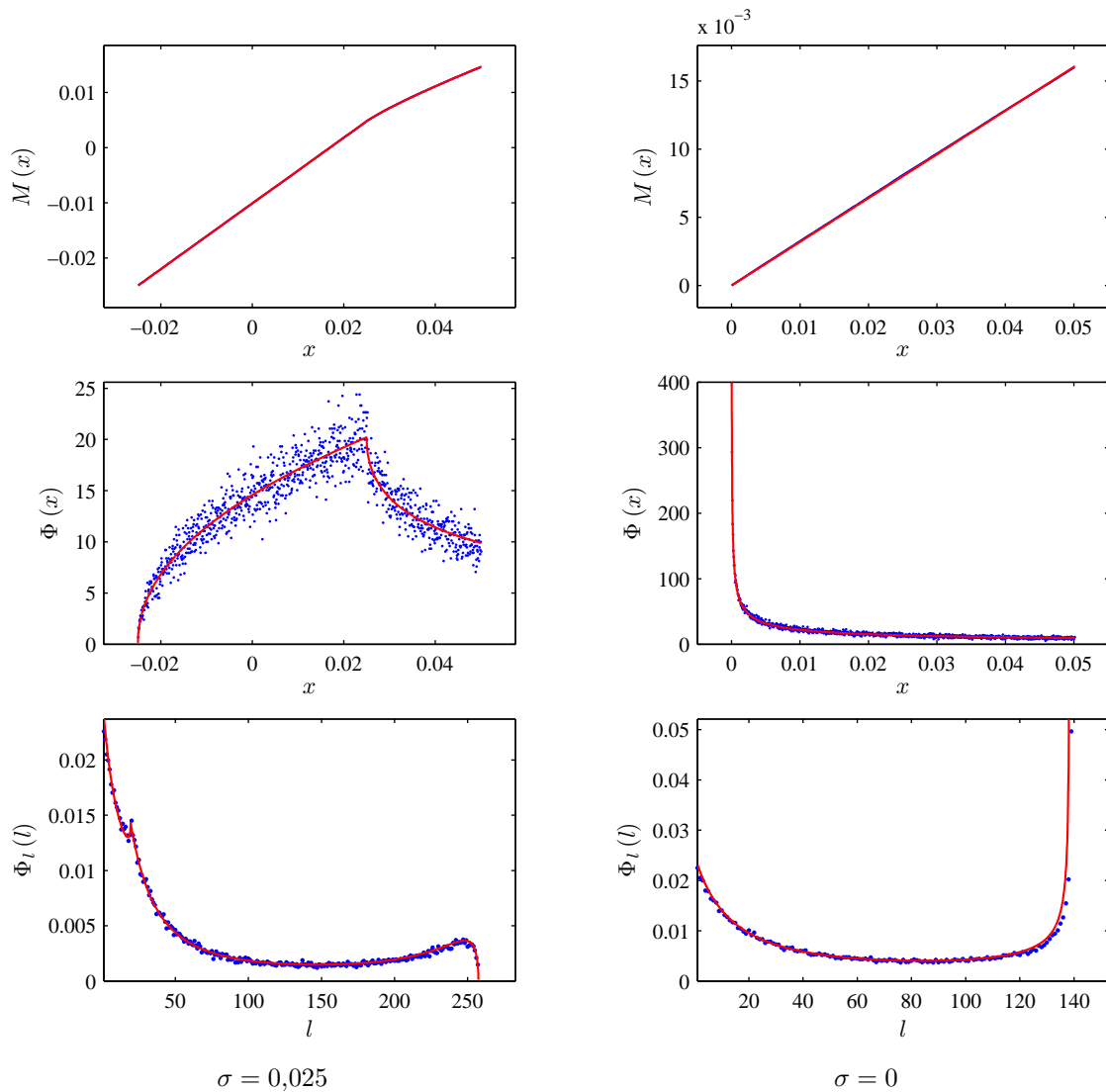


Figura 4: Resultados de la funciones  $M(x)$ , NRPD y de la probabilidad de longitudes laminares para el mapa (2) con  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $a = 1$ ,  $\hat{x} = 0$ ,  $\gamma = 2$  y  $c = 0,05$ . Las pendientes son  $m = 0,320$  ( $\alpha = -0,529$ ) para el caso sin ruido,  $m = 0,596$  ( $\alpha' = 0,479$ ) y  $m = 0,331$  ( $\alpha = 0,505$ ) para cada región laminar de la función  $M(x)$  con efecto del ruido.

destacándose a primera vista la fuerte influencia del ruido en la forma de  $\Phi(x)$  y  $\Phi_l(l)$ , en tanto que  $M(x)$  evidencia la pérdida de linealidad respecto al resultado sin ruido. En el caso de la Figura 4, la característica  $\phi(\hat{x}) \rightarrow \infty$  desaparece por efecto del ruido y se verifica  $\phi(\hat{x} - \sigma) \rightarrow 0$ , lo cual repercute en la probabilidad  $\Phi_l$  que se comporta como si fuera  $\alpha > 0$  con  $\hat{x} < 0$  (ver Figura 2-(b)). El otro punto a destacar es la discontinuidad que aparece en la Figura 5 en las funciones  $\Phi(x)$  y  $\Phi_l(l)$ , la cual se corresponde con un quiebre en la función  $M(x)$ , tal como sucede en el caso sin ruido cuando el punto LBR se encuentra fuera del intervalo laminar, lo cual se provoca por el efecto del ruido sobre la posición del LBR ( $\hat{x} - \sigma < -c$ , produciéndose de esta manera la concentración de puntos en el subintervalo  $[-c, x_c]$ ).

Otro importante resultado que se deduce de las Figuras 4 y 5 está dado por la relación entre las pendientes de la función  $M(x)$  en cada región laminar. Considerando la Figura 4, puede observarse que el exponente  $\alpha'$  correspondiente a la región izquierda de  $M(x)$  verifica la expresión  $\alpha' \approx \alpha + 1$ , que es el mismo exponente de la ecuación (14). Este comportamiento, el cual fue verificado por numerosas simulaciones con distintas condiciones, implica que la pendiente de región “con ruido” de  $M(x)$  no

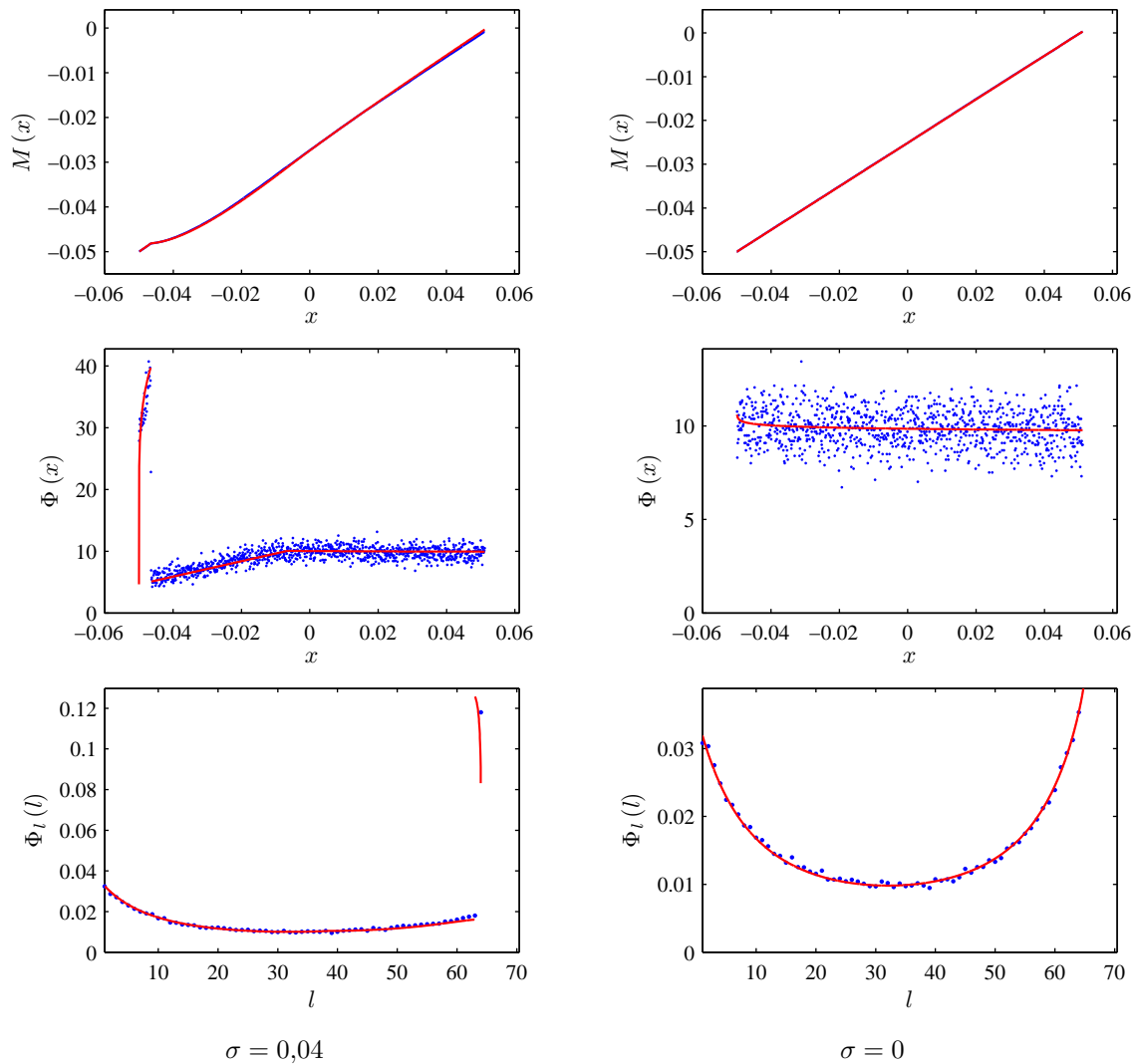


Figura 5: Igual que la Figura 4 con  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $a = 1$ ,  $\hat{x} = -0,05$ ,  $\gamma = 1$  y  $c = 0,05$ , resultando  $\alpha = -0,011$  (reinyección aproximadamente uniforme).

depende de la intensidad del ruido, sino que está definida únicamente por la forma de la función de retorno (exponente  $\gamma$ ).

Los resultados descritos anteriormente tienen significativas consecuencias. Por un lado debe notarse que la relación de las pendientes de  $M(x)$  permite obtener el exponente  $\alpha$  del problema sin efecto ruido simplemente mediante  $\alpha = \alpha' - 1$ . Por otro lado, estos resultados muestran que pueden existir situaciones en las cuales un función  $M(x)$  lineal con efecto ruido puede confundirse con su versión sin ruido cuyo verdadero exponente es  $\alpha - 1$ .

#### 4.1. Influencia del ruido en la relación característica

A continuación se realiza el análisis de la influencia del ruido en la llamada relación característica, la cual vincula la longitud laminar media  $\langle l \rangle$  con el parámetro de control  $\varepsilon$  a través del exponente crítico  $\beta$  ( $\langle l \rangle \propto \varepsilon^\beta$ ). Esta propiedad permite conocer de qué manera evoluciona la duración media de las fases laminares en función del parámetro de control.

La longitud laminar media  $\langle l \rangle$  depende de la longitud del intervalo laminar y de la probabilidad de

reinyección que en este caso es  $\Phi(x)$ :

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^c \Phi(x) l(x, c) dx. \tag{20}$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y sabiendo que dentro del subintervalo  $[-c, x_c)$  la longitud laminar es igual a la longitud laminar máxima  $l(-c, c)$ , se puede escribir:

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^c \Phi'(x) l(x, c) dx + l(-c, c) \int_{-c}^{x_c} \phi_2(x) dx, \tag{21}$$

donde  $\Phi'(x)$  es la NRPD de la ecuación (14). Si  $\hat{x} - \sigma > -c$ ,  $\phi_2(x) = 0$  y el límite inferior de la integral del primer término en la ecuación (21) es  $\hat{x} - \sigma$  ya que  $\Phi'(x) = 0$  para  $x < \hat{x} - \sigma$ . En caso contrario la ecuación anterior resulta:

$$\langle l \rangle = \frac{b}{2\sigma(\alpha + 1)} \int_{-c}^c \left[ (x - \hat{x} + \sigma)^{\alpha+1} - \Theta(x - \hat{x} - \sigma) (x - \hat{x} - \sigma)^{\alpha+1} \right] l(x, c) dx + l(-c, c) \frac{bk}{\alpha_2 + 1} (x_c - \hat{x}_2)^{\alpha_2+1}. \tag{22}$$

La integral del primer término no tiene solución analítica, por lo tanto debe resolverse numéricamente.

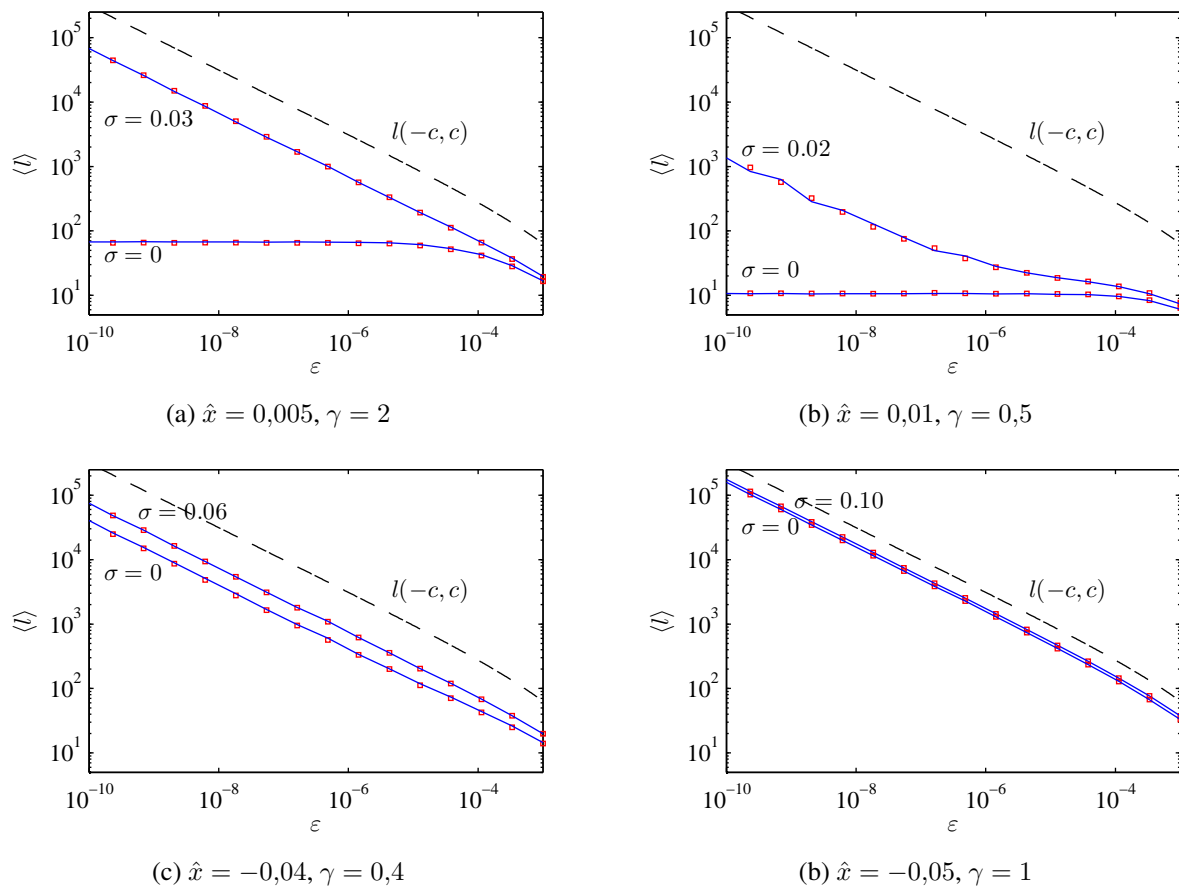


Figura 6: Longitud laminar media en función del parámetro de control para el mapa (2) con  $a = 1$ ,  $c = 0,05$  y los valores indicados en cada caso.

En la Figura 6 se muestra en escala logarítmica la variación de  $\langle l \rangle$  en función del parámetro de control  $\epsilon$  para distintas intensidades de ruido  $\sigma$  y combinaciones de valores  $\hat{x}$  y  $\gamma$ . En este caso los símbolos rojos

representan los resultados analíticos y la línea continua azul los obtenidos numéricamente. Además en la figura se indica en línea de trazos la variación de la longitud laminar máxima  $l(-c, c)$ .

Según Kim et al. (1994), el valor del exponente  $\beta$  para  $\varepsilon \rightarrow 0$  depende de la posición del punto LBR, para  $\hat{x} \approx -c$   $\beta \rightarrow -1/2$ , mientras que si  $\hat{x} > 0$  es  $\beta = 0$ , registrándose una transición para valores intermedios del LBR vía  $\beta = 1/4$  para  $\hat{x} = 0$ . En las Figuras 6-(a) a (d) se observa que el efecto del ruido sobre la relación característica se debe principalmente al corrimiento del punto LBR, lo cual produce un cambio en el exponente  $\beta$  para  $\hat{x} > 0$  con  $\hat{x} - \sigma < 0$ . Por otro lado, para  $\hat{x} \approx 0$  la curva de  $\langle l \rangle$  se mueve paralelamente en la dirección de la longitud laminar máxima  $l(-c, c)$  manteniendo  $\beta \approx -1/2$ , tal como ocurre en el caso sin ruido cuando el LBR está fuera del intervalo laminar. Todas estas modificaciones son independientes de la forma de la función NRPD.

Debido a que no se considera el efecto del ruido sobre la región laminar, los resultados descritos anteriormente difieren de aquellos obtenidos en el análisis del efecto del ruido en intermitencia tipo II y III llevado a cabo por del Rio et al. (2012). En ese caso la presencia del ruido genera una saturación en la longitud laminar media para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la cual se produce porque el tiempo de escape debido a la dinámica del mapa es mayor que el tiempo de escape aleatorio debido al ruido cuando  $\sigma > \varepsilon$ . Como consecuencia de esta saturación, la longitud laminar media alcanza un valor máximo constante para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , el cual depende de la intensidad del ruido.

Considerando ahora que el ruido influye sobre todo el mapa, de manera que el término  $\sigma\xi_n$  se incluye en ambas ecuaciones del mapa 2, se observa que el fenómeno de saturación también se produce para intermitencia tipo I. Para visualizar esta afirmación se presenta la Figura 7 en la cual se muestra la relación característica para diferentes intensidades de ruido y exponentes  $\gamma$  para obtener distintas formas de la NRPD. En esta figura sólo se muestran resultados numéricos ya que la expresión analítica de la longitud laminar media involucra la definición de  $l(x, c)$  de la ecuación (9) que ya no es válida cuando se considera presencia de ruido en el intervalo laminar.

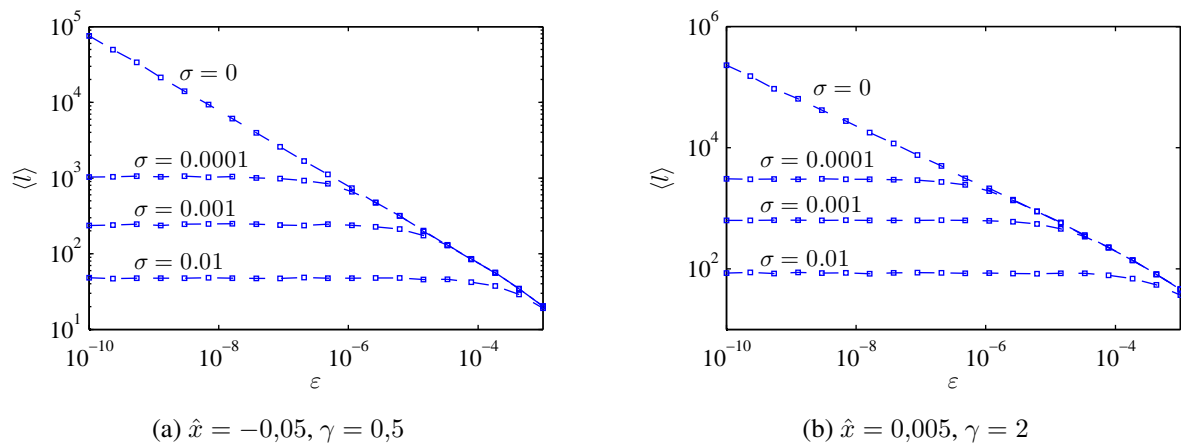


Figura 7: Relación característica  $\langle l \rangle \propto \varepsilon^\beta$  para el mapa (2) con  $a = 1, c = 0,05$  y los valores indicados. El ruido se aplica en todo el mapa. Los cuadrados indican los resultados numéricos y la línea de trazos los datos, alcanzándose la correspondiente saturación para pequeños valores de  $\varepsilon$ .

Puede observarse en la figura que la saturación se manifiesta de igual forma que en intermitencia tipo II y III (del Rio et al., 2012), pero a diferencia de esos casos, en intermitencia tipo I sólo depende de la intensidad del ruido y no se ve afectada por la forma de la NRPD, en acuerdo con trabajos anteriores (Hirsch et al., 1982a; Koronovskii y Hramov, 2008). Una importante conclusión de este análisis es que, de manera similar a los resultados de la Figura 6, la presencia del ruido modifica fuertemente las formas esperadas de la relación característica, ya que en el caso de la Figura 7, los gráficos de indican que el exponente crítico es  $\beta = 0$  lo que sugeriría que el LBR es mayor que cero (Kim et al., 1994).

## 5. CONCLUSIONES

Si bien existen numerosos trabajos que presentan el análisis del efecto del ruido en intermitencia tipo I, a criterio de los autores, éstos se enfocan en el estudio del efecto del ruido sobre la región laminar sin considerar debidamente el efecto sobre la densidad de probabilidad de reinyección (RPD). Por este motivo, en este trabajo se realiza este análisis, el cual se basa en la técnica presentada en (del Rio y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Rio et al., 2012).

En primera término, se destaca que la presencia de ruido en intermitencia tipo I genera cambios significativos en la función RPD, los cuales se hacen más evidentes en caso de que la versión sin ruido de esta función sea monótonamente decreciente. Además, para intensidades de ruido suficientemente grandes, puede presentarse inclusive una discontinuidad en forma de salto en la NRPD. No obstante cuál sea la forma de la función RPD por efecto del ruido, la adaptación de la metodología presentada en (del Rio y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Rio et al., 2012) ha mostrado ser válida para la representación analítica de dicha función.

En cuanto al efecto del ruido sobre la relación característica, se ha constatado mediante simulaciones numéricas cuyos resultados concuerdan muy bien con las aproximaciones analíticas, que independientemente de la forma de la función NRPD, el cambio en la relación característica se debe al corrimiento del menor punto de reinyección (LBR), el cual se desplaza a la posición  $\hat{x} - \sigma$ , siendo  $\sigma$  la intensidad del ruido. Esta nueva posición define el valor del exponente crítico  $\beta$  de acuerdo a lo desarrollado por Kim et al. (1994).

Los resultados anteriores muestran que el ruido tiene una gran influencia en el fenómeno de intermitencia, y su presencia dificulta en gran medida la identificación de los parámetros del sistema cuando se trabaja con datos experimentales o numéricos. En esos casos las formas las propiedades estadísticas del problema pueden llevar a malas interpretaciones debido a las modificaciones producidas por el ruido.

## REFERENCIAS

- del Rio E. y Elaskar S. New Characteristic Relation in Type-II Intermittency. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 20:1185–1191, 2010.
- del Rio E., Elaskar S., y Donoso J. Laminar length and characteristic relation in type-I intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, submitted, 2013.
- del Rio E., Sanjuan M., y Elaskar S. Effect of noise on the reinjection probability density in intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17:3587–3596, 2012.
- Dubois M., Rubio M., y Berge P. Experimental Evidence of Intermittencies Associated with a Subharmonic Bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 51(16):1446–1449, 1983.
- Elaskar S., del Rio E., y Donoso J. Reinjection Probability Density in Type-III Intermittency. *Physica A*, 390:2759–2768, 2011.
- Hirsch E., Huberman B., y Scalapino D. Theory of Intermittency. *Phys. Rev. A*, 25(1):519–532, 1982a.
- Hirsch E., Nauenberg M., y Scalapino D. Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation. *Phys. Lett. A*, 87(8):391–393, 1982b.
- Kaplan H. Return to Type-I Intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 68:553–557, 1992.
- Kim C., Kwon O., Lee E., y Lee H. New Characteristic Relation in Type-I Intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 73(4):525–528, 1994.
- Koronovskii A. y Hramov A. Type-II intermittency characteristics in the presence of noise. *Eur. Phys. J. B*, 62:447–452, 2008.
- Kye W., Rim S., Kim C., Lee J., Ryu J., Yeom B., y Park Y. Experimental observation of characteristic relations of type-III intermittency in the presence of noise in a simple electronic circuit. *Phys. Rev. E*, 68(3):036203, 2003.
- Lee K., Kwak Y., y Lim T. Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 81:321–324, 1998.
- Malasoma J., Werny P., y Boiron M. Multichannel type-I intermittency in two models of Raileigh-Bénard

- convection. *Chaos Solitons Fract.*, 51(15):487–500, 2004.
- Manneville P. y Pomeau Y. Intermittency and Lorenz model. *Phys. Lett. A*, 75:1–2, 1979.
- Pikovsky A. A new type of intermittent transition to chaos. *J. Phys A: Math. Gen.*, 16:L109–L112, 1983.
- Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., y Kurths J. Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 79:47–50, 1997.
- Platt N., Spiegel E., y Tresser C. On-Off Intermittency: A Mechanism for Bursting. *Phys. Rev. Lett.*, 70:279–282, 1993.
- Pomeau Y. y Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical system. *Commun. Math. Phys.*, 74:189–197, 1980.
- Price T. y Mullin P. An experimental observation of a new type of intermittency. *Physica D*, 48:29–52, 1991.
- Sanchez-Arriaga G., Sanmartin J., y Elaskar S. Damping models in the truncated derivative nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Plasmas*, 14:082108, 2007.
- Schuster H. y Just W. *Deterministic Chaos*. Wiley VCH, Mörlenbach, 4th. edición, 2005.
- Stavrinides S., Miliou A., Laopoulos T., y Anagnostopoulos A. The Intermittency Route to Chaos of an Electronic Digital Oscillator. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 18(5):1561–1566, 2008.