

APROXIMACIÓN DEL TRANSPORTE DE AGUA EN SUELOS NO SATURADOS UTILIZANDO DIFERENCIAS FINITAS

José L. Martínez, Carlos E. Schvezov y Mario R. Rosenberger

Instituto de Materiales de Misiones (IMAM), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN), Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Félix de Azara 1552, 3300 Posadas, Misiones, Argentina, martinez.otros@gmail.com, <http://www.fceqyn.unam.edu.ar>

Palabras Clave: Transporte de agua, Suelo, Medios porosos, Ecuación de Richards, Diferencias finitas, Condición de Neumann

Resumen. Se desarrolló y validó un modelo matemático unidimensional para simular el flujo vertical del agua en suelo no saturado. El modelo utiliza la ecuación diferencial parcial de Richards que gobierna el movimiento del agua en suelo, expresada en términos del potencial matricial (capacidad de absorción de agua) como función de la profundidad y el tiempo. En la aproximación de la ecuación de Richards se utilizó el método de diferencias finitas, imponiendo condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann en suelo isotrópico y sin pendiente. Se modelaron contornos impermeables, drenaje libre y flujos de agua constantes. La aproximación se basó en un esquema modificado del método Crank-Nicolson; además, dentro de cada paso de tiempo se incorporó un proceso iterativo de refinamiento del potencial matricial, que finaliza cuando se cumple la condición de tolerancia impuesta de 10^{-9} . Se validó el modelo con otros encontrados en la literatura, evaluando conservación de la masa para contornos impermeables; y también, drenaje libre en la parte inferior del dominio. Se utilizaron cuatro diferentes tipos de suelo y condiciones de contorno. Se encontró buen acercamiento entre los resultados del modelo y la literatura. En todos los casos, se verificó que la tasa de infiltración a tiempo infinito converge al valor de la conductividad hidráulica saturada. Se verificó que al imponer una condición de drenaje libre en el contorno inferior de suelos de diferentes profundidades, se obtuvieron resultados iguales excepto en la proximidad de ese contorno. Por tanto, los resultados del modelo de drenaje libre fueron independientes de la profundidad del suelo. Se comprobó conservación de la masa utilizando tres configuraciones para la conductividad hidráulica no saturada en medio paso: media aritmética, media geométrica y la media armónica, obteniendo un error relativo cercano al 10% y verificando que este valor disminuye cuando aumenta el valor del tiempo simulación.

1 INTRODUCCIÓN

Por mucho tiempo, los suelos saturados fueron estudiados ampliamente, debido a su implicancia crítica en ciertas obras de infraestructura y a la forma simple que toman los modelos para explicar su comportamiento, quedando relegado el estudio de suelos no saturados por la falta de interés y a lo complejo de los modelos necesarios para su estudio (Celia et al. 1990). Actualmente, considerando que gran parte de la actividad industrial se encuentra ubicada donde predominan suelos no saturados, es necesario avanzar en nuevos estudios de modelación matemática para entender su comportamiento (Alfaro et al. 2008). El primer paso para predecir y calcular la movilidad del agroquímico en suelo no saturado, es modelar el movimiento del agua en suelo.

En este trabajo, el modelo matemático para el movimiento del agua en suelo, se construye a partir de la ecuación general del movimiento del agua en suelo; esta ecuación diferencial parcial es conocida con el nombre de ecuación de Richards (Harter et al. 2011). La ecuación de Richards expresa la variación del contenido de agua en función del tiempo y de la posición. El contenido de agua puede ser expresado como humedad volumétrica θ o como potencial matricial ψ , donde la relación entre ellos está dada por la Ec. (2). En este trabajo se utiliza potencial matricial ya que permite obtener una solución continua en la transición del régimen no saturado al saturado (Caviedes et al. 2013).

En nuestro trabajo anterior (Martinez et al. 2013) se estudió el comportamiento del agua bajo condiciones de contorno de tipo Dirichlet, representando situaciones donde el valor de potencial matricial en las fronteras del dominio era especificado. En este trabajo se avanza con el estudio de condiciones de contorno de tipo Neumann que permitan analizar eventos como contornos impermeables y drenaje libre. En una condición de contorno impermeable, el flujo de agua hacia o desde el dominio es nulo ($q_i^l = 0$). En drenaje libre (o semi-infinito), el movimiento del agua se debe exclusivamente por acción de la gravedad ($\partial\psi/\partial z = 0$) (Caviedes et al. 2013). Asimismo, se estudia el comportamiento de la infiltración acumulada y la tasa de infiltración. En estado estacionario (el perfil de humedad no presenta variación con el tiempo) la tasa de infiltración tiene el mismo valor que la conductividad hidráulica saturada.

En este trabajo la ecuación de Richards se resuelve numéricamente utilizando el método de diferencias finitas y el modelo matemático desarrollado se valida en base a otros modelos disponibles en la literatura.

2 MODELO MATEMÁTICO Y ECUACIONES DE GOBIERNO

La ecuación de Richards en términos de potencial matricial con coordenada vertical que crece hacia arriba (Wendland et al. 2010), puede ser expresada unidimensionalmente como:

$$C(\psi) \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (1)$$

Donde $C(\psi) = \partial\theta/\partial\psi$ es la capacidad específica del suelo [L^{-1}], θ es la humedad volumétrica [L^3L^{-3}], ψ es el potencial matricial [L], $K(\psi)$ es la conductividad hidráulica [LT^{-1}], t es el tiempo [T], y z es la coordenada vertical [L].

Las condiciones iniciales y de contorno (condiciones de Dirichlet) utilizadas para la resolución de la Ec. (1) son: $\psi(z,0) = \psi^{inicial}(z)$; $\psi(0,t) = \psi_0$ y $\psi(-L,t) = \psi_L$, $-L \leq z \leq 0$. Las condiciones de Neumann son: $q(0,t) = 0$ y $q(-L,t) = 0$ para flujo impermeable, y, $q(-L,t) = -K_s$ para drenaje libre. Para la resolución de la ecuación de Richards es necesario especificar las relaciones constitutivas. En este trabajo se utilizan las ecuaciones de Mualem – van Genuchten (Caviedes et al. 2013):

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + (\alpha|\psi|)^j)^m} + \theta_r & \psi \leq 0 \\ \theta_s & \psi > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (3)$$

$$K(\psi) = \begin{cases} K_s S_e^{0,5} \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 & \psi \leq 0 \\ K_s & \psi > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$C(\psi) = \begin{cases} = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -mj\alpha^j \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + \alpha^j |\psi|^j)^{m+1}} |\psi|^j \psi^{-1} & \psi \leq 0 \\ 0 & \psi > 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$m = 1 - \frac{1}{j} \quad (6)$$

Donde $\theta(\psi)$ es la humedad volumétrica [L³L⁻³], θ_r es el contenido de humedad residual [L³L⁻³], θ_s es el contenido de humedad saturada [L³L⁻³], K_s es la conductividad hidráulica saturada [LT⁻¹], α [L⁻¹], m y j son parámetros de ajuste característicos de cada tipo de suelo.

3 MODELO NUMÉRICO

Para resolver numéricamente la Ec. (1) se utilizó un esquema de diferencias finitas implícito basado en un método de Crank-Nicolson modificado (Romano et al. 1998).

El perfil del suelo fue discretizado en partes iguales de espesor Δz identificados por los nodos i , y un paso de tiempo variable Δt identificados por los superíndices l (ver Figura 1).

$$\begin{aligned} C(\psi_i^l) \left(\frac{\psi_i^{l+1} - \psi_i^l}{\Delta t} \right) &= \frac{1}{\Delta z} \left[K \left(\psi_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \left(\frac{\psi_{i+1}^{l+1} - \psi_{i+1}^l}{2\Delta z} + \frac{\psi_{i+1}^l - \psi_i^l}{2\Delta z} + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. - K \left(\psi_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \left(\frac{\psi_i^{l+1} - \psi_{i-1}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{\psi_i^l - \psi_{i-1}^l}{2\Delta z} + 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Donde los subíndices $i \pm 1$, i , y $i \pm 1/2$ se refieren a la profundidad del suelo $z \pm \Delta z$, z , $z \pm \Delta z/2$, respectivamente. $K(\psi_{i+1/2}^l)$ y $K(\psi_{i-1/2}^l)$ son calculados tomando el promedio de los valores de la conductividad hidráulica no saturada de los nodos vecinos.

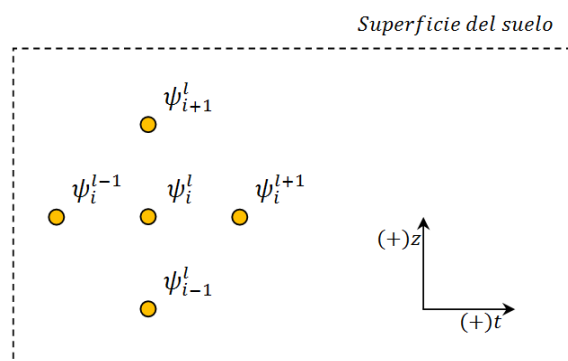


Figura 1: Discretización del dominio

Reordenando la Ec. (7) se tiene la siguiente relación general para nodo interior:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i-1/2}^l)\psi_{i-1}^{l+1} + \left[\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} (K(\psi_{i+1/2}^l) + K(\psi_{i-1/2}^l)) + 1 \right] \psi_i^{l+1} + \\
 & \quad -\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i+1/2}^l)\psi_{i+1}^{l+1} = \\
 & \quad + \frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} 2\Delta z (K(\psi_{i+1/2}^l) - K(\psi_{i-1/2}^l)) + \frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i-1/2}^l)\psi_{i-1}^l - \\
 & \quad \left[\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} (K(\psi_{i+1/2}^l) + K(\psi_{i-1/2}^l)) - 1 \right] \psi_i^l + \frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i+1/2}^l)\psi_{i+1}^l
 \end{aligned} \tag{8}$$

Las ecuaciones para los nodos de contorno pueden ser:

$$\psi_i^l = \text{Valor especificado (Dirichlet)} \tag{9}$$

$$q_i^l = \text{Flujo especificado (Neumann)} \tag{10}$$

A partir de la ecuación de Darcy-Buckingham, q_i fue aproximado como:

$$q_i^l = -K(\psi_i^l) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) = -K(\psi_i^l) \left(\frac{\psi_{i+1}^l - \psi_{i-1}^l}{2\Delta z} + 1 \right) \tag{11}$$

Para resolver esta aproximación en los contornos se utilizaron nodos ficticios ubicados fuera del dominio de estudio. El flujo especificado puede tomar distintos valores: 0 (cero) para representar impermeabilidad, $-K_s$ (conductividad hidráulica saturada) para drenaje libre, una función o una constante. Con las ecuaciones (8), (9) y (10) se obtiene el siguiente sistema tridiagonal de ecuaciones lineales. Si G vale cero es contorno de Dirichlet, si vale 1 es Neumann.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} G a_n d_n + 1 & -a_n(b_n + c_n) G & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-1} c_{n-1} & a_{n-1} d_{n-1} + 1 & -a_{n-1} b_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -a_i c_i & a_i d_i + 1 & -a_i b_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_2 c_2 & a_2 d_2 + 1 & -a_2 b_2 \\ 0 & \dots & 0 & -a_1(b_1 + c_1) G & G a_1 d_1 + 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \psi_n^{l+1} \\ \psi_{n-1}^{l+1} \\ \vdots \\ \psi_i^{l+1} \\ \vdots \\ \psi_2^{l+1} \\ \psi_1^{l+1} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \left[+2\Delta z a_n e_n + 4\Delta z a_n b_n \left(-\frac{q_n}{K(\psi_n^l)} - 1 \right) + a_n(b_n + c_n)\psi_n^l - (a_n d_n - 1)\psi_n^l \right] G + (1 - G) \times \text{Valor esp.} \\ + a_{n-1} 2\Delta z e_{n-1} + a_{n-1} c_{n-1} \psi_{n-2}^l - (a_{n-1} d_{n-1} - 1)\psi_{n-1}^l + a_{n-1} b_{n-1} \psi_n^l \\ \vdots \\ + a_i 2\Delta z e_i + a_i c_i \psi_{i-3}^l - (a_i d_i - 1)\psi_{i-2}^l + a_i b_i \psi_{i-1}^l \\ \vdots \\ + a_2 2\Delta z e_2 + a_2 c_2 \psi_1^l - (a_2 d_2 - 1)\psi_2^l + a_2 b_2 \psi_3^l \\ \left[+2\Delta z a_1 e_1 + 4\Delta z a_1 c_1 \left(\frac{q_1}{K(\psi_1^l)} + 1 \right) - (a_1 d_1 - 1)\psi_1^l + a_1(b_1 + c_1)\psi_2^l \right] G + (1 - G) \times \text{Valor esp.} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Donde:

$$a = \frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} \tag{12}$$

$$b = K(\psi_{i+1/2}^l) \tag{13}$$

$$c = K(\psi_{i-1/2}^l) \tag{14}$$

$$d = K(\psi_{i+1/2}^l) + K(\psi_{i-1/2}^l) \tag{15}$$

$$e = K(\psi_{i+1/2}^l) - K(\psi_{i-1/2}^l) \tag{16}$$

Sobre el sistema de ecuaciones mencionado anteriormente se aplica el siguiente esquema de predictor/corrector:

$$[A_i^l] * [\psi_i^{l+1}] = [B_i^l] \quad (17)$$

$$[A_i^{l+1}] * [\psi_i^{(l+1)}] = [B_i^{l+1}] \quad (18)$$

⋮

$$[A_i^{(l+1)^{r-1}}] * [\psi_i^{(l+1)^r}] = [B_i^{(l+1)^{r-1}}] \quad (19)$$

En la etapa de predicción (Ec. (17)), las matrices $[A_i^l]$ y $[B_i^l]$ se resuelven con valores de potencial matricial en tiempo presente, ψ_i^l , obteniendo una solución en tiempo inmediato superior $[\psi_i^{l+1}]$. Esta solución ingresa nuevamente al sistema de ecuaciones para dar comienzo a la etapa de corrección (Ec. (18)), donde las matrices $[A_i^{l+1}]$ y $[B_i^{l+1}]$ se resuelven utilizando valores de potencial matricial en el tiempo inmediato superior ψ_i^{l+1} . Este proceso de corrección se realiza r veces (Ec. (19)) hasta cumplir con el criterio de tolerancia impuesto:

$$\frac{\psi_i^{(l+1)^r} - \psi_i^{(l+1)^{r-1}}}{\psi_i^{(l+1)^r}} < 10^{-9} \quad (20)$$

La infiltración acumulada (IA) y la tasa de infiltración (TI) son magnitudes derivadas de $\psi(z, t)$. Ambas se calculan utilizando la ecuación de Darcy-Buckingham (Ec. (11)), afectando los nodos $n - 1$ y $n - 2$ (Ver Figura 2) y siguiendo la aproximación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\psi_{n-1}^l - \psi_{n-2}^l}{\Delta z} \quad (21)$$

Para el cálculo de estas magnitudes se utilizaron las ecuaciones:

$$IA(t) = -K(n-1) \left(\frac{\psi_{n-1}^l - \psi_{n-2}^l}{\Delta z} + 1 \right) \Delta t \quad (22)$$

$$TI(t) = \frac{IA(t+1) - IA(t)}{\Delta t} \quad (23)$$

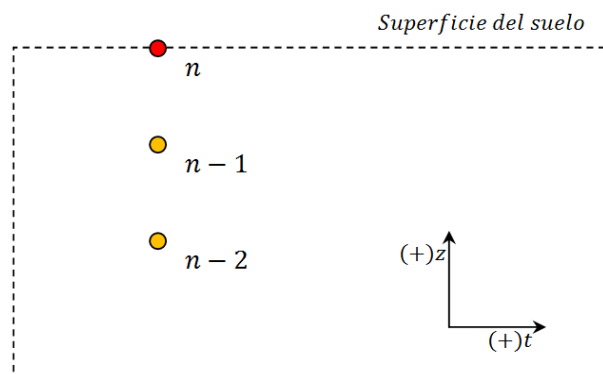


Figura 2: Nodos afectados en el cálculo de infiltración acumulada y tasa de infiltración

4 IMPLEMENTACIÓN Y APLICACIONES

Para la implementación del modelo desarrollado, se creó un código computacional propio utilizando el software Wolfram Mathematica 8.0. Las simulaciones fueron calculadas en una computadora con procesador Intel® Core™ i3-2310 CPU@2.10GHz y 4 GB de memoria RAM.

El modelo fue aplicado para simular cuatro tipos de suelo extraídos de la literatura y que se describen a continuación.

La primera aplicación (Neumann et al. 2011) considera los siguientes parámetros del suelo para las ecuaciones de Mualem–van Genuchten: $\alpha = 3,6 \text{ m}^{-1}$; $j = 1,56$; $K_s = 0,249 \text{ m día}^{-1}$; $\theta_s = 0,43 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$; y $\theta_r = 0,078 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$. La profundidad de la muestra de suelo es de 1 m. La condición inicial es $\psi(z, t = 0) = -1 \text{ m}$, $0 \leq z \leq 1$. La condición de contorno superior es $\psi(z = 0, t) = 0$; $t > 0$ y el contorno inferior es una condición de drenaje libre, $q(z = 1, t) = -K_s$; $t > 0$.

La segunda aplicación (Mollerup et al. 2012) considera los siguientes parámetros del suelo para las ecuaciones de Mualem–van Genuchten: $\alpha = 0,0115 \text{ cm}^{-1}$; $j = 2,03$; $K_s = 31,6 \text{ cm día}^{-1}$; $\theta_s = 0,520 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$; y $\theta_r = 0,218 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$. La profundidad de la muestra de suelo es de 100 cm. La condición inicial es $\psi(z, t = 0) = -200 \text{ cm}$, $0 \leq z \leq 100$. La condición de contorno superior es $\psi(z = 0, t) = 0$; $t > 0$; el contorno inferior es una condición de drenaje libre donde el flujo está dado solo por la gravedad, $q(z = 100, t) = -K_s$; $t > 0$.

La tercera aplicación (Caviedes et al. 2013) considera los siguientes parámetros del suelo para las ecuaciones de Mualem–van Genuchten: $\alpha = 0,041 \text{ cm}^{-1}$; $j = 1,964$; $K_s = 0,000722 \text{ cm s}^{-1}$; $\theta_s = 0,35 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$; y $\theta_r = 0,02 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$. La profundidad de la muestra de suelo es de 60 cm. La condición inicial es $\psi(z, t = 0) = -150 \text{ cm}$, $0 \leq z \leq 60$. La condición de contorno superior es $\psi(z = 0, t) = 0$; $t > 0$; el contorno inferior es una condición de drenaje libre, $q(z = 60, t) = -K_s$; $t > 0$.

La cuarta aplicación (Caviedes et al. 2013) considera los siguientes parámetros del suelo para las ecuaciones de Mualem–van Genuchten: $\alpha = 3,35 \text{ m}^{-1}$; $j = 2$; $K_s = 9,22 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$; $\theta_s = 0,368 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$; y $\theta_r = 0,102 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$. La profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son: $\psi(z, t = 0) = -0,20 \text{ m}$, $0 \leq z \leq 1$. Se imponen condiciones de contorno impermeable (superior e inferior) $q(z = 0, t) = 0$ y $q(z = 1, t) = 0$.

5 VALIDACIÓN MATEMÁTICA

Con datos de la primera aplicación se simuló el proceso de infiltración, permitiendo obtener el perfil de cantidad de agua y la posición del frente húmedo para 0,2 días.

Se obtuvo la curva para $\Delta t = 1 \text{ s}$ y $\Delta z = 0,2 \text{ cm}$ (ver Figura 3a) y se comparó con el resultado obtenido por Neumann et al. (2011). El error relativo máximo se presentó en la zona de frente húmedo $0,60 \text{ m} \leq z \leq 0,70 \text{ m}$ (ver Figura 3b). Se observa una desviación del perfil de humedad en las cercanías del contorno inferior, esta desviación es hacia valores de humedad menores que los obtenidos por Neumann et al. (2011) y está asociada a la condición de contorno de drenaje libre impuesta (ver Figura 3a). Esta desviación será discutida más adelante en la sección 6.

Se obtuvieron los perfiles de humedad para tiempos comprendidos entre 0 y 10 días, con $\Delta t = 0,002 \text{ d}$ y $\Delta z = 1 \text{ cm}$. Con esos perfiles se calcularon la infiltración acumulada (ver Figura 4a) y la tasa de infiltración hasta en función del tiempo (ver Figura 4b). A partir de 0.2 días la infiltración acumulada crece en forma constante (ver Figura 4a). Cuando se alcanza el estado estacionario, la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada ($K_s = 0,249 \text{ m d}^{-1}$) (ver Figura 4b).

Con datos de la segunda aplicación se simuló el perfil de cantidad de agua y se encontró la posición del frente húmedo para 1,1925 horas. Se obtuvo la curva para $\Delta t = 1 \text{ s}$ y $\Delta z = 0,2 \text{ cm}$ (ver Figura 5a) y se comparó con el resultado obtenido por Mollerup et al. (2012). El error relativo máximo se presentó en la zona de frente húmedo $0,65 \text{ m} \leq z \leq 0,75 \text{ m}$ (ver Figura 5b).

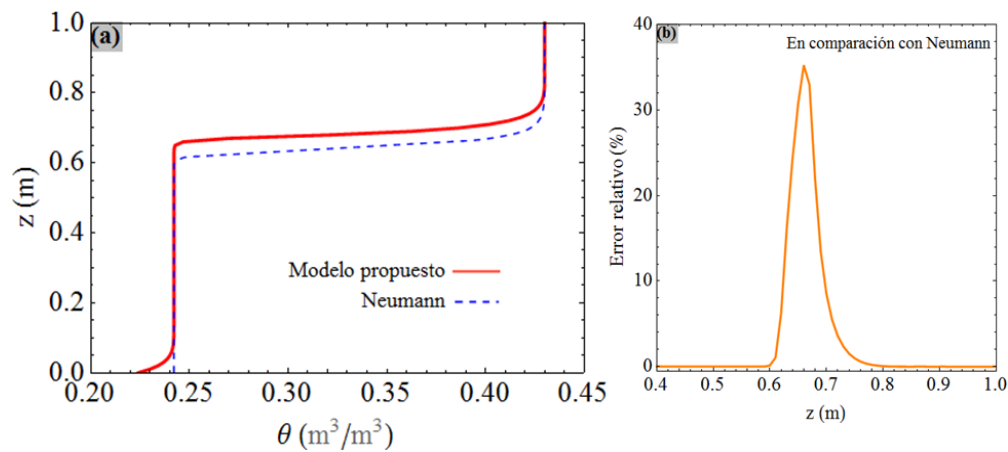


Figura 3: Comparación con de los resultados obtenidos con los de [Neumann et al. \(2011\)](#) quien utilizó una aproximación en volumen de control para la discretización espacial y diferencia finita para la discretización temporal (Δt desde 0,0001 d hasta 0,0008 d y número de Courant ($v\Delta t/\Delta z$) fue entre 0,1 y 0,5). (a) Perfil de humedad y (b) Error relativo circunscripto a la zona del frente húmedo.

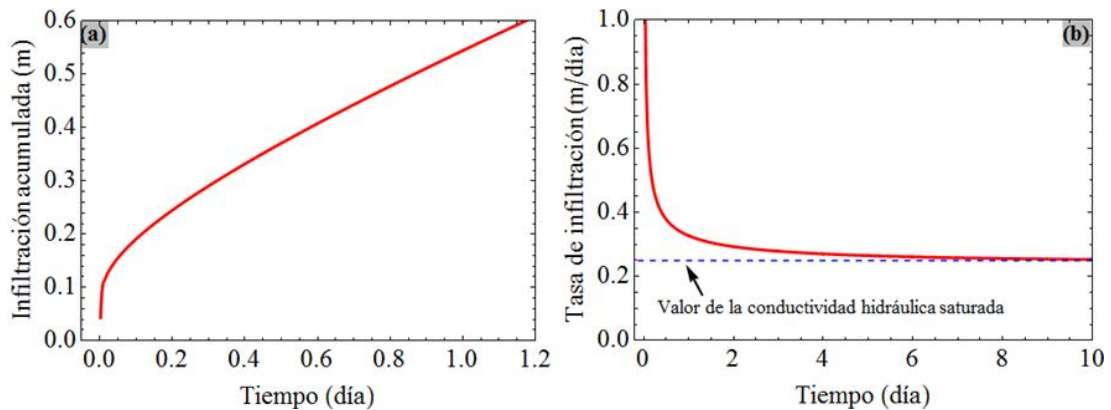


Figura 4: (a) Infiltración acumulada. (b) Tasa de infiltración. Posición con datos de la primera aplicación con $\Delta t = 0,002$ d y $\Delta z = 1$ cm.

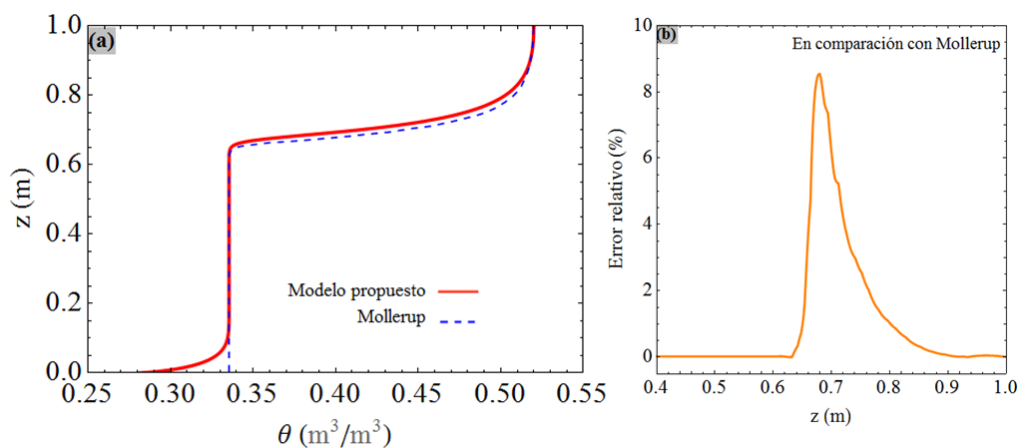


Figura 5: (a) Perfil de cantidad de agua para 1,1925 horas con datos de la segunda aplicación. (b) Comparación circunscripta a la zona del frente húmedo con [Mollerup et al. \(2012\)](#) quien utilizó una aproximación en series de potencia.

Se obtuvieron los perfiles de humedad para tiempos comprendidos entre 0 y 20 días, con $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm. Con esos perfiles se calcularon la infiltración acumulada (ver [Figura](#)

6a) y la tasa de infiltración en función del tiempo (ver Figura 7). A partir de 0.1 días la infiltración acumulada crece en forma constante (ver Figura 6a). Se comparó con el resultado obtenido por Mollerup et al. (2012). Al inicio de la infiltración acumulada $< 0,5$ h, el error relativo es cercano a cero, luego crece de forma constante (ver Figura 6b).

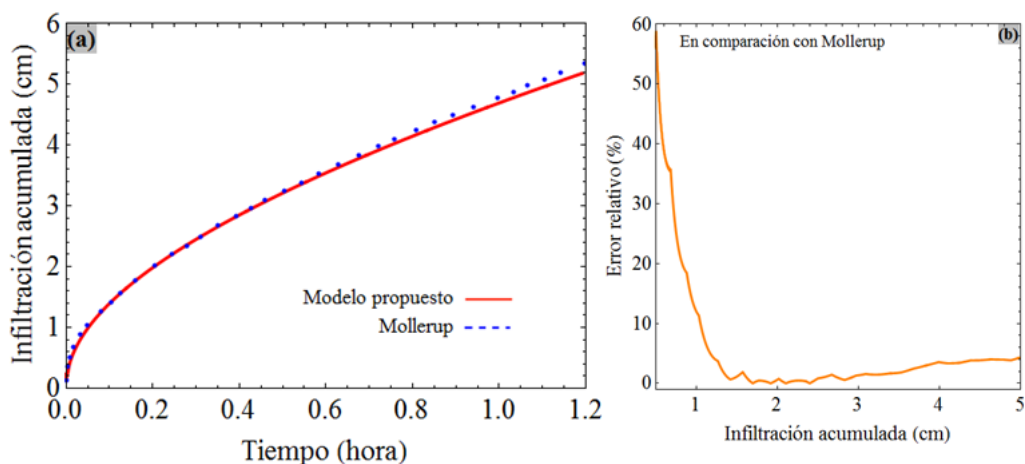


Figura 6: (a) Infiltración acumulada. Posición para 1,1925 horas con datos de la segunda aplicación con $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm. (b) Comparación con Mollerup et al. (2012).

Cuando se alcanza el estado estacionario, la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada ($K_s = 1,31667$ cm h^{-1}) (ver Figura 7).

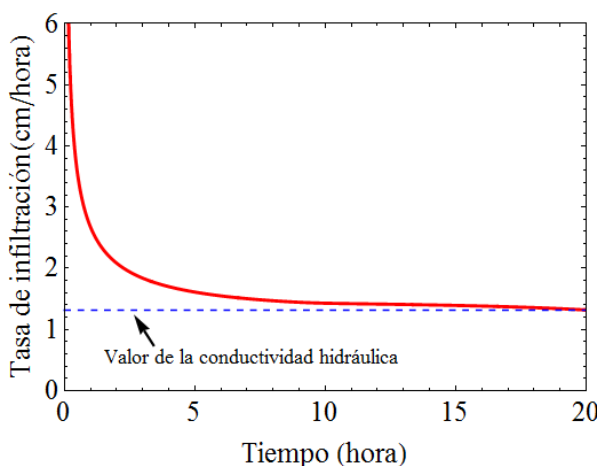


Figura 7: Tasa de infiltración. Posición para 1,1925 horas con datos de la segunda aplicación con $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm.

Usando los parámetros de la tercera aplicación se simuló el perfil de cantidad de agua y se calculó la infiltración acumulada para 90 minutos. Se obtuvo la curva para $\Delta t = 0,5$ s y $\Delta z = 0,2$ cm (ver Figura 8a) y se comparó con el resultado obtenido por Caviedes et al. (2013). El error relativo máximo se presentó al inicio de la infiltración acumulada < 10 min, luego el error relativo disminuye en la medida que transcurre la infiltración (ver Figura 8b). Se calculó la tasa de infiltración del modelo (ver Figura 9a) y se comparó con la calculada a partir de los valores de infiltración acumulada presentada por Caviedes et al. (2013) (Figura 8a). El error relativo máximo se presentó al inicio de la infiltración < 10 min, luego el error relativo disminuye en la medida que transcurre la infiltración. El error relativo es nulo cuando la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada (ver Figura 9b). En

estado estacionario la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada ($K_s = 0,04332 \text{ cm min}^{-1}$) (ver Figura 10).

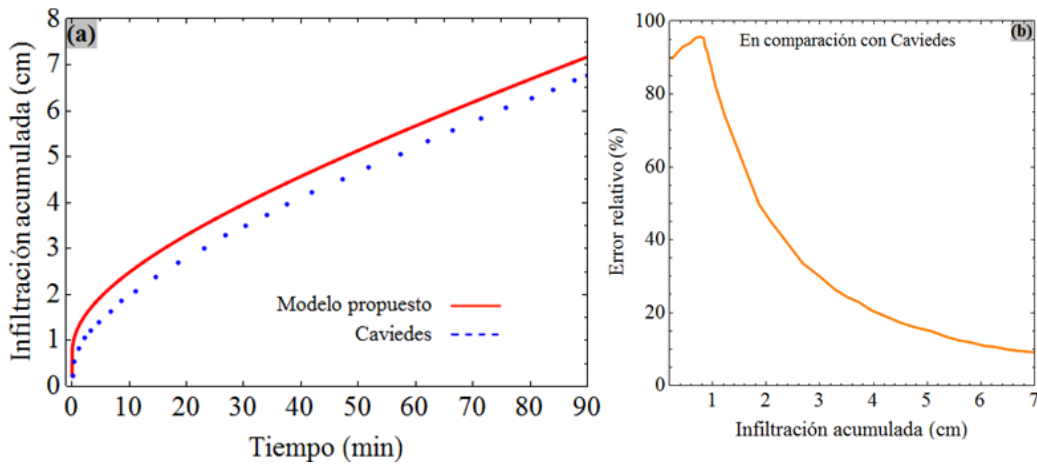


Figura 8: (a) Infiltración acumulada. Posición para 90 minutos con datos de la tercera aplicación con $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ y $\Delta z = 0,2 \text{ cm}$. (b) Comparación con Caviedes et al. (2013) quien utilizó una aproximación en volumen finito con $\Delta t = 1 \text{ s}$, 10 s , 100 s , 600 s y $\Delta z = 1 \text{ cm}$.

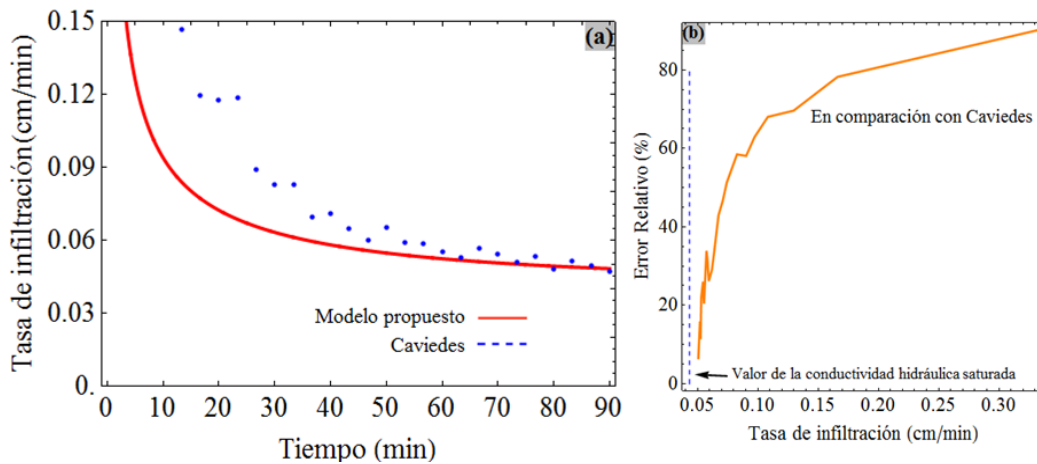


Figura 9: (a) Tasa de infiltración. (b) Comparación con Caviedes et al. (2013). Posición para 90 minutos con datos de la tercera aplicación con $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ y $\Delta z = 0,2 \text{ cm}$.

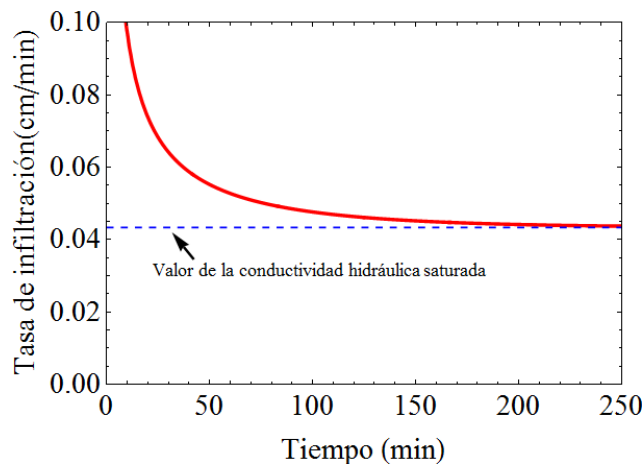


Figura 10: Tasa de infiltración en estado de saturación. Posición para 90 minutos con datos de la tercera aplicación con $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ y $\Delta z = 0,2 \text{ cm}$.

6 COMPORTAMIENTO CON DRENAJE LIBRE

Para analizar la influencia de la condición de drenaje libre se simuló el perfil de humedad a un tiempo igual al 1.195 h con valores de $\Delta z = 2,5$ cm y $\Delta t = 3$ s y se comparó con la simulación realizada anteriormente (ver Figura 5a, con $\Delta z = 2$ cm y $\Delta t = 1$ s) se observó que al disminuir los valores de Δz y Δt la desviación aumenta. Por lo tanto, esta desviación es un artificio introducido por el método y puede ser salvado empleando dos alternativas: (i) aumentar el dominio de estudio para que los desvíos no afecten la zona de interés; y (ii) utilizar valores de Δz y Δt adecuados para que la desviación sea mínima.

Para estudiar el efecto de un dominio mayor, se analizó el caso para una profundidad de 5 m utilizando $\Delta t = 3$ s y $\Delta z = 2,5$ cm (ver Figura 11a); y se comparó con los resultados obtenidos para un dominio de 1 m en iguales condiciones de simulación. Se observó que los resultados del modelo de drenaje libre son independientes de la profundidad del dominio, notándose convergencia en los valores obtenidos (Ver Figura 11b) y una consistencia física con el proceso de drenaje libre propiamente dicho.

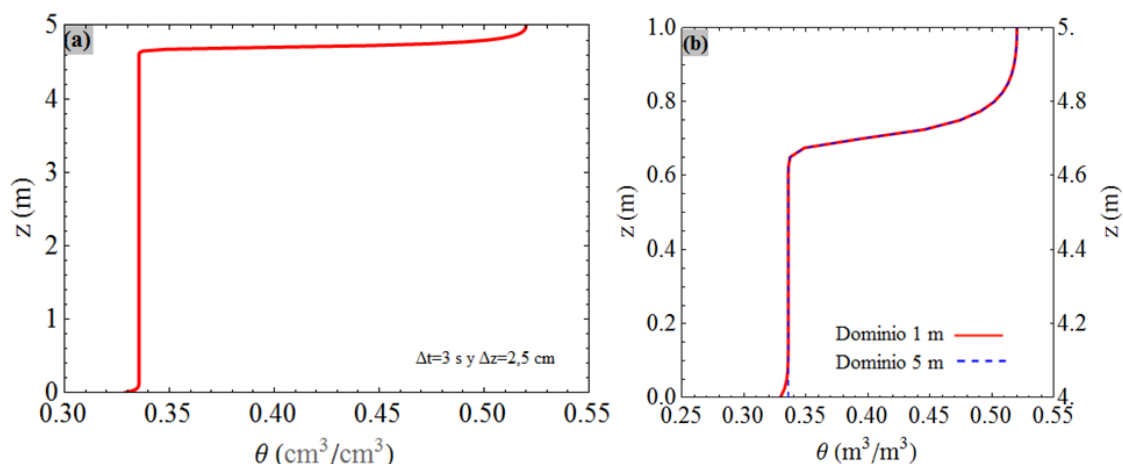


Figura 11: (a) Perfil de cantidad de agua para 1,1925 horas con datos de la segunda aplicación para un dominio de 5 m. (b) Comparación con los resultados obtenidos para un dominio de 1 m.

7 CONSERVACIÓN DE LA MASA

Usando los parámetros de la cuarta aplicación se simuló el perfil de cantidad de agua, fijando $\Delta t = 1$ s para diferentes configuraciones de la conductividad hidráulica no saturada, tiempos de simulación y Δz . Los tiempos de simulación presentados corresponden a 0,5, 1 y 2 horas. Se calculó el Error Relativo de Masa (ERM) para cada caso (ver Tabla 1 y Figura 12).

$$ERM = \frac{\text{cambio de masa}}{\text{masa inicial}} = \frac{(\sum_{i=1}^n \theta_i^t) / n - \theta_i^0}{\theta_i^0} \quad (24)$$

Para observar el comportamiento en los instantes iniciales $< 0,5$ hora, se simuló el perfil de cantidad de agua. Se encontró la posición del frente húmedo fijando $\Delta t = 1$ s, media geométrica en la configuración de la conductividad hidráulica no saturada, tiempos de simulación menores de 30 minutos con paso de 5 minutos, Δz de 1 cm y 0,5 cm. Se calculó el error relativo de masa para cada caso (ver Tabla 2).

Se comprobó conservación de la masa utilizando tres configuraciones para la conductividad hidráulica no saturada en medio paso: media aritmética, media geométrica y la media armónica, obteniendo un error relativo cercano al 10% y verificando que este valor disminuye cuando aumenta el valor del tiempo de simulación.

Configuración conductividad hidráulica no saturada	Tiempo de simulación (h)	Δt (s)	Δz (cm)	Tiempo CPU (min)	Error relativo de masa (%)
Media geométrica	2	1	1	32	8,218
	1	1	1	-	8,953
	0,5	1	1	-	10,852
	2	1	0,5	75	8,296
	1	1	0,5	-	9,030
Media aritmética	0,5	1	0,5	-	10,915
	2	1	1	32	8,217
	1	1	1	-	8,953
	0,5	1	1	-	10,851
	2	1	0,5	78	8,296
Media harmónica	1	1	0,5	-	9,030
	0,5	1	0,5	-	10,915
	2	1	1	35	8,217
	1	1	1	-	8,954
	0,5	1	1	-	10,852
	2	1	0,5	84	8,296
	1	1	0,5	-	9,030
	0,5	1	0,5	-	10,915

Tabla 1: Error relativo de masa utilizando diferentes configuraciones de la conductividad hidráulica no saturada, tiempos de simulación y Δz usando los parámetros de la cuarta aplicación

Configuración conductividad hidráulica no saturada	Tiempo de simulación (min)	Δt (s)	Δz (cm)	Error relativo de masa (%)
Media geométrica	5	1	1	13.937
	10	1	1	13.882
	15	1	1	13.318
	20	1	1	12.398
	25	1	1	11.539
	30	1	1	10.852
	5	1	0,5	13.937
	10	1	0,5	13.888
	15	1	0,5	13.343
	20	1	0,5	12.442
	25	1	0,5	11.595
	30	1	0,5	10.915

Tabla 2: Error relativo de masa usando los parámetros de la cuarta aplicación para tiempos de simulación menores de 30 minutos con paso de 5 minutos.

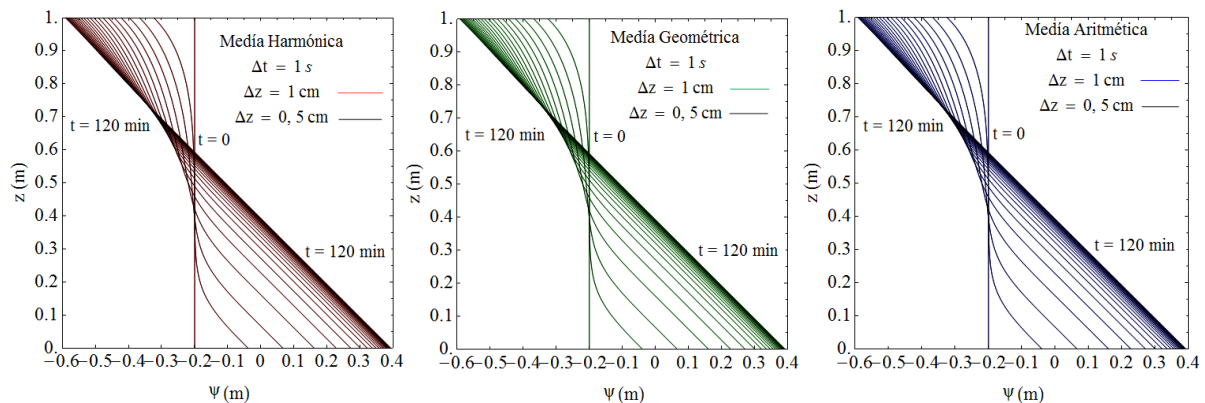


Figura 12: Perfil de cantidad de agua para diferentes configuraciones de la conductividad hidráulica no saturada, tiempos de simulación y Δz usando los parámetros de la cuarta aplicación

8 CONCLUSIONES

El modelo matemático presentado utilizando un esquema de diferencias finitas implícito basado en el método de Crank-Nicolson e imponiendo condiciones de contorno de tipo Neumann, predice con buen desempeño el perfil del potencial matricial ψ en la zona no saturada del suelo.

La solución obtenida con los datos de las aplicaciones utilizadas presentan buena

aproximación con los modelos propuestos por: Neumann et al. (2011), Mollerup et al. (2012) y Caviedes et al. (2013). Siendo la zona de frente húmedo, el rango de profundidad con mayor error relativo. También, verifican conservación de la masa obteniendo un error relativo cercano al 10%.

Los resultados del modelo de drenaje libre fueron independientes de la profundidad del dominio, notándose consistencia física con el proceso de drenaje libre propiamente dicho.

Cuando la solución alcanza estado estacionario, la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada.

REFERENCIAS

- Alfaro M., Geotecnia en suelos no saturados. *Revista Academica Colomb. Cienc.*, 32:471-481, 2008.
- Caviedes, D., García, P., and Murillo, J., Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation. *Journal of Hydrology*, 480:69-84, 2013.
- Celia, M., Bouloutas, E., and Zarba R., A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water resources research*, 26:1483-1496, 1990.
- Harter, T., Ginn, T., Onsoy, Y. and Botros, F., Richards equation - Based modeling to estimate flow and nitrate transport in a deep alluvial vadose zone. *Vadose Zone Journal*, 1-6, 2011.
- Martinez, José L., Schvezov, Carlos E. y Rosenberger, Mario R., Aproximación en diferencias finitas a la ecuación de Richards para transporte de agua en suelos no saturados, *Mecánica Computacional*, 32:2779-2793, 2013.
- Mollerup, M. and Hansen, S., Power series solution for ponded infiltration on sloping surfaces. *Journal of Hidrology*, 464-465:431-437, 2012.
- Neumann, L.E., Simunek, J., and Cook F.J., Implementation of quadratic upstream interpolation schemes for solute transport into HYDRUS-1D, *Environmental Modelling & Software*, 26:1298-1308, 2011.
- Wendland, E., e Pizarro, M., Modelagem computacional do fluxo unidimensional de água em meio não saturado do solo. *Eng. Agríc.*, 30:424-434, 2010.