

FORMULACIÓN DE CAPAS DELGADAS BASADA EN MODOS DE PROPAGACIÓN DE PRIMER ORDEN PARA EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE ELASTODINÁMICA

Marcelo A. Ceballos^{a,b} y Carlos A. Prato^a

^a*Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba, Vélez Sarsfield 1611, X5016GCA, Córdoba, Argentina,
www.portal.efn.uncor.edu*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, C1033AAJ,
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, www.conicet.gov.ar*

Palabras clave: perfiles estratificados de suelo, modos de propagación de ondas, interacción suelo-estructura, problemas de elastodinámica.

Resumen. La forma habitual de calcular la respuesta dinámica de un perfil estratificado de suelo consiste en transformar la variación temporal de la excitación al dominio de la frecuencia y la variación espacial al dominio número de onda, calcular los desplazamientos con la matriz ensamblada del perfil de suelo a través de una técnica análoga al método de rigidez que se utiliza en análisis estructural, y aplicar las transformadas inversas para retornar a los dominios del tiempo y el espacio. El uso de las matrices exactas de los estratos para obtener la matriz de rigidez del perfil completo presenta problemas numéricos en la transformación del dominio número de onda al dominio espacial por las singularidades que aparecen en los integrandos. El método de capas delgadas se utiliza para mitigar estas inexactitudes numéricas a través de una expansión en series de los coeficientes de la matriz de rigidez de los estratos. De esta forma, surgen matrices independientes del número de onda k que permiten el planteo de un problema de autovalores para la descomposición modal de la respuesta y la transformación al dominio espacial en forma analítica para cada modo. En esta aproximación, los coeficientes de las matrices de los estratos para números de onda que tienden a infinito son proporcionales a k^2 mientras que los coeficientes exactos varían con k . Esta característica produce que este método no sea rigurosamente válido para representar soluciones estáticas del perfil de suelo. La formulación presentada en este trabajo permite representar la respuesta a través de la combinación de modos de propagación de primer orden en lugar de los de segundo orden que surgen en el método de capas delgadas. De esta forma, se mantiene la ventaja del método original de permitir la transformación exacta de la respuesta como combinación de modos del dominio número de onda al dominio espacial. El grado de aproximación de los coeficientes de rigidez es altamente satisfactorio para todo el rango de números de onda, reproduciéndose incluso en forma exacta los valores para $k = 0$ y $k \rightarrow \infty$. Esta última condición permite obtener la respuesta exacta del perfil de suelo para cargas estáticas, mientras que la aproximación para el semi-espacio reproduce naturalmente el efecto de disipación por radiación. La capacidad de la formulación propuesta para resolver problemas de elasto-dinámica se analiza comparando sus resultados con soluciones numéricas de discos rígidos apoyados sobre la superficie de diferentes perfiles estratificados de suelo.

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta un extracto de un extenso trabajo enviado para su posible publicación en la revista científica *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* (Ceballos y Prato, 2014), y puede considerarse una continuación del trabajo presentado en el ENIEF 2011 realizado en Rosario (Ceballos y Prato, 2011a). El aspecto más sobresaliente consiste en una reformulación de la matriz de rigidez de los estratos del perfil de suelo utilizando modos de propagación de ondas de primer orden. Esta matriz resulta compatible con la matriz de rigidez desarrollada para el semi-espacio, y permite completar el análisis de la rigidez dinámica de fundaciones superficiales considerando discos rígidos apoyados sobre diferentes perfiles de suelo.

El método directo de rigidez constituye la base tanto del método de capas delgadas como del nuevo método propuesto que se designa como formulación de primer orden doblemente asintótica (FODAF). Las matrices exactas de rigidez en el dominio número de onda para un estrato finito y para el semi-espacio fueron presentadas por Kausel y Roësset (1981). La determinación de la respuesta de un perfil de suelo a través de estos métodos se efectúa para cada frecuencia transformando la excitación del dominio espacial al dominio número de onda, calculando los desplazamientos utilizando la matriz de rigidez del perfil completo y aplicando la transformada inversa para retornar al dominio espacial. La Transformada de Hankel permite calcular la respuesta espacial en coordenadas cilíndricas. Debido a singularidades que surgen en el integrando, las implementaciones numéricas de esta transformada produce inexactitudes que pueden reducirse refinando la discretización en el número de onda k a expensas de un incremento del esfuerzo computacional.

El método de capas delgadas propuesto por Kausel (1981) aproxima la rigidez exacta de un estrato a través de matrices independientes del número de onda. La principal ventaja de este método radica en aproximar la forma trascendental de los coeficientes de rigidez a través de expresiones algebraicas produciendo una solución expresada en términos de modos de propagación de ondas. Esta representación permite una transformación analítica al dominio espacial sin pérdidas adicionales de precisión. Sin embargo, los coeficientes de rigidez son proporcionales a k^2 cuando este número de onda tiende a infinito, siendo que los coeficientes exactos varían con k . Esta característica produce que este método no sea capaz de representar las soluciones estáticas del perfil de suelo.

La formulación aquí propuesta se basa en la expansión de los coeficientes exactos de la matriz de rigidez de un estrato hasta la primer potencia de k produciendo dos matrices independientes del número de onda. De esta forma, los coeficientes resultan proporcionales a k como en la solución exacta para números de onda que tienden a infinito. Los parámetros modales resultan de primer orden a diferencia de los del método de capas delgadas que se obtienen de matrices de segundo orden. El ajuste de los coeficientes de rigidez exactos para el semi-espacio se realiza utilizando una técnica de análisis modal experimental que se describe en el trabajo de Ceballos y Prato (2010). Este ajuste se realiza tanto para la parte real como para la imaginaria permitiendo una correcta simulación del proceso de radiación.

De esta forma, la formulación completa resulta doblemente asintótica en el sentido que tiende a los valores exactos cuando el número de onda tiende tanto a cero como a infinito. Esta característica es imprescindible para representar la respuesta del perfil de suelo en bajas frecuencias (incluyendo el caso estático) manteniendo las ventajas del método de capas delgadas respecto a la transformación modal exacta del dominio número de onda al espacial. Por otra parte, esta formulación no requiere la incorporación de amortiguamiento artificial para evitar problemas numéricos, pudiendo agregarse amortiguamiento material si resultase necesario directamente a través de los autovalores del perfil completo de suelo.

2 MÉTODO DIRECTO DE RIGIDEZ

La Figura 1 muestra las componentes de carga y desplazamiento en la interfaz del j -ésimo estrato de acuerdo a la terminología adoptada por Kausel y Roësset (1981). En este trabajo se utilizan coordenadas cilíndricas, aunque las matrices resultantes para los estratos y el semi-espacio son también válidas para frentes de onda planos en coordenadas cartesianas.

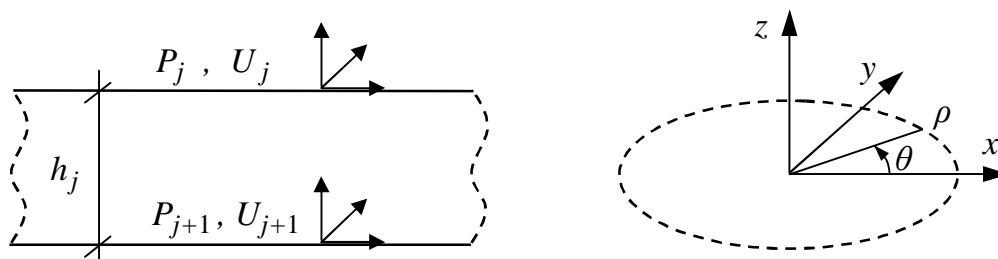


Figura 1: Componentes de carga y desplazamiento del j -ésimo estrato

El vector de cargas P_j se transforma del dominio del tiempo t al dominio de la frecuencia ω a través de la Transformada de Fourier, la coordenada azimutal θ se expresa por medio de series de Fourier con términos representados por números enteros μ , y la coordenada radial ρ se transforma al dominio número de onda k a través de la Transformada de Hankel

$$\bar{P}_j(k, \mu, \omega) = a_\mu \int_0^\infty \rho C_\mu \int_0^{2\pi} T_\mu \int_{-\infty}^\infty P_j(\rho, \theta, t) e^{-i\omega t} dt d\theta d\rho \quad (1)$$

$$C_\mu = \begin{bmatrix} \frac{d}{d(k\rho)} J_\mu(k\rho) & \frac{\mu}{k\rho} J_\mu(k\rho) & 0 \\ \frac{\mu}{k\rho} J_\mu(k\rho) & \frac{d}{d(k\rho)} J_\mu(k\rho) & 0 \\ 0 & 0 & -J_\mu(k\rho) \end{bmatrix}; \quad a_\mu = \begin{cases} 1/2\pi & \text{if } \mu = 0 \\ 1/\pi & \text{if } \mu \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$T_\mu = \begin{cases} \text{diag}[\cos(\mu\theta), -\sin(\mu\theta), \cos(\mu\theta)]: & \text{cargas simétricas respecto al eje } x \\ \text{diag}[\sin(\mu\theta), \cos(\mu\theta), \sin(\mu\theta)]: & \text{cargas anti-simétricas respecto al eje } x \end{cases} \quad (3)$$

donde $J_\mu(k\rho)$ es la función de Bessel de μ -ésimo orden. La relación fuerza-desplazamiento de un estrato se expresa como

$$K_j^{st} \bar{U}_j^{st} = \bar{P}_j^{st} \quad \text{ó} \quad \left[\begin{array}{c|c} K_{j,j} & K_{j,j+1} \\ \hline K_{j+1,j} & K_{j+1,j+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{U}_j \\ \bar{U}_{j+1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{P}_j \\ \bar{P}_{j+1} \end{array} \right] \quad (4)$$

Esta última expresión toma en coordenadas cilíndricas la siguiente forma

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} & 0 & K_{16} \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} & 0 \\ K_{13} & 0 & K_{33} & -K_{16} & 0 & K_{36} \\ \hline K_{14} & 0 & -K_{16} & K_{11} & 0 & -K_{13} \\ 0 & K_{25} & 0 & 0 & K_{22} & 0 \\ K_{16} & 0 & K_{36} & -K_{13} & 0 & K_{33} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{u}_\rho^j \\ \bar{u}_\theta^j \\ \bar{u}_z^j \\ \bar{u}_\rho^{j+1} \\ \bar{u}_\theta^{j+1} \\ \bar{u}_z^{j+1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{\tau}_{\rho z}^j \\ \bar{\tau}_{\theta z}^j \\ \bar{\sigma}_z^j \\ \bar{\tau}_{\rho z}^{j+1} \\ \bar{\tau}_{\theta z}^{j+1} \\ \bar{\sigma}_z^{j+1} \end{array} \right] \quad (5)$$

donde los grados de libertad (GL) ρ y z (asociados a las ondas $SV-P$) están acopladas, mientras el GL θ (asociado a las ondas SH) está desacoplado de los restantes.

El vector de desplazamientos del perfil completo se obtiene como

$$\bar{U} = K^{-1}\bar{P} = F\bar{P} \quad (6)$$

donde K representa la matriz de rigidez del perfil obtenida por ensamble de las matrices de los estratos individuales y el semi-espacio, mientras F representa la matriz de flexibilidad de este perfil. La transformación inversa al dominio espacial-temporal de los desplazamientos que se obtienen de (6) se realiza de la siguiente forma

$$U_j = \sum_{\mu=0}^{\infty} T_{\mu} \int_0^{\infty} k C_{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_j e^{i\omega t} d\omega dk \quad (7)$$

La matriz de rigidez de un estrato para los GL asociados a las ondas $SV-P$ (modos de Rayleigh) puede expresarse en forma adimensional como

$$K_R^{st} = \omega \bar{\rho} V_s \bar{K}_R^{st} \quad \text{donde} \quad \bar{K}_R^{st} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{13} & | & \bar{K}_{14} & \bar{K}_{16} \\ \bar{K}_{13} & \bar{K}_{33} & | & -\bar{K}_{16} & \bar{K}_{36} \\ \hline \bar{K}_{14} & -\bar{K}_{16} & | & \bar{K}_{11} & -\bar{K}_{13} \\ \bar{K}_{16} & \bar{K}_{36} & | & -\bar{K}_{13} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{11} &= \kappa(1-s^2) \frac{(T_s - rsT_r)}{Ds} & \bar{K}_{14} &= \kappa(1-s^2) \frac{(rsT_rS_s - T_sS_r)}{Ds} \\ \bar{K}_{33} &= \kappa(1-s^2) \frac{(T_r - rsT_s)}{Dr} & \bar{K}_{36} &= \kappa(1-s^2) \frac{(rsT_sS_r - T_rS_s)}{Dr} \\ \bar{K}_{13} &= \kappa(1-s^2) \frac{(1-S_rS_s - rsT_rT_s)}{D} - \kappa(1+s^2) & \bar{K}_{16} &= \kappa(1-s^2) \frac{(S_r - S_s)}{D} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_r &= \tanh(r\kappa\eta) & T_s &= \tanh(s\kappa\eta) & S_r &= \operatorname{sech}(r\kappa\eta) & S_s &= \operatorname{sech}(s\kappa\eta) \\ D &= 2(S_rS_s - 1) + (1/(rs) + rs)T_rT_s & r &= \sqrt{1-\alpha^2/\kappa^2} & s &= \sqrt{1-1/\kappa^2} \\ \alpha &= \sqrt{(1/2-\nu)/(1-\nu)} & \kappa &= kVs/\omega & \eta &= h\omega/Vs \end{aligned} \quad (10)$$

donde ω es la frecuencia de análisis, $\bar{\rho}$ es la densidad del estrato, V_s es la velocidad de ondas de corte, ν es el coeficiente de Poisson, k y κ son los números de onda dimensional y adimensional, respectivamente, mientras que h y η representan el espesor del estrato en forma dimensional y adimensional, respectivamente. La matriz de rigidez de un estrato para los GL asociados a las ondas SH (modos de Love) puede expresarse como

$$K_L^{st} = \omega \bar{\rho} V_s \bar{K}_L^{st} \quad \text{donde} \quad \bar{K}_L^{st} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{22} & | & \bar{K}_{25} \\ \bar{K}_{25} & | & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{K}_{22} = s\kappa \coth(s\kappa\eta) \quad \bar{K}_{25} = -s\kappa \operatorname{csch}(s\kappa\eta) \quad (12)$$

Las matrices de rigidez del semi-espacio para ondas $SV-P$ y SH se expresan como

$$K_R^{hs} = \omega \bar{\rho} V_s \bar{K}_R^{hs} \quad \text{donde} \quad \bar{K}_R^{hs} = \frac{\kappa}{(1-rs)} \begin{bmatrix} r(1-s^2) & 2rs-1-s^2 \\ 2rs-1-s^2 & s(1-s^2) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$K_L^{hs} = \omega \bar{\rho} V_s \bar{K}_L^{hs} \quad \text{donde} \quad \bar{K}_L^{hs} = s\kappa \quad (14)$$

3 FORMULACIÓN DE PRIMER ORDEN DOBLEMENTE ASINTÓTICA (FODAF)

La aproximación propuesta para las matrices de rigidez de un estrato tanto para ondas *SV-P* como *SH* posee una forma de tipo “fractal” o “anidada”

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{R/L}^{st} &= K_0 + \kappa K_1 - \kappa^2 \tilde{K}_I^{-1} \\ \tilde{K}_I &= K_2 + \kappa K_3 - \kappa^2 \tilde{K}_{II}^{-1} \\ \tilde{K}_{II} &= K_4 + \kappa K_5 - \kappa^2 \tilde{K}_{III}^{-1} \\ \tilde{K}_{III} &= K_6 + \kappa K_7 \dots \end{aligned} \tag{15}$$

La forma matricial asociada a esta representación consiste en dos matrices independientes del número de onda que permiten mantener el mismo grado de exactitud

$$\tilde{K}_{R/L}^{st} = \left(I_n \left(K_A^{st} + \kappa K_B^{st} \right)^{-1} I_n^T \right)^{-1} \tag{16}$$

$$I_n = [I \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \tag{17}$$

$$K_A^{st} = \left[\begin{array}{c|ccc} K_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \hline 0 & K_2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & K_4 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & K_{2n-2} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{GL físicos} \\ \\ \\ \text{GL auxiliares} \end{array} \right\} \tag{18}$$

físicos
GL auxiliares

$$K_B^{st} = \left[\begin{array}{c|ccc} K_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \hline 0 & K_3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & K_5 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & K_{2n-1} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{GL físicos} \\ \\ \\ \text{GL auxiliares} \end{array} \right\} \tag{19}$$

físicos
GL auxiliares

El parámetro n representa el número de veces que los GL de los estratos se incrementan con GL auxiliares. Los primeros 4 GL de las matrices K_A^{st} s K_B^{st} para las ondas *SV-P*, así como los primeros 2 GL de estas matrices para el caso de ondas *SH*, representan los GL físicos de cada estrato que se ensamblan con aquellos de los otros estratos para formar las matrices K_A y K_B del perfil completo de suelo.

3.1 Matrices de rigidez de los estratos

La matriz de rigidez de un estrato para ondas *SV-P* es casi singular para pequeños valores de κ , por lo que resulta conveniente proporcionar un buen ajuste en este rango. Por lo tanto, las sub-matrices K_i de las expresiones (18) y (19) se obtienen igualando las matrices exactas de los estratos dadas en (8) y (11), y sus derivadas valuadas en $\kappa = 0$, con la aproximación propuesta en (15) y sus respectivas derivadas. La matriz exacta de un estrato para ondas *SV-P* y su primer derivada resultan

$$\bar{K}_R^{st} \Big|_{\kappa=0} = \bar{K}_{R,0}^{st} = \begin{bmatrix} k_{11}^0 & 0 & k_{14}^0 & 0 \\ 0 & k_{33}^0 & 0 & k_{36}^0 \\ k_{14}^0 & 0 & k_{11}^0 & 0 \\ 0 & k_{36}^0 & 0 & k_{33}^0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\bar{K}_R^{st'} \Big|_{\kappa=0} = \bar{K}_{R,1}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & k_{13}^1 & 0 & k_{16}^1 \\ k_{13}^1 & 0 & -k_{16}^1 & 0 \\ 0 & -k_{16}^1 & 0 & -k_{13}^1 \\ k_{16}^1 & 0 & -k_{13}^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

con

$$\begin{cases} k_{11}^0 = \cot(\eta) & k_{14}^0 = -\csc(\eta) \\ k_{33}^0 = \cot(\alpha\eta)/\alpha & k_{36}^0 = -\csc(\alpha\eta)/\alpha \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} k_{13}^1 = (\csc(\eta)\csc(\alpha\eta) - \cot(\eta)\cot(\alpha\eta))/\alpha - 2 \\ k_{16}^1 = (\cot(\eta)\csc(\alpha\eta) - \csc(\eta)\cot(\alpha\eta))/\alpha \end{cases} \quad (23)$$

donde ' indica derivada con respecto a κ . La matriz exacta de un estrato y sus primeras derivadas valuadas en $\kappa = 0$ para el caso de ondas *SH* resultan

$$\bar{K}_L^{st} \Big|_{\kappa=0} = \bar{K}_{L,0}^{st} = \begin{bmatrix} k_{22}^0 & k_{25}^0 \\ k_{25}^0 & k_{22}^0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{K}_L^{st'} \Big|_{\kappa=0} = \bar{K}_{L,1}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\bar{K}_L^{st''} \Big|_{\kappa=0} = \bar{K}_{L,2}^{st} = \begin{bmatrix} k_{22}^2 & k_{25}^2 \\ k_{25}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{K}_L^{st'''} \Big|_{\kappa=0} = \bar{K}_{L,3}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

con

$$\begin{cases} k_{22}^0 = \cos(\eta)/\sin(\eta) \\ k_{25}^0 = -1/\sin(\eta) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} k_{22}^2 = (\eta - \sin(\eta)\cos(\eta))/\sin(\eta)^2 \\ k_{25}^2 = (\sin(\eta) - \eta\cos(\eta))/\sin(\eta)^2 \end{cases} \quad (26)$$

Las sub-matrices K_i de la aproximación propuesta en (15) se obtienen de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{R/L}^{st} \Big|_{\kappa=0} = K_0 & \Rightarrow K_0 = \bar{K}_{R/L,0}^{st} \\ \tilde{K}_{R/L}^{st'} \Big|_{\kappa=0} = K_1 & \Rightarrow K_1 = \bar{K}_{R/L,1}^{st} \\ \tilde{K}_{R/L}^{st''} \Big|_{\kappa=0} = -2K_2^{-1} & \Rightarrow K_2 = -2(\bar{K}_{R/L,2}^{st})^{-1} \\ \tilde{K}_{R/L}^{st'''} \Big|_{\kappa=0} = 6K_2^{-1}K_3K_2^{-1} & \Rightarrow K_3 = 1/6 \cdot K_2 \bar{K}_{R/L,3}^{st} K_2 \end{aligned} \quad (27)$$

La formulación propuesta asigna por definición los valores exactos para $\kappa = 0$. La forma de obtener también los valores exactos para $\kappa \rightarrow \infty$ consiste en calcular la última sub-matriz de la aproximación con una fórmula especial. Por ejemplo, para $n = 4$ resulta

$$K_7 = (K_5 - (K_3 - (K_1 - \bar{K}_{R/L,\infty}^{st})^{-1})^{-1})^{-1} \quad (28)$$

con

$$\bar{K}_{R,\infty}^{st} = \left(\kappa^{-1} \bar{K}_R^{st} \right) \Big|_{\kappa \rightarrow \infty} = \left[\begin{array}{cc|cc} k_{11}^\infty & k_{13}^\infty & 0 & 0 \\ k_{13}^\infty & k_{33}^\infty & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & k_{11}^\infty & -k_{13}^\infty \\ 0 & 0 & -k_{13}^\infty & k_{33}^\infty \end{array} \right] \quad (29)$$

$$\bar{K}_{L,\infty}^{st} = \left(\kappa^{-1} \bar{K}_L^{st} \right) \Big|_{\kappa \rightarrow \infty} = \left[\begin{array}{c|c} k_{22}^\infty & 0 \\ \hline 0 & k_{22}^\infty \end{array} \right]$$

donde

$$k_{11}^\infty = k_{33}^\infty = 2/(1 + \alpha^2) \quad k_{13}^\infty = -2\alpha^2/(1 + \alpha^2) \quad k_{22}^\infty = 1 \quad (30)$$

De esta forma, la formulación resulta doblemente asintótica. La **Figura 2** a la **Figura 5** muestran el grado de ajuste para $\nu = 1/3$ reescalando los coeficientes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \bar{\bar{K}}_R^{st} &= \Upsilon_R^{-1/2} \bar{K}_R^{st} \Upsilon_R^{-1/2} \\ \bar{\bar{K}}_L^{st} &= \Upsilon_L^{-1/2} \bar{K}_L^{st} \Upsilon_L^{-1/2} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_R &= \text{diag} \left([(k_{11}^0 + \kappa k_{11}^\infty) \quad (k_{33}^0 + \kappa k_{33}^\infty) \quad (k_{11}^0 + \kappa k_{11}^\infty) \quad (k_{33}^0 + \kappa k_{33}^\infty)] \right) \\ \Upsilon_L &= \text{diag} \left([(k_{22}^0 + \kappa k_{22}^\infty) \quad (k_{22}^0 + \kappa k_{22}^\infty)] \right) \end{aligned} \quad (32)$$

El grado de aproximación mostrado en estas figuras es también representativo de lo que se obtiene para otros valores del coeficiente de Poisson. Además, los gráficos de estas curvas para diferentes valores de espesor adimensional muestran que las componentes de rigidez son prácticamente independientes de este espesor para $\eta < 0.10$ asignando a las abscisas el producto $\kappa\eta$. La aproximación resulta satisfactoria aún para espesores más altos, aunque se recomienda tomar $\eta = \pi/2$ como cota superior antes de subdividir en sub-estratos dado que los coeficientes exactos comienzan a presentar variaciones abruptas a partir de este valor.

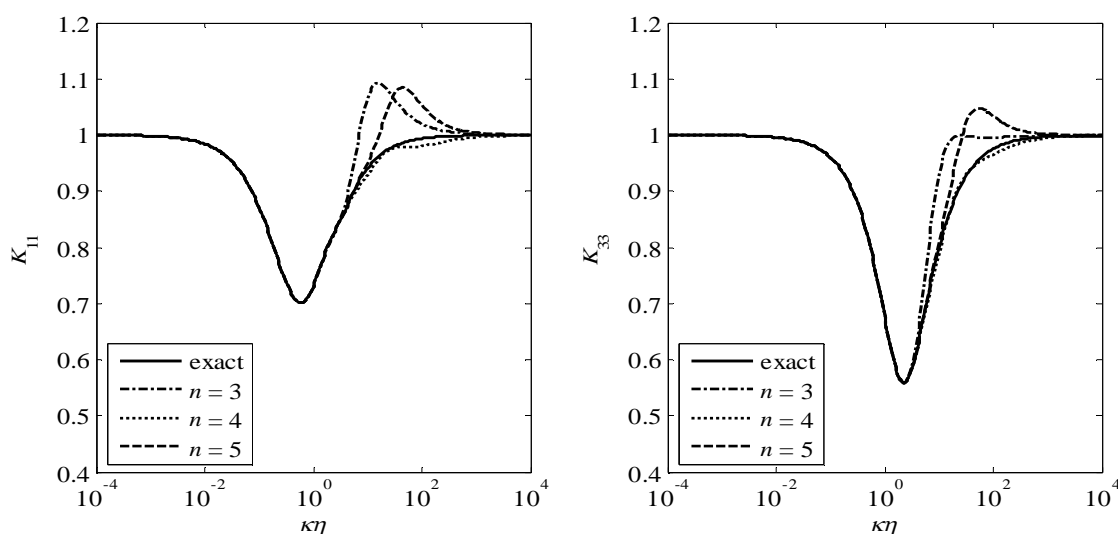


Figura 2: Aproximación de las componentes de rigidez de un estrato ($\nu = 1/3, \eta < 0.10$)

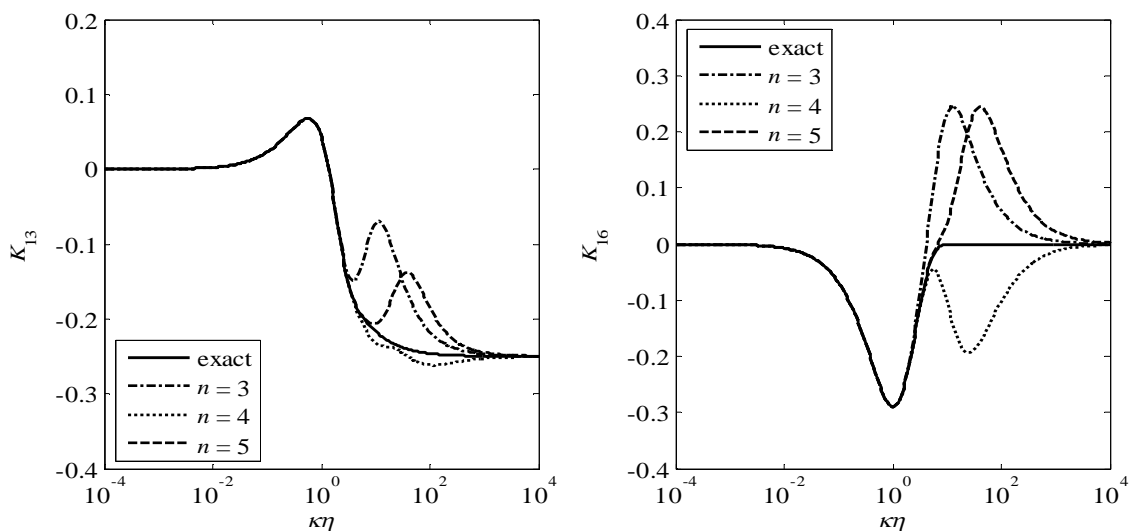


Figura 3: Aproximación de las componentes de rigidez de un estrato ($\nu = 1/3$, $\eta < 0.10$)

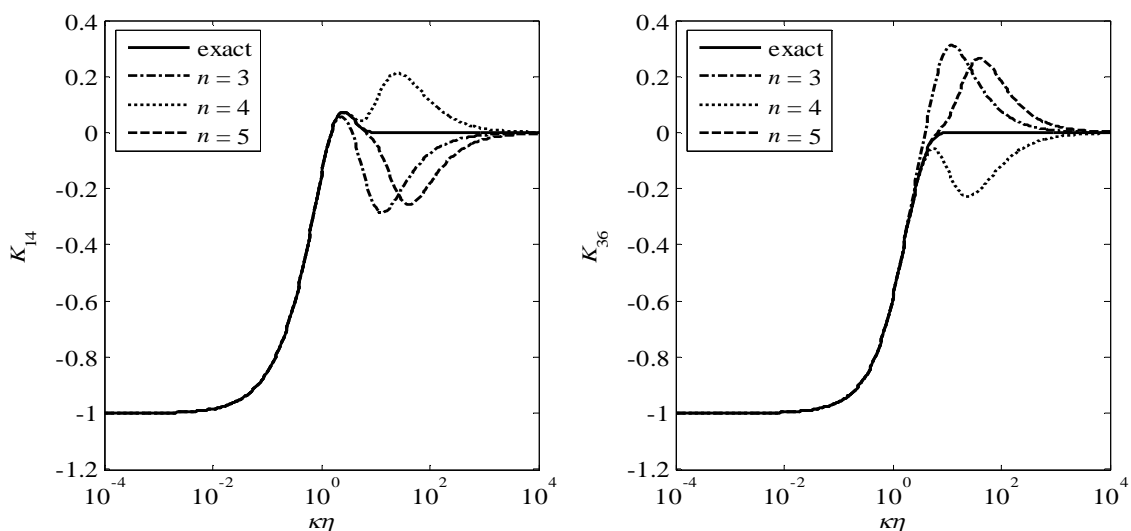


Figura 4: Aproximación de las componentes de rigidez de un estrato ($\nu = 1/3$, $\eta < 0.10$)

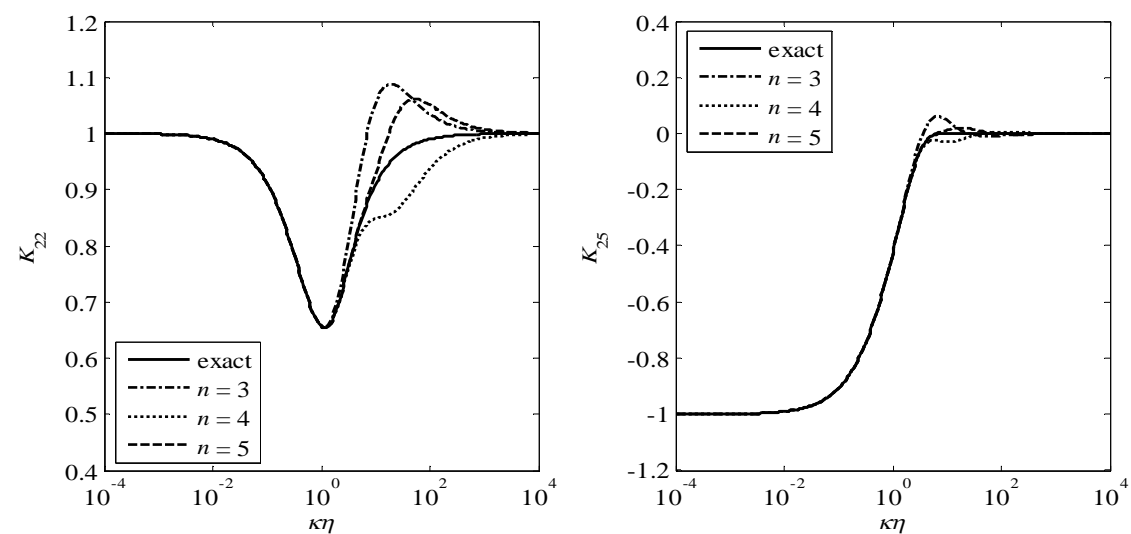


Figura 5: Aproximación de las componentes de rigidez de un estrato ($\nu = 1/3$, $\eta < 0.10$)

3.2 Matrices de rigidez del semi-espacio

Las matrices de rigidez del semi-espacio se obtienen ajustando los coeficientes exactos de flexibilidad a través de una técnica usada en análisis modal experimental. Estos coeficientes se ajustan a través de parámetros modales de primer orden que permiten obtener los valores exactos cuando el número de onda κ tiende tanto a cero como a infinito. De esta forma, la matriz de rigidez del perfil completo de suelo mantiene la propiedad de ser doblemente asintótica.

En primer lugar, la amplitudes no acotadas de los coeficientes de flexibilidad se eliminan descontando el modo exacto de propagación de ondas de Rayleigh. Este modo se agrega a la base modal en la etapa final del proceso de ajuste. La utilización de GL auxiliares permite obtener una matriz cuadrada de formas modales que puede transformarse en matrices físicas que se ensamblan directamente con las matrices de los estratos obtenidas en la sección anterior.

Ondas SV-P

El modo de propagación de ondas de Rayleigh en un semi-espacio homogéneo se deriva de la matriz de flexibilidad obtenida invirtiendo la matriz de rigidez dada en (13).

$$\bar{F}_R^{hs} = (\bar{K}_R^{hs})^{-1} = \frac{1}{\kappa(4rs - s^4 - 2s^2 - 1)} \begin{bmatrix} s(1-s^2) & 1+s^2-2rs \\ 1+s^2-2rs & r(1-s^2) \end{bmatrix} \quad (33)$$

El número de onda asociado con el modo de Rayleigh, $\kappa_0 = V_S / V_R$, se obtiene como una de las raíces del denominador común de los coeficientes de flexibilidad

$$4rs - s^4 - 2s^2 - 1 = 0 \quad (34)$$

Las amplitudes no acotadas de los coeficientes de flexibilidad están asociados a este modo de Rayleigh, que puede expresarse en términos de un modo simple de segundo orden o de dos modos de primer orden

$$\begin{aligned} \bar{F}_0^{hs} &= \begin{bmatrix} \psi_{\rho,0} & i\psi_{\rho,0} \\ \psi_{z,0} & -i\psi_{z,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa - \kappa_0 & 0 \\ 0 & \kappa + \kappa_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_{\rho,0} & \psi_{z,0} \\ i\psi_{\rho,0} & -i\psi_{z,0} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\kappa^2 - \kappa_0^2} \begin{bmatrix} \phi_{\rho,0}^2 & \kappa/\kappa_0 \cdot \phi_{\rho,0}\phi_{z,0} \\ \kappa/\kappa_0 \cdot \phi_{\rho,0}\phi_{z,0} & \phi_{z,0}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$\phi_{\rho,0} = \sqrt{\sqrt{\kappa_0^2 - 1}/A_0} \quad \phi_{z,0} = \sqrt{\sqrt{\kappa_0^2 - \alpha^2}/A_0} \quad (36)$$

$$\psi_{\rho,0} = \phi_{\rho,0}/\sqrt{2\kappa_0} \quad \psi_{z,0} = \phi_{z,0}/\sqrt{2\kappa_0} \quad (37)$$

$$A_0 = \frac{8\kappa_0^4 - 6\kappa_0^2(\alpha^2 + 1) + 4\alpha^2}{\sqrt{\kappa_0^2 - \alpha^2}\sqrt{\kappa_0^2 - 1}} - 8\kappa_0^2 + 4 \quad (38)$$

La matriz de flexibilidad "remanente" se obtiene descontando la contribución del modo de Rayleigh de la matriz de flexibilidad exacta. La función propuesta para el ajuste de esta matriz de flexibilidad remanente consiste en una fracción polinómica matricial cuya forma matricial asociada se expresa a través de autovalores de primer orden

$$\begin{aligned} \tilde{F}_R^{hs} &= \bar{F}_R^{hs} - \bar{F}_0^{hs} \\ &\approx (Q_0 + \kappa Q_1 + \kappa^2 Q_2 + \dots + \kappa^n Q_n + \kappa^{n+1} I)^{-1} (R_0 + \kappa R_1 + \kappa^2 R_2 + \dots + \kappa^n R_n) \end{aligned} \quad (39)$$

Esta técnica fue utilizada por [Wolf \(1994\)](#) en el dominio de la frecuencia y en casos de un GL como es el caso de las ondas *SH*. La matriz R_0 es forzada a tomar el valor de la matriz de flexibilidad remanente para $\kappa = 0$

$$R_0 = \bar{F}_R^{hs} \Big|_{\kappa=0} - \bar{F}_0^{hs} \Big|_{\kappa=0} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa_0^2} \begin{bmatrix} \phi_{\rho,0}^2 & 0 \\ 0 & \phi_{z,0}^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

mientras que la matriz Q_0 se define como la matriz identidad a fin de asegurar que la matriz de flexibilidad aproximada resulte exacta para $\kappa = 0$. Por otra parte, la matriz R_n se define igual a la matriz de flexibilidad remanente para $\kappa \rightarrow \infty$

$$R_n = (\kappa \bar{F}_R^{hs}) \Big|_{\kappa \rightarrow \infty} - (\kappa \bar{F}_0^{hs}) \Big|_{\kappa \rightarrow \infty} = \frac{1}{2(1-\alpha^2)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\kappa_0} \begin{bmatrix} 0 & \phi_{\rho,0} \phi_{z,0} \\ \phi_{\rho,0} \phi_{z,0} & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Ondas *SH*

El ajuste de la flexibilidad del semi-espacio para ondas *SH* se realiza en forma similar

$$\tilde{F}_L^{hs} = (Q_0 + \kappa Q_1 + \kappa^2 Q_2 + \dots + \kappa^n Q_n + \kappa^{n+1} I)^{-1} (R_0 + \kappa R_1 + \kappa^2 R_2 + \dots + \kappa^n R_n) \quad (42)$$

El coeficiente R_0 toma el valor exacto para $\kappa = 0$

$$R_0 = \bar{F}_L^{hs} \Big|_{\kappa=0} = -i \quad (43)$$

mientras que el coeficiente Q_0 se toma igual a la unidad. Además, al coeficiente R_n se le asigna el valor exacto de la flexibilidad para $\kappa \rightarrow \infty$

$$R_0 = \bar{F}_L^{hs} \Big|_{\kappa=0} = -i \quad (44)$$

Procedimiento de ajuste

El proceso de ajuste de parámetros modales para reproducir los coeficientes de flexibilidad en el dominio número de onda posee varias etapas, y los detalles de un proceso similar para el caso de parámetros modales de segundo orden se presentan en el trabajo de [Ceballos y Prato \(2011b\)](#). La explicación exhaustiva del cálculo de los parámetros modales de primer orden se presenta en el trabajo de [Ceballos y Prato \(2014\)](#) enviado para posible publicación.

La forma final de las matrices del semi-espacio poseen una estructura matemática similar a la de los estratos, permitiendo su ensamble obtener las matrices del perfil completo de suelo.

$$K_A^{hs} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{K}_0 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \text{GL físicos} \\ \} \text{GL auxiliares} \end{array} \right\} \quad (45)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{fis.}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{aux.}}$

$$K_B^{hs} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{K}_1 & \hat{K}_c^T \\ \hline \hat{K}_c & \hat{\Lambda} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \text{GL físicos} \\ \} \text{GL auxiliares} \end{array} \right\} \quad (46)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{fis.}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{aux.}}$

3.3 Problema de autovalores del perfil completo de suelo

La contribución a la flexibilidad de un modo genérico m de la aproximación de segundo orden (método de capas delgadas) puede expresarse como una combinación de 2 modos de la formulación de primer orden propuesta en este trabajo. La relación entre estos tipos de modos para el caso de las ondas SV-P es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_m &= \begin{bmatrix} \psi_{\rho,m} & i\psi_{\rho,m} \\ \psi_{z,m} & -i\psi_{z,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa - \kappa_m & 0 \\ 0 & \kappa + \kappa_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_{\rho,m} & \psi_{z,m} \\ i\psi_{\rho,m} & -i\psi_{z,m} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\kappa - \kappa_m} \begin{bmatrix} \psi_{\rho,m}^2 & \psi_{\rho,m}\psi_{z,m} \\ \psi_{z,m}\psi_{\rho,m} & \psi_{z,m}^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa + \kappa_m} \begin{bmatrix} -\psi_{\rho,m}^2 & \psi_{\rho,m}\psi_{z,m} \\ \psi_{z,m}\psi_{\rho,m} & -\psi_{z,m}^2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\kappa^2 - \kappa_m^2} \left((\kappa + \kappa_m) \begin{bmatrix} \psi_{\rho,m}^2 & \psi_{\rho,m}\psi_{z,m} \\ \psi_{z,m}\psi_{\rho,m} & \psi_{z,m}^2 \end{bmatrix} + (\kappa - \kappa_m) \begin{bmatrix} -\psi_{\rho,m}^2 & \psi_{\rho,m}\psi_{z,m} \\ \psi_{z,m}\psi_{\rho,m} & -\psi_{z,m}^2 \end{bmatrix} \right) \quad (47) \\
 &= \frac{2\kappa_m}{\kappa^2 - \kappa_m^2} \begin{bmatrix} \psi_{\rho,m}^2 & \kappa/\kappa_m \cdot \psi_{\rho,m}\psi_{z,m} \\ \kappa/\kappa_m \cdot \psi_{z,m}\psi_{\rho,m} & \psi_{z,m}^2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\kappa^2 - \kappa_m^2} \begin{bmatrix} \phi_{\rho,m}^2 & \kappa/\kappa_m \cdot \phi_{\rho,m}\phi_{z,m} \\ \kappa/\kappa_m \cdot \phi_{z,m}\phi_{\rho,m} & \phi_{z,m}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde

$$\phi_{\rho,m} = \sqrt{2\kappa_m} \cdot \psi_{\rho,m} \quad ; \quad \phi_{z,m} = \sqrt{2\kappa_m} \cdot \psi_{z,m} \quad (48)$$

Una característica particular de la aproximación de primer orden es que los autovalores aparecen en los 4 cuadrantes del plano complejo, a diferencia de la aproximación de segundo orden donde se "eligen" los autovalores con parte imaginaria no-positiva (3° y 4° cuadrantes). De todos modos, la contribución a la respuesta espacial del modo de segundo orden en (47) es lógicamente idéntica a la combinación de los 2 modos de primer orden asociados.

Otra característica de esta formulación es que no todos los modos están asociados a otro con su autovalor con el signo opuesto. Precisamente, estos modos "simples" se requieren para reproducir los coeficientes exactos para $\kappa \rightarrow \infty$ y lograr así representar adecuadamente la respuesta estática del perfil de suelo.

La relación entre parámetros modales dimensionales y no-dimensionales es la siguiente

$$s_m = \frac{\omega}{V_s} \kappa_m \quad \quad \varphi_m = \frac{1}{\sqrt{\rho} V_s} \psi_m \quad (49)$$

La flexibilidad del perfil de suelo dada en (6) en correspondencia con la j -ésima interfaz adquiere la siguiente forma

$$F(k)_j = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_{\rho,m}^2}{k - s_m} & 0 & \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_{\rho,m}\varphi_{z,m}}{k - s_m} \\ 0 & \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_{\theta,n}^2}{k - s_n} & 0 \\ \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_{z,m}\varphi_{\rho,m}}{k - s_m} & 0 & \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_{z,m}^2}{k - s_m} \end{bmatrix} \quad (50)$$

4 CÁLCULO DE LA FLEXIBILIDAD DINÁMICA DE DISCOS RÍGIDOS

La capacidad de la formulación propuesta para describir la respuesta de un perfil de suelo a cargas dinámicas se analiza a través de un problema clásico de elastodinámica que consiste en el cálculo de la flexibilidad de discos rígidos apoyados sobre perfiles simples (Kausel, 2010). Las comparaciones se realizan con valores calculados por inversión de la matriz de rigidez obtenida con el método de los anillos (Lysmer, 1965). La respuesta para cada carga anular se obtiene como la diferencia entre aquellas de dos discos de diferente diámetro sujetos a una carga uniforme de diferente signo. Se asume que no hay deslizamientos entre el disco y la superficie de contacto, y se plantean condiciones de compatibilidad para el centro de los anillos. Dado que las tensiones presentan una singularidad en el borde del disco, el espesor de los anillos se reduce gradualmente cerca del borde para suavizar el efecto de este valor no acotado.

Se analizan 3 casos diferentes: 1) semi-espacio homogéneo, 2) estrato homogéneo con un espesor igual al diámetro del disco, apoyado sobre un semi-espacio infinitamente rígido, y 3) similar al caso anterior pero con un semi-espacio elástico con una velocidad de ondas de corte igual a 2.5 veces mayor que la del estrato. Para todos los casos se adopta $v = 1/3$.

La Figura 6 a la Figura 11 presentan una comparación de las curvas de flexibilidad obtenidas con la formulación propuesta usando 50 anillos, con aquellas obtenidas con el programa SASSI (Stevenson & Associates, 1996). Las curvas se adimensionalizan con la flexibilidad estática del Caso 1, mientras que la frecuencia excitatriz se define como

$$\Omega = R/V_s \cdot \omega \quad (51)$$

donde R es el radio del disco y V_s es la velocidad de ondas de corte en la superficie libre del perfil de suelo.

El grado de correlación conseguido es altamente satisfactorio pudiendo incluso simularse características de difícil representación numérica. Por ejemplo, se observa que para el Caso 2 no ocurre amortiguamiento por radiación para frecuencias por debajo de la frecuencia fundamental del estrato, lo cual se refleja en la parte imaginaria nula de α_{pp} para frecuencias menores a $\Omega = \pi/4$, y menos rigurosamente para α_{zz} y $\alpha_{\theta\theta}$ para frecuencias menores a $\Omega = \pi/2$.

5 CONCLUSIONES

El trabajo presenta una formulación aproximada para el método directo de rigidez como alternativa del método de capas delgadas usando parámetros modales de primer orden en lugar de modos de segundo orden. De esta forma, la formulación resulta doblemente asintótica dado que tiende a los valores exactos de rigidez para números de onda que tienden tanto a cero como a infinito. En esta formulación, como en la solución exacta, los coeficientes de rigidez del semi-espacio son complejos conservando la capacidad de representar el amortiguamiento por radiación sin la necesidad de incorporar términos adicionales artificiales. La formulación propuesta resulta más precisa respecto a las aproximaciones disponibles previamente, y permite obtener la solución estática como un caso particular.

Los ejemplos desarrollados de discos rígidos apoyados sobre perfiles típicos de suelo ilustran la excelente capacidad para representar soluciones conocidas, mostrando el potencial de esta formulación para otros problemas más complejos de elastodinámica. Otras potenciales aplicaciones del enfoque propuesto son: *a*) caracterización de sitios a través de métodos de propagación de ondas, *b*) amplificación de ondas en medios estratificados, *c*) determinación de la rigidez dinámica de fundaciones rígidas para un amplio rango de frecuencias, *d*) estudio de problemas de interacción dinámica suelo-estructura.

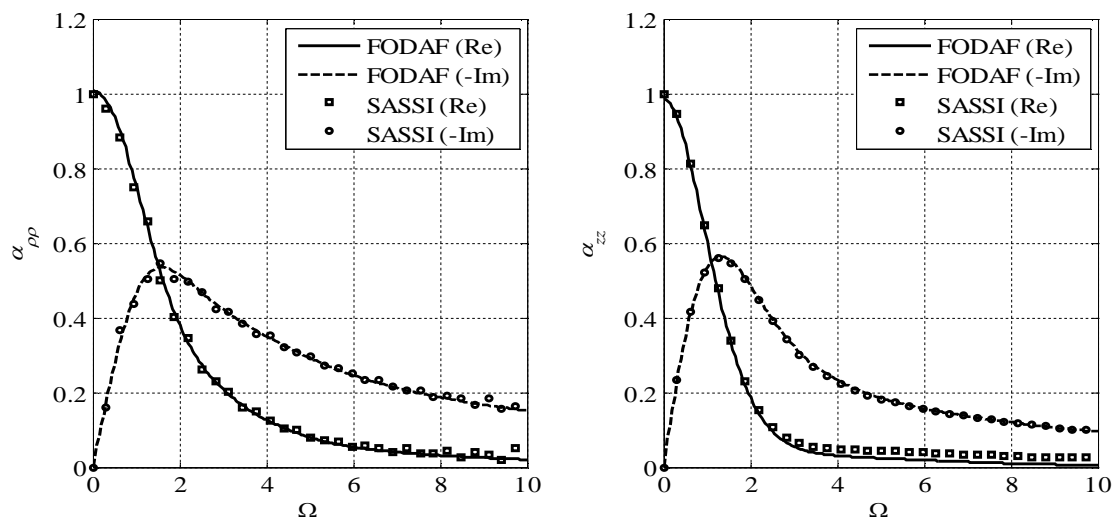


Figura 6: Componentes de flexibilidad dinámica para el Caso 1

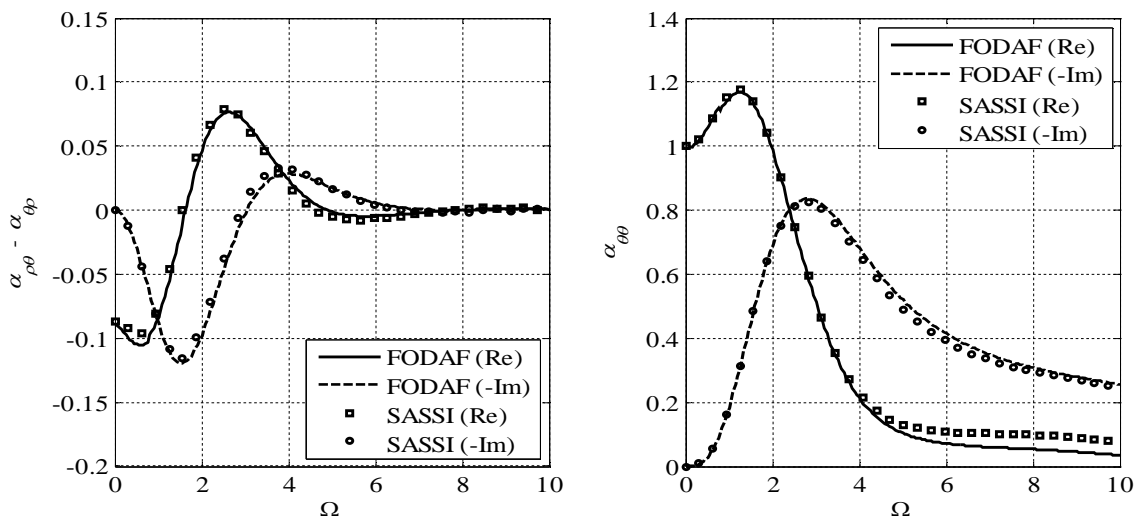


Figura 7: Componentes de flexibilidad dinámica para el Caso 1

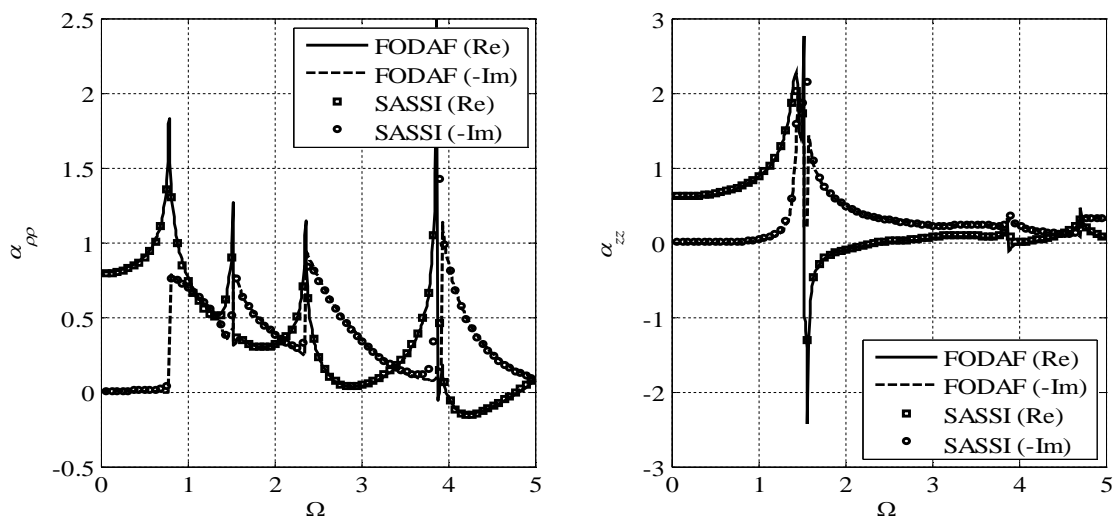


Figura 8: Componentes de flexibilidad dinámica para el Caso 2

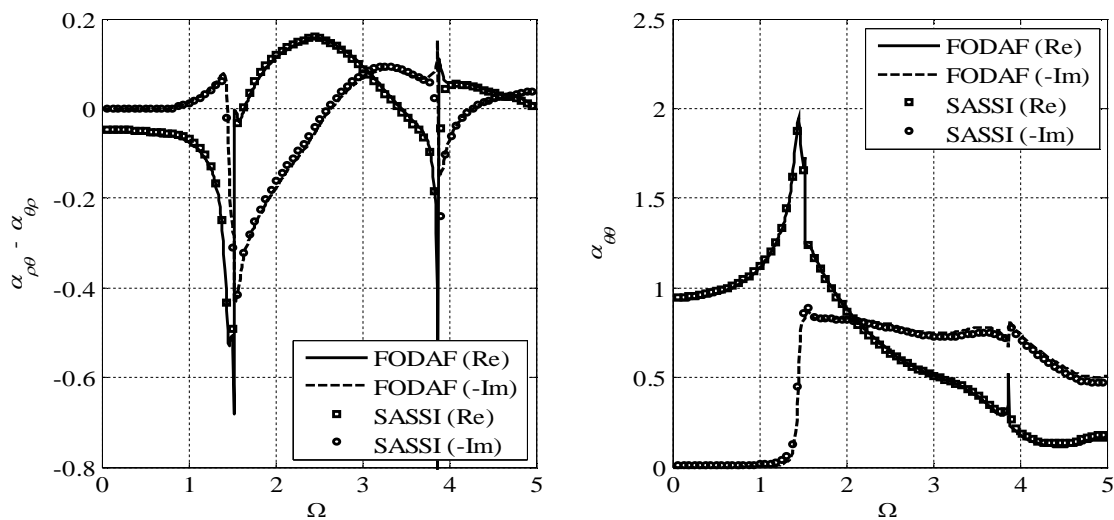


Figura 9: Componentes de flexibilidad dinámica para el Caso 2

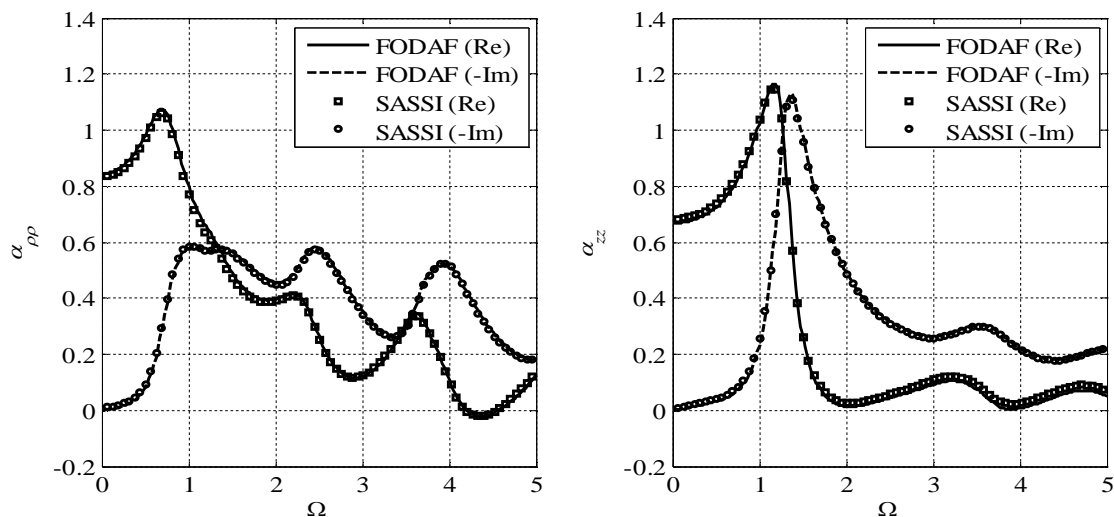


Figura 10: Componentes de flexibilidad dinámica para el Caso 3

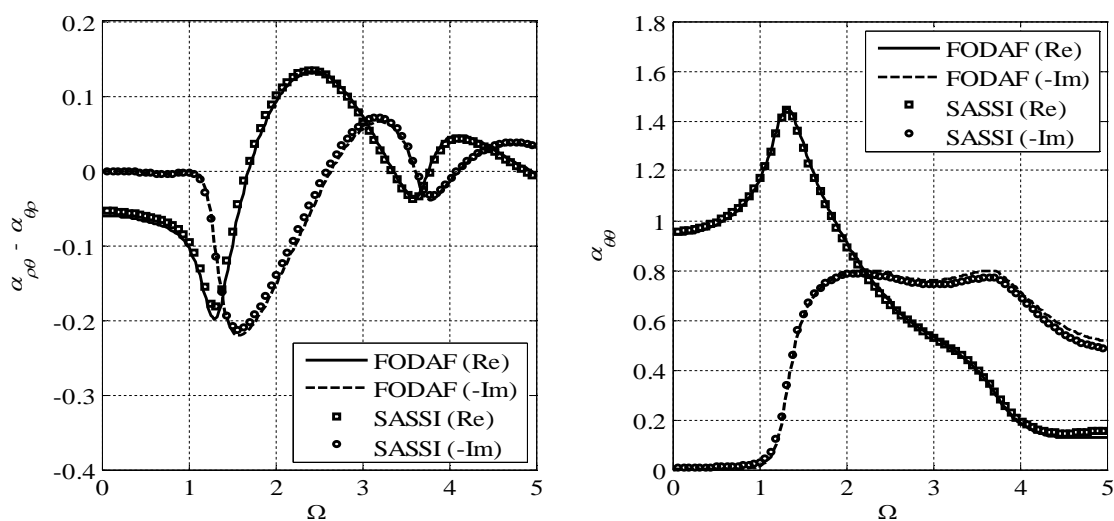


Figura 11: Componentes de flexibilidad dinámica para el Caso 3

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte de las actividades auspiciadas por el CONICET y por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba.

REFERENCIAS

- Ceballos, M.A. y Prato, C.A., Análisis de Ondas Superficiales Utilizando Modelos para la Rigidez Dinámica del Semi-espacio Compatibles con la Formulación de Capas Delgadas, *IX Argentinean Congress on Computational Mechanics and II South American Congress on Computational Mechanics*, MECOM 2010, Buenos Aires, Argentina, 15-18 Nov 2010.
- Ceballos, M.A. y Prato, C.A., Determinación de la Rigidez Dinámica de Fundaciones Superficiales Usando un Modelo Modal de Propagación de Ondas, *XIX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones* (ENIEF 2011), Rosario, Argentina, 1-4 Nov 2011.
- Ceballos, M.A. and Prato, C.A., Experimental estimation of soil profiles through spatial phases analysis of surface waves, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31:91–103, 2011.
- Ceballos, M.A. and Prato, C.A., First-Order Doubly-Asymptotic Formulation of the Direct Stiffness Method for Elastodynamic Problems, enviado para posible publicación en la revista *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Enero-2014.
- Kausel, E. and Roesset, J.M., Stiffness matrices for layered soils, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71(6):1743–61, 1981.
- Kausel, E., *An explicit solution for the Green functions for dynamic loads in layered media*, MIT Research Report R81-13, Department of Civil Engineering, Cambridge, 1981.
- Kausel, E., Early history of soil–structure interaction, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30:822–32, 2010.
- Lysmer, J., *Vertical motion of rigid footings*, US Army Engineer Waterways Experiment Station, Report No. 3-115, Vicksburg, Mississippi, 137 pp, 1965.
- SUPER SASSI/PC: *Complete Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis System on Personal Computers*, Stevenson & Associates, Cleveland, OH, 1996.
- Wolf, J.P., *Foundation vibration analysis using simple physical models*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1994.