

UNA FORMULACIÓN EULERIANA DE ELEMENTOS FINITOS PARA LA DESCRIPCIÓN DE DEFORMACIONES ELÁSTICAS

Dolores Demarco^a y Eduardo N. Dvorkin
Centro de Investigación Industrial, TENARIS,
Dr. Simini 250, 2804 Campana, Argentina
^ae-mail: siddod@siderca.com

Palabras Clave: Elasticidad, Deformaciones Finitas, Elementos Finitos, Formulación Euleriana, Superficie Libre.

Resumen. Se presenta una formulación Euleriana de elementos finitos capaz de describir procesos estacionarios con deformaciones elásticas finitas. La nueva formulación se basa en el transporte del tensor Gradiente de Deformaciones y en el modelado de la superficie libre a través del método de pseudo-concentraciones o formulación level-set.

1 INTRODUCCIÓN

Modernamente la mayoría de los nuevos desarrollos tecnológicos en el campo del conformado de metales se basan en el modelado computacional de los procesos de deformación. La finalidad de estos modelos es tener una herramienta para analizar, por ejemplo, diferentes opciones dimensionales en las herramientas de conformado, diferentes condiciones de lubricación en las mismas, etc. Es decir, explorar las llamadas *ventanas tecnológicas*¹ de las variables que intervienen en determinado proceso. La exploración de estas ventanas tecnológicas resulta sumamente costosa cuando se realiza utilizando pruebas a nivel industrial, ya sea por el coste de los materiales o por el lucro cesante que implica interrumpir una producción continua.

En CINI-TENARIS se desarrolló el código de elementos finitos METFOR destinado a modelar procesos de conformado masivo de productos de acero, como por ejemplo forja, laminación, etc. El proceso de laminación es más eficazmente descrito si se fija la atención en determinada zona del espacio y se describe el comportamiento del material que la atraviesa. Por ello, este código utiliza una descripción Euleriana y modela la superficie libre con el método de pseudo-concentraciones (Thompson 1986) (Thompson & Smelser 1988). En METFOR se utiliza un modelo de material rígido-viscoplástico e incompresible (Cavaliere, Goldschmit & Dvorkin 1997) (Dvorkin & Petöcz 1993).

Por otra parte, en el análisis de ciertos procesos de conformado masivo no es posible despreciar las deformaciones elásticas. Por ejemplo, en la laminación en frío de chapas de acero ya sea porque la recuperación elástica juega un rol importante en el proceso o porque sea necesario modelar las tensiones residuales que quedan incluidas en los productos laminados.

La principal motivación para este trabajo se origina en la necesidad de obtener simulaciones más realistas en lo que se refiere a incorporar la elasticidad de los materiales a la descripción de los procesos de laminación. Como un paso importante en el logro de este fin es que se desarrolla, una formulación Euleriana capaz de describir procesos estacionarios con grandes deformaciones elásticas. Este tipo de formulación debe completarse con la descripción de la evolución de la superficie libre del material. Para ello se define una función escalar sobre el dominio computacional cuyo valor determina la presencia de un determinado tipo de material en cada punto del dominio. La evolución de esta función, a través de una ecuación de transporte, determinará la posición del frente en cada instante (método de las pseudo-concentraciones o formulación level-set (Osher & Sethian 1988)).

2 FORMULACIÓN EULERIANA

2.1 Ecuaciones del continuo

En la configuración espacial a tiempo t se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas $\{x_j, j = 1, 2, 3\}$ y, en determinado punto \mathbf{x} , de esta configuración, la velocidad material está dada por

$${}^t\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

¹El lugar geométrico en el espacio de las variables que controlan un proceso en el que los resultados de dicho proceso son aceptables en lo que hace a la calidad del producto fabricado y al uso de recursos.

En lo subsiguiente, dada una variable espacial cualquiera $\zeta(\mathbf{x}, t)$, se denominará

$${}^t\zeta = \zeta(\mathbf{x}, t).$$

En la configuración en t , en forma local, las ecuaciones de equilibrio son

• **Ecuación de balance de momento lineal:**

$${}^t\rho \left(\frac{\partial {}^t\mathbf{v}}{\partial t} + {}^t\mathbf{v} \cdot \nabla {}^t\mathbf{v} \right) = {}^t\mathbf{f}^V + \nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma}; \quad (2)$$

donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} {}^t\mathbf{e}_k \right)$, con ${}^t\mathbf{e}_k$ vectores ortonormales base del sistema cartesiano, ${}^t\rho$ es la densidad, ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy y ${}^t\mathbf{f}^V$ las fuerzas externas por unidad de volumen. Como se consideran procesos de deformación "lentos", se despreciará el término de inercia frente al resto de los términos de la ecuación.

• **Ecuación de balance de masa:**

Dado que se trabaja sin la aproximación de material incompresible, la ecuación de balance de masa forma parte del sistema a resolver. Para un material con densidad ${}^0\rho$ en la configuración de referencia, la ecuación local de balance de masa a tiempo t se expresa

$$\frac{\partial {}^t\rho}{\partial t} + \nabla \cdot ({}^t\rho {}^t\mathbf{v}) = 0. \quad (3)$$

En forma local Lagrangiana,

$${}^t\rho(\mathbf{x}) = \frac{{}^0\rho(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X}, t)} \text{ (donde } \mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X}) \text{)}. \quad (4)$$

Es decir, la densidad de determinado punto, \mathbf{x} , en la configuración en t (configuración espacial) es el cociente entre la densidad inicial de la partícula que a t está en \mathbf{x} , dividido el Jacobiano de la transformación $\varphi_t(\mathbf{X})$. Esta relación puede escribirse en función de las coordenadas espaciales y el tiempo:

$${}^t\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \frac{{}^0\rho(\mathbf{x}, t)}{{}^tJ}. \quad (5)$$

En un sistema de coordenadas cartesianas fijas, es inmediato demostrar que

$${}^tJ = \det [{}^t\mathbf{F}] , \quad (6)$$

donde ${}^t\mathbf{F}$ es el tensor Gradiente de Deformaciones expresado ahora en función de las coordenadas espaciales y el tiempo. En el caso de que la densidad en la configuración de referencia sea uniforme, resolver (3) equivale a resolver

$$\frac{\partial {}^tJ}{\partial t} + {}^t\mathbf{v} \cdot \nabla {}^tJ - {}^tJ \nabla \cdot {}^t\mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

• **Transporte del tensor Gradiente de Deformaciones:**

En elasticidad, deben especificarse variables adicionales para describir el movimiento del material; existe una extensión de la ecuación de continuidad que está relacionada con la derivada material del tensor gradiente de deformaciones

$$\frac{D {}^t_o\mathbf{F}}{Dt} = \frac{\partial {}^t_o\mathbf{F}}{\partial t} + {}^t\mathbf{v} \cdot \nabla {}^t_o\mathbf{F} = {}^t\mathbf{1} \cdot {}^t_o\mathbf{F} \quad (8)$$

donde ${}^t\mathbf{1}^T = \nabla {}^t\mathbf{v}$ es el tensor gradiente de velocidades.

En la Teoría No Lineal, las separación correcta entre parte desviadora y volumétrica de la deformación debe ser de la forma multiplicativa (Simo & Hughes 1998). Si se llama ${}^t_o\widehat{\mathbf{F}}$ a la parte del tensor ${}^t_o\mathbf{F}$ que conserva el volumen, entonces debe cumplirse que

$$\left[\det \left({}^t_o\widehat{\mathbf{F}} \right) \right] = 1$$

dado que ${}^tJ = \det [{}^t_o\mathbf{F}]$ da el cambio de volumen. Luego,

$${}^t_o\widehat{\mathbf{F}} = {}^tJ^{-\frac{1}{3}} {}^t_o\mathbf{F} . \quad (9)$$

La evolución de la parte isocórica del tensor Gradiente de Deformaciones será

$$\frac{\partial {}^t_o\widehat{\mathbf{F}}}{\partial t} + {}^t\mathbf{v} \cdot \nabla {}^t_o\widehat{\mathbf{F}} = \left[{}^t\mathbf{1} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot {}^t\mathbf{v}) {}^t\mathbf{g} \right] \cdot {}^t_o\widehat{\mathbf{F}} . \quad (10a)$$

El tensor ${}^t\mathbf{g}$ es el tensor métrico en la configuración espacial, en este caso, es un tensor cartesiano.

Es importante notar que el cumplimiento de la Ec. (8) implica el cumplimiento de las Ecs. (7) y (10a).

2.2 Relación constitutiva hiperelástica

Para un material isotrópico con deformaciones elásticas finitas se utilizará la función de energía propuesta por Simo (Simo & Hughes 1998) (Simo, Taylor & Pister 1985):

$${}^tW = {}^tU ({}^tJ) + \frac{1}{2}G \operatorname{tr} \left({}^t\widehat{\mathbf{b}} \right) \quad (11a)$$

$${}^tU ({}^tJ) = \frac{1}{2}K (\ln {}^tJ)^2 . \quad (11b)$$

donde tW es la densidad de energía por unidad de volumen de la configuración de referencia, K, G son constantes del material y,

$${}^t\widehat{\mathbf{b}} = {}^t_o\widehat{\mathbf{F}} \cdot {}^t_o\widehat{\mathbf{F}}^T, \quad (12)$$

es la parte isocórica del tensor de deformaciones de Finger.

Este modelo puede verse como una extensión al rango compresible de un modelo neo-Hookean.

Las ecuaciones constitutivas para la elasticidad se obtienen de las siguientes relaciones

$${}^t\mathbf{S} = 2 \frac{\partial {}^tW}{\partial {}^t\mathbf{C}} \tag{13}$$

$${}^t\boldsymbol{\tau} = 2 {}^t\mathbf{F} \frac{\partial {}^tW}{\partial {}^t\mathbf{C}} {}^t\mathbf{F}^T \tag{14}$$

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\boldsymbol{\tau} \quad {}^tJ^{-1}; \tag{15}$$

donde ${}^t\mathbf{S}$ es el tensor Segundo de Piola-Kirchhoff, ${}^t\mathbf{C}$ es el tensor de deformaciones de Green y ${}^t\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff. Luego,

$${}^t\sigma_{ij} = ({}^tJ)^{-1} \left[K \ln ({}^tJ) \delta_{ij} + G \operatorname{dev} \left(\hat{b} \right)_{ij} \right] \tag{16}$$

donde

$$\operatorname{dev}(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\cdot).$$

2.3 Modelado de la superficie libre

Se define una función escalar suave $\phi(\mathbf{x}, t)$ sobre el dominio computacional tV de tal manera que, su valor en cierto punto \mathbf{x} de tV indique la presencia de un determinado tipo de material. Si lo que se describe es una superficie libre entonces, para un determinado tiempo t ,

$$\text{si } \phi(\mathbf{x}, t) \begin{cases} > \phi_l, \mathbf{x} \in \text{al material} \\ = \phi_l, \mathbf{x} \in \text{a la interfase} \\ < \phi_l, \mathbf{x} \notin \text{al material} \end{cases} ; \tag{17}$$

donde ϕ_l es un valor arbitrario. En particular, se toma a esta función ϕ , como una función de nivel tal que su nivel ϕ_l coincide con la interfase:

$${}^t\Gamma = \{\mathbf{x} | \phi(\mathbf{x}, t) = \phi_l\}. \tag{18}$$

A partir de la definición (17), se denominará "no material" a los puntos con $\phi(\mathbf{x}, t) < \phi_l$ a los cuales se asignarán propiedades físicas ficticias. Es decir, las propiedades físicas para un determinado punto del dominio, tV , dependerán de ϕ según:

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \pi_m(\mathbf{x}, t) H(\phi - \phi_l) + \pi_{nm}(1 - H(\phi - \phi_l)); \tag{19}$$

donde H es la función de Heaviside, y donde π_m son las propiedades del material real y π_{nm} las del material ficticio. Típicamente, se toma a éstas últimas como

$$\pi_{nm} = \frac{\pi_m}{10^3}. \tag{20}$$

Conocido el campo de velocidades y la distribución inicial de ϕ , dado que la interfase se mueve con las partículas de fluido, la evolución de ϕ estará dada por la ecuación:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + {}^t\mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0 \tag{21}$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}).$$

Esta ecuación es hiperbólica y, por consiguiente, las condiciones de borde para ϕ deben ser especificadas en el borde de entrada del flujo,

$$\Gamma_{ent} := \{\mathbf{x} \in \partial^t V \mid {}^t \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0\}, \quad (22)$$

con \mathbf{n} la normal externa a la superficie $\partial^t V$.

Como se verá más adelante, la Ec. (21) describe el movimiento de la interfase para materiales tanto incompresibles como compresibles.

En las referencias (Dvorkin, Cavaliere & Goldschmit 1995) (Cavaliere, Goldschmit & Dvorkin 2001) (Dvorkin, Cavaliere & Goldschmit 2003) pueden verse ejemplos de aplicación de este método, llamado de las pseudo-concentraciones o formulación level-set, a la laminación y en (Soto & Codina 2000) su aplicación al llenado de moldes. En las mismas, el material modelado es incompresible.

2.3.1 Incorporación de la superficie libre al balance de masa

Al tratar el problema de la interfase entre dos materiales (m y nm , en este caso) la Ec. (3) debe cumplirse para cada material por separado y además debe satisfacerse una condición de salto; es decir,

$$\frac{\partial {}^t \rho_{m/nm}}{\partial t} + \nabla \cdot ({}^t \rho_{m/nm} {}^t \mathbf{v}) = 0 \quad \text{en } {}^t V_{m/nm} \quad (23)$$

$$({}^t \mathbf{v}_{nm} - {}^t \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{n}_m = 0 \quad \text{en } {}^t \Gamma \quad (24)$$

donde \mathbf{n}_m es la dirección normal externa a ${}^t V_m$ que es el volumen ocupado por el material y ${}^t \Gamma$ es la interfase. La ecuación de salto (24), se cumplirá automáticamente al elegir una interpolación continua, de elementos finitos, para la velocidad.

Como las partículas no cambian su densidad inicial, deberá cumplirse que

$$\frac{\partial^0 \rho(\mathbf{X})}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{D^0 \rho(\mathbf{x}, t)}{Dt} = 0; \quad \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (25)$$

Por otro lado, si en el instante t , en la posición \mathbf{x} , se conoce ${}^t J$ entonces, conociendo, a través del transporte de pseudo-concentraciones qué material hay en dicho punto (es decir, conociendo ${}^0 \rho(\mathbf{x}, t)$), es posible determinar el valor de $\rho(\mathbf{x}, t)$ a partir de la Ec. (5). Reemplazando la expresión (5) en cada una de las dos ecuaciones (23), se llega a que el cumplimiento de la conservación de masa para todo t está regido por las ecuaciones (7) y (25). Sin embargo, resolver (25) es equivalente a resolver (21); simplemente debe hacerse una analogía entre los valores de pseudo-concentraciones y densidades iniciales.

2.3.2 Incorporación de la superficie libre al balance de momento lineal

A partir del teorema del transporte de una superficie de discontinuidad (Marsden & Hughes 1983), se deduce que, al modelar dos materiales separados por una interfase ${}^t \Gamma$, debe cumplirse para cada uno el balance

$$0 = {}^t \mathbf{f}^V + \nabla \cdot {}^t \boldsymbol{\sigma}_{m/nm} \quad \text{en } {}^t V_{m/nm}, \quad (26)$$

donde se han despreciado los efectos inerciales y, además, debe cumplirse la condición de salto,

$$\left({}^t\boldsymbol{\sigma}_{nm} - {}^t\boldsymbol{\sigma}_m \right) \cdot \mathbf{n}_m = \mathbf{0} \quad \text{en } {}^t\Gamma, \quad (27)$$

en ausencia de tensión superficial.

Sin embargo, en el marco de los elementos finitos, al expresar la Ec. (26) en forma débil e integrar por partes, la relación (27) queda incorporada como condición de borde natural. Luego, no es necesario agregar otra ecuación al sistema a resolver.

2.4 Propiedades del material

Si llamamos π_m a las propiedades del material, se tomarán a las del no material como

$$\pi_{nm} = \pi_m/10^3; \quad (28)$$

donde los subíndices m, nm se refieren al material y no material respectivamente.

En este caso, estas propiedades (Ec. 19) corresponderán a las propiedades elásticas del material; en particular a los parámetros de Lamé

$$\lambda_{nm} = \lambda_m/10^3 \quad (29)$$

$$\mu_{nm} = \mu_m/10^3 \quad (30)$$

de tal manera que

$$K_{nm} = K_m/10^3 \quad (31)$$

$$G_{nm} = G_m/10^3; \quad (32)$$

donde K y G son los módulos de compresibilidad, lo cual, de acuerdo a la experiencia numérica, da levemente mejores resultados que tomar

$$E_{nm} = E_m/10^3 \text{ módulo de Young}$$

$$\nu_{nm} = \nu_m/10^3 \text{ módulo de Poisson.}$$

2.5 Forma integral de las ecuaciones del continuo

Balance de momento lineal Considerando un campo de velocidades admisibles en la configuración espacial (Simo & Hughes 1998), $\delta^t \mathbf{v}$, y usando el teorema de la divergencia, la forma débil de la ecuación de balance de momento, cuando las fuerzas de inercia son despreciadas, será

$$\int_{{}^tV} \delta^t \mathbf{v} \cdot {}^t\rho \, {}^t\mathbf{f}^V \, {}^t dv + \int_{{}^t\partial V} \delta^t \mathbf{v} \cdot {}^t\mathbf{t} \, {}^t dv - \int_{{}^tV} \delta^t \mathbf{1} : {}^t\boldsymbol{\sigma} \, {}^t dv = 0 \quad (33)$$

donde ${}^t\partial V$ es el contorno de la configuración espacial, ${}^t\mathbf{t} = {}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de tracción sobre la superficie con normal externa ${}^t\mathbf{n}$ y

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} {}^t\boldsymbol{\sigma}_m \text{ en } {}^tV_m \\ {}^t\boldsymbol{\sigma}_{nm} \text{ en } {}^tV_{nm} \end{cases}$$

Transporte del Gradiente de Deformaciones Para el transporte del Gradiente de Deformaciones, la forma débil se obtiene a través de la técnica de residuos ponderados (Zienkiewicz & Taylor 1989). Para cada componente de ${}^t\mathbf{F}$, en el sistema cartesiano fijo, se obtiene, de la Ec. (8),

$$\int_{tV} w_p^{PG} \left[\frac{\partial {}^tF_{ij}}{\partial t} + {}^tv_k \frac{\partial {}^tF_{ij}}{\partial x_k} - {}^tl_{im} {}^tF_{mj} \right] {}^tdv = 0. \quad (34)$$

Donde w_p^{PG} son las funciones de peso SUPG (Hughes 1987) y el índice p va desde 1 al número de nodos de la discretización de elementos finitos ($NNODES$).

Transporte de pseudo-concentraciones Se utiliza la misma técnica que para el transporte del Gradiente de Deformaciones

$$\int_{tV} w_p^{PG} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + {}^t\mathbf{v} \cdot \nabla \phi \right] {}^tdv = 0. \quad (35)$$

3 FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 Interpolación

Se implementa una formulación de elementos finitos en 3D. Se utilizan hexaedros con funciones de interpolación de 8 nodos para cada variable,

$${}^tF_{ij}(r_l, t) = h_k(r_l) {}^tF_{ij}^k(t) \quad (36)$$

$$\mathbf{v}(r_l, t) = h_k(r_l) {}^t\mathbf{v}^k(t) \quad (37)$$

$$\phi(r_l, t) = h_k(r_l) {}^t\phi^k(t); \quad (38)$$

donde h_k son las funciones de interpolación isoparamétricas en 3D, $\{r_l, l = 1, 2, 3\}$ son las coordenadas naturales en el interior del elemento, ${}^tF_{ij}^k$, ${}^t\mathbf{v}^k$ y ${}^t\phi^k$ son los valores nodales de deformación, velocidad y pseudo-concentración. Notar que se utiliza la convención de Einstein para los índices repetidos. Notar que al discretizar la Ec. (34) se obtiene un sistema algebraico de $9 * NNODES$ ecuaciones acopladas.

Por otro lado, al discretizar (33) se obtienen los vectores de fuerzas nodales equivalentes a tiempo t ;

$$[{}^tR^{ext}]_i^k = \int_{tV} h_k {}^t\rho {}^t\mathbf{f}_i^V {}^tdv + \int_{t\partial V} h_k {}^t\mathbf{t}_i {}^tdv \quad (39)$$

$$[{}^tR^{int}]_i^k = \int_{tV} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} {}^t\sigma_{ij} {}^tdv. \quad (40)$$

3.2 Linealización de la ecuación de balance de momento

Con el fin de obtener el campo de velocidades a partir del balance de momento,

$$[{}^{t+\Delta t}R^{ext}]_i^k - [{}^{t+\Delta t}R^{int}]_i^k = 0, \quad (41)$$

se utiliza una forma linealizada de la ecuación a tiempo $t + \Delta t$,

$$[{}^tR^{ext}]_i^k - [{}^tR^{int}]_i^k + \left[\frac{\partial \left([{}^{t+\Delta t}R^{ext}]_i^k - [{}^{t+\Delta t}R^{int}]_i^k \right)}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} \Delta t = 0 \quad (42)$$

donde $k = 1, \dots, NNODES$ y $i = 1, \dots, 3$.

Teniendo en cuenta que, en una formulación Euleriana, las fuerzas nodales equivalentes son función de la posición espacial y el tiempo, la derivada temporal de la Ec. (39) es

$$\left[\frac{\partial [{}^{t+\Delta t}R^{ext}]_i^k}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} = \int_{{}^tV} h_k \left[\frac{\partial (\rho \mathbf{f}_i^V)}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} {}^t dv + \int_{{}^t\partial V} h_k \left[\frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} {}^t d\partial v. \quad (43)$$

Dado que el volumen de la configuración espacial, tV , no cambia con el tiempo, la derivada temporal afecta sólo al integrando. Derivando la Ec. (40) se obtiene

$$\left[\frac{\partial [{}^{t+\Delta t}R^{int}]_i^k}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} = \int_{{}^tV} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} {}^t dv. \quad (44)$$

Por otra parte, la tensión de Cauchy, Ec. (16), dependerá de las partes isocórica y volumétrica de la deformación,

$${}^t\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} \left({}^t\hat{\mathcal{F}}_{lm}, {}^t\Theta \right), \quad (45)$$

con ${}^t\hat{\mathcal{F}}_{lm}$, ${}^t\Theta$ interpolaciones, en 8 nodos, de ${}^t\hat{\mathbf{F}}$ y tJ y

$${}^t\sigma_{ij} \left({}^t\hat{\mathcal{F}}_{lm}, {}^t\Theta \right) = \frac{1}{({}^t\Theta)} \left[K \ln ({}^t\Theta) \delta_{ij} + G \left(\hat{\mathcal{F}}_{pi}\hat{\mathcal{F}}_{pj} - \frac{1}{3}\hat{\mathcal{F}}_{rs}\hat{\mathcal{F}}_{rs}\delta_{ij} \right) \right]. \quad (46)$$

Luego, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} &= \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \hat{\mathcal{F}}_{lm}} \right]_{t+\Delta t} \left[\Gamma_{lmkr}^{\hat{\mathbf{F}}} \right]_{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t}v_r^k \\ &+ \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Theta} \right]_{t+\Delta t} \left[\Gamma_{kr}^{\Theta} \right]_{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t}v_r^k; \end{aligned} \quad (47)$$

donde $\left[\Gamma_{lmkr}^{\hat{\mathbf{F}}} \right]_{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t}v_r^k$ y $\left[\Gamma_{kr}^{\Theta} \right]_{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t}v_r^k$ son las discretizaciones de $\frac{\partial {}^t\hat{\mathcal{F}}_{ij}}{\partial t}$ y $\frac{\partial {}^t\Theta}{\partial t}$, respectivamente (ver (Demarco & Dvorkin 2005)).

Por simplicidad, se considerará que las fuerzas externas son constantes. Luego, reemplazando las expresiones obtenidas más arriba, se obtiene, a partir de (42),

$$\int_{tV} \left\{ \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \widehat{\mathcal{F}}_{lm}} \right)_{t+\Delta t} \left(\Gamma_{lmkr}^{\widehat{\mathcal{F}}} \right)_{t+\Delta t} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Theta} \right)_{t+\Delta t} \left(\Gamma_{kr}^{\Theta} \right)_{t+\Delta t} \right] {}^t dv \right\} {}^{t+\Delta t} v_r^k = \frac{1}{\Delta t} \left([{}^t R^{ext}]_i^k - [{}^t R^{int}]_i^k \right). \tag{48}$$

Para la ley constitutiva (46),

$$\left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \widehat{\mathcal{F}}_{lm}} \right]_t = \frac{G}{t\Theta} \left(\delta_{mi} \widehat{\mathcal{F}}_{lj} + \delta_{mj} \widehat{\mathcal{F}}_{li} - \frac{2}{3} \widehat{\mathcal{F}}_{lm} \delta_{ij} \right) \tag{49}$$

y

$$\left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Theta} \right]_t = (\delta_{ij} K - {}^t \tau_{ij}) \frac{1}{(t\Theta)^2}. \tag{50}$$

4 EL ALGORITMO NUMÉRICO

Dado que se busca el régimen estacionario del proceso de deformación bajo análisis, se plantea un algoritmo de pasos temporales. Utilizando la Ec. (48), se incrementa el tiempo hasta llegar al régimen estacionario:

$$\| {}^{t+\Delta t} \mathbf{v} - {}^t \mathbf{v} \| \leq VTOL \tag{51}$$

El algoritmo implementado es:

1. $t = 0$
2. ${}^t \mathbf{F} = \mathbf{1}$ en toda la malla
3. ${}^t \phi = \phi_0$
4. $ite = 0$
5. ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(ite)} = {}^t \mathbf{v}$
6. ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(ite)} = {}^t \mathbf{F}$
7. ${}^{t+\Delta t} \phi = {}^t \phi$
8. $ite = ite + 1$
9. Calcular ${}^{t+\Delta t} \Theta$ y ${}^{t+\Delta t} \widehat{\mathcal{F}}$ usando ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(ite-1)}$
10. Calcular ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(ite)}$ usando (48) con los valores ${}^{t+\Delta t} \Theta$ y ${}^{t+\Delta t} \widehat{\mathcal{F}}$ y ${}^{t+\Delta t} \phi$
11. Calcular ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(ite)}$ usando (34)

$$12. \text{ IF } \left[\begin{array}{l} \left\| \begin{smallmatrix} t+\Delta t \mathbf{F}^{(ite)} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} t+\Delta t \mathbf{F}^{(ite-1)} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix} \right\| > FTOL \\ \text{OR. } \left\| \begin{smallmatrix} t+\Delta t \mathbf{v}^{(ite)} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} t+\Delta t \mathbf{v}^{(ite-1)} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix} \right\| > VTOL \end{array} \right]$$

THEN GO TO 8

13. Calcular ${}^{t+\Delta t}\phi$ usando (35)

14. IF $\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{v} - {}^t\mathbf{v}\| > VTOL$ THEN

$$t = t + \Delta t$$

GO TO 4

15. Se alcanzó el régimen estacionario.

4.1 Convergencia

En este trabajo se ha implementado sólo la aproximación lineal en Δt . Resulta importante notar que, a diferencia de una aproximación de Newton-Raphson del residuo, en este caso, el equilibrio se cumplirá sólo al llegar al régimen estacionario.

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se procede a la implementación del algoritmo descrito en las secciones anteriores. Si bien los ejemplos son en 3D, dada la total simetría de los problemas que se tratan (en la dirección \hat{z}), los gráficos se presentan en el plano (x, y) . El material que se modela es elástico con el módulo de Young del acero, $E = 2.1 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Todos los casos son analizados utilizando elementos 3D, hexaedros de 8 nodos de interpolación de ${}^t\mathbf{v}$, ${}^t\Theta$, ${}^t\hat{\mathcal{F}}$ y ${}^t\phi$.

5.1 Problema sin superficie libre: Canal convergente

Con el fin de investigar el comportamiento de la formulación de elementos finitos, se analiza en primer lugar la extrusión de un material elástico al atravesar un canal convergente. Se asume que las paredes carecen de fricción y que el material llena completamente al canal. Se analizan dos casos extremos: un material compresible, con un coeficiente de Poisson $\nu = 0.1$, y un material casi incompresible, con un alto coeficiente de Poisson, $\nu = 0.49$. En los ejemplos, de no especificarse lo contrario, se utiliza un $\Delta t = 10^{-3}$ s.

Se discute también el efecto de diferentes condiciones de borde. Se consideran dos casos:

$$\begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{Velocidad prescrita a la salida del canal} \\ \text{Carga nula a la entrada del canal} \\ \text{Velocidad prescrita a la entrada del canal} \\ \text{Carga nula a la salida del canal} \end{array} \right]$$

En ambos casos $\frac{h}{H} = 0.5$ (Fig. 1).

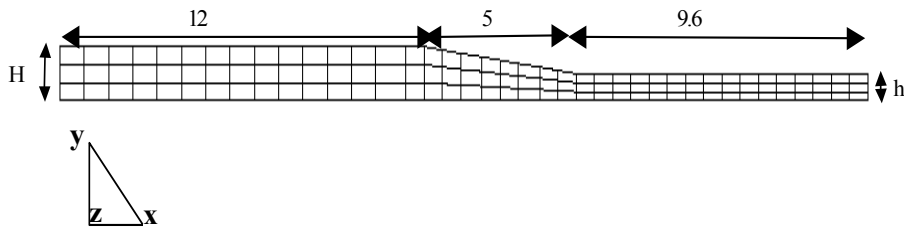


Figura 1: Canal convergente. Malla con 117 elementos. Las distancias están en cm.

5.1.1 Caso 1

Las condiciones de borde para este caso son:

$$\begin{aligned} {}^t v_n &= 0 \frac{cm}{s} \text{ en las paredes} \\ {}^t v_x &= v_{BC} = 100 \frac{cm}{s} \text{ en el borde de salida} \\ {}^t_o \mathbf{F} &= \mathbf{1} \text{ en el borde de entrada;} \end{aligned}$$

donde ${}^t v_n$ es la componente de velocidad normal a la pared.

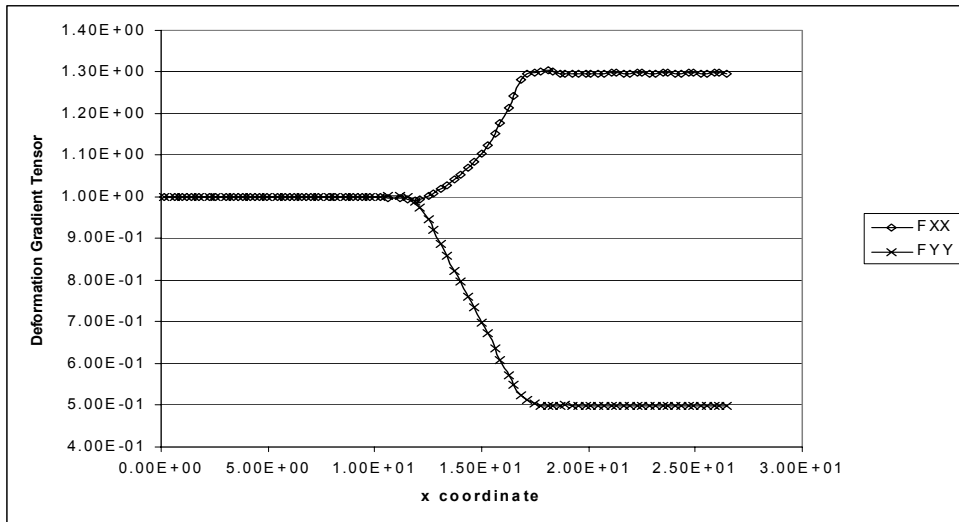
En las Fig. 2 se muestra la deformación a lo largo del eje del canal, para el régimen estacionario, para un material con $\nu = 0.1$ y, en las Figs. 3 y 4, los resultados correspondientes al material con $\nu = 0.49$.

Comentarios:

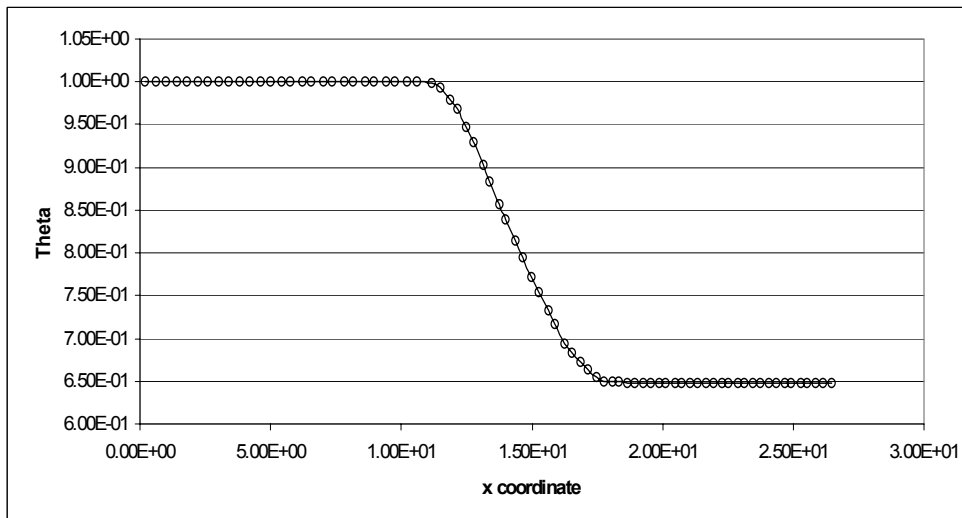
- Para ambos materiales se obtuvo que ${}^t \sigma_{xx} \rightarrow 0 \frac{kg}{cm^2}$ a la entrada del canal.
- Para ambos materiales ${}^t_o F_{yy} \rightarrow 0.5$ a la salida del canal (que es el resultado teórico).
- Cuando $\nu = 0.49$, es decir cuando $\nu \simeq 0.5$, ${}^t_o F_{yy} \simeq 2$ a la salida del canal. (y, por consiguiente, como es de esperar, ${}^t \Theta \simeq 1$).
- Es importante notar que la distribución de presión en el caso con $\nu = 0.49$ no presenta inestabilidades (checker modes (Zienkiewicz & Taylor 1989) (Bathe 1996)) en ninguno de los casos que se resolvieron.

5.1.2 Caso 2

En este caso, se impone:



(a)



(b)

Figura 2: Canal convergente. Caso 1 ($\nu = 0.1$). Tensor Gradiente de Deformaciones a lo largo del eje del canal: (a) Componentes; (b) ${}^t\Theta$.

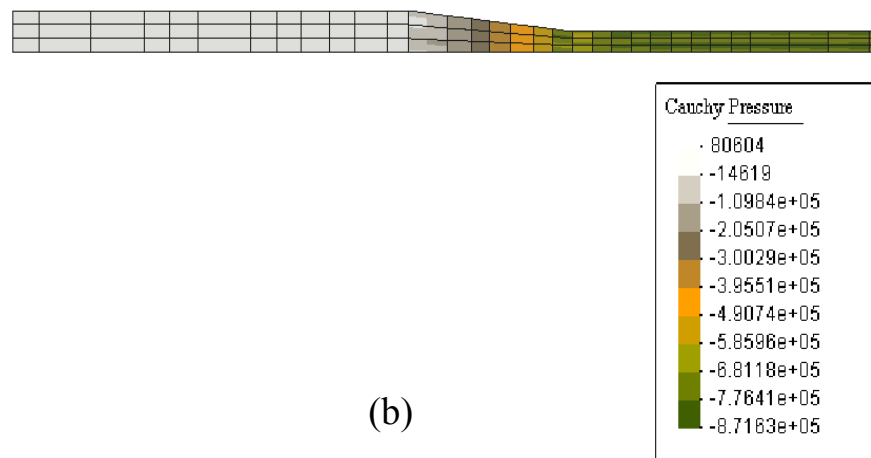
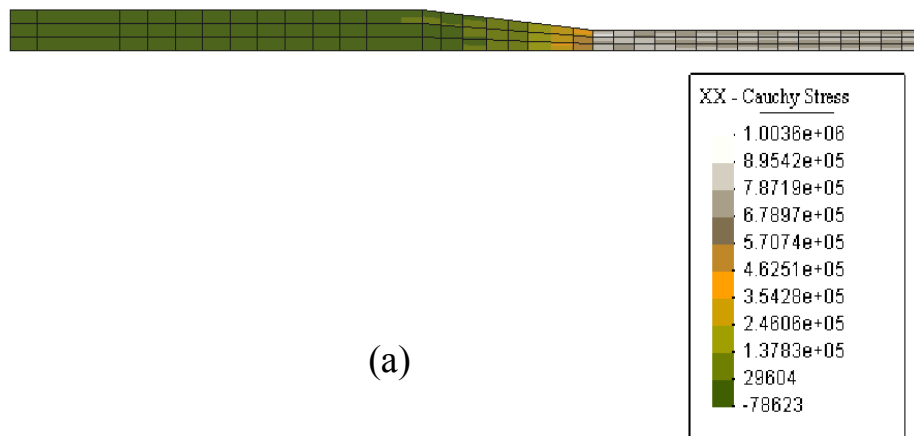
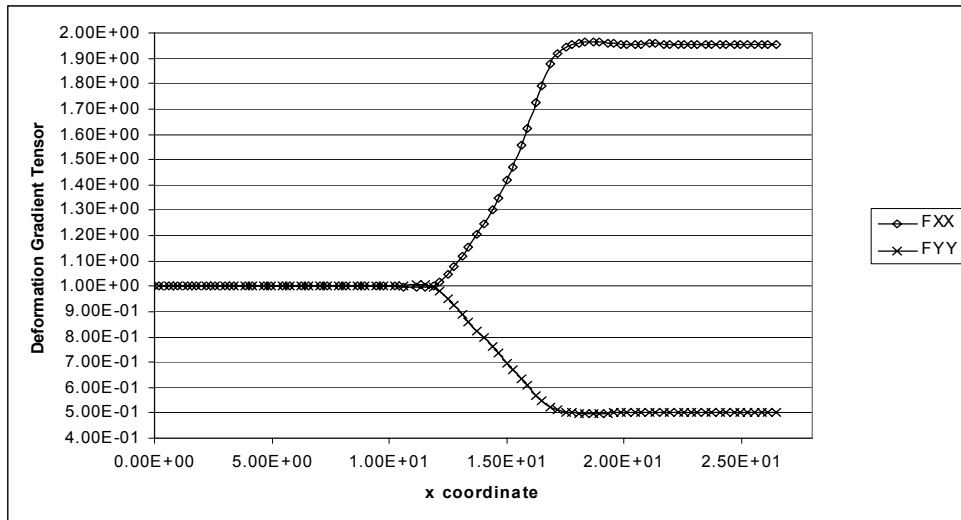
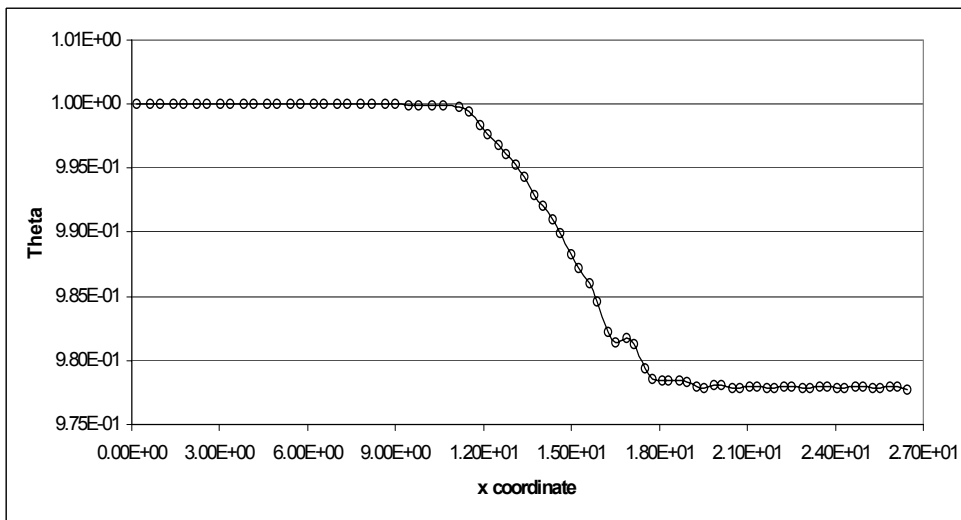


Figura 3: Canal convergente. Caso 1 ($\nu = 0.49$). Tensiones $\left(\text{en } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$:
 (a) ${}^t\sigma_{xx}$; (b) presión.



(a)



(b)

Figura 4: Canal convergente. Caso 1 ($\nu = 0.49$). Tensor Gradiente de Deformaciones a lo largo del eje del canal: (a) Componentes; (b) ${}^t\Theta$.

$$\begin{aligned}
 {}^t v_n &= 0 \frac{cm}{s} \text{ en las paredes} \\
 {}^t v_x &= v_{BC} = 100 \frac{cm}{s} \text{ en el borde de entrada} \\
 {}^t \sigma_{xx} &= 0 \frac{\overrightarrow{kg}}{cm^2} \text{ en el borde de salida}
 \end{aligned}$$

En las Fig. 5 se presentan los resultados de elementos finitos correspondientes a las deformaciones del material con $\nu = 0.1$.

Comentarios

- Dado que el material no está indeformado a la entrada del canal, no se impone el valor de ${}^t {}_o F_{xx}$ en $x = 0$ sino que se impone sólo una condición inicial para ${}^t {}_o F_{xx}$. Más adelante se analiza con mayor detalle este tema.
- Para este planteo de condiciones de borde es posible estimar el valor teórico de la deformación a la salida (sabiendo que ${}^t \sigma_{xx} = 0$ a la salida y que ${}^t {}_o F_{yy} = \frac{h}{H}$).
- Para ambos materiales ($\nu = 0.1$ y $\nu = 0.49$), se observa una buena convergencia del algoritmo hacia los resultados teóricos al refinar la malla en la dirección \hat{x} .

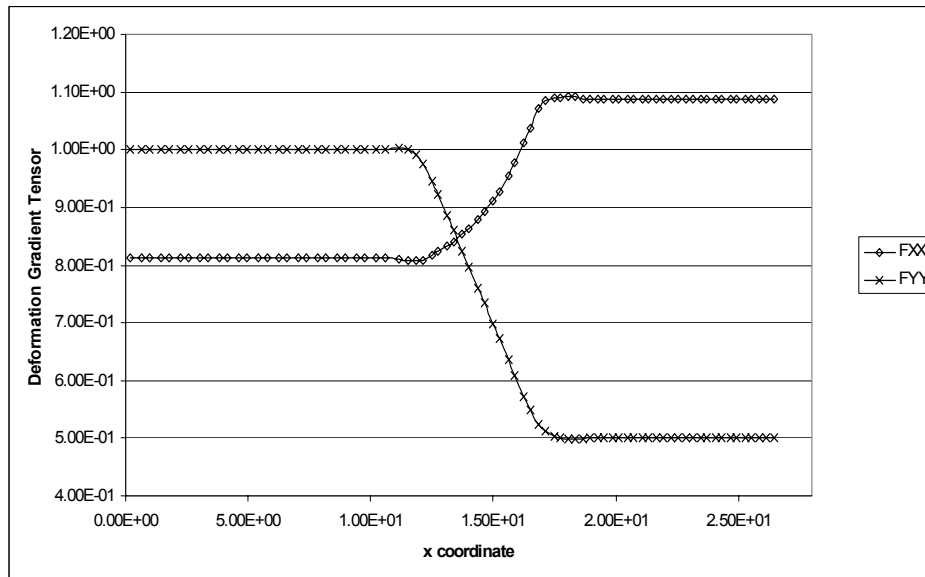


Figura 5: Canal convergente. Caso 2 ($\nu = 0.1$). Tensor Gradiente de Deformaciones a lo largo del eje del canal.

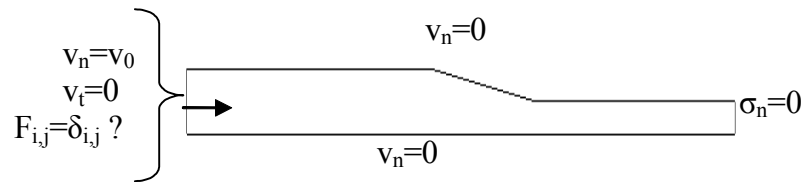


Figura 6: Condiciones de borde para el problema de flujo de un material elástico en un canal.

Condiciones de borde para el problema de flujo en un canal En la Fig. 6 se muestran las condiciones de borde utilizadas al modelar el flujo de material elástico en un canal. Para este problema se ha observado que al imponer deformación nula (${}^t_0\mathbf{F} = \mathbf{1}$) a la entrada del canal, al mismo tiempo que la velocidad, se presentan oscilaciones tanto en las variables ${}^t_0F_{xx}$ como en ${}^t l_{xx} = \frac{\partial {}^t v_x}{\partial x}$. Estas oscilaciones siguen al elemento y se observa que, al llevar al aumentar la densidad de elementos en \hat{x} , la amplitud de las oscilaciones permanece constante en el caso de la variable ${}^t_0F_{xx}$ y aumenta proporcionalmente en el caso de la variable ${}^t l_{xx}$.

Este comportamiento estaría indicando, como lo confirma la figura 7, una sobredeterminación de las condiciones de borde. Notar que, al no imponer ${}^t_0F_{xx} = 1$ a la entrada del canal, sino utilizar el valor ${}^t_0F_{xx} = 1$ como condición inicial del problema, las oscilaciones desaparecen.

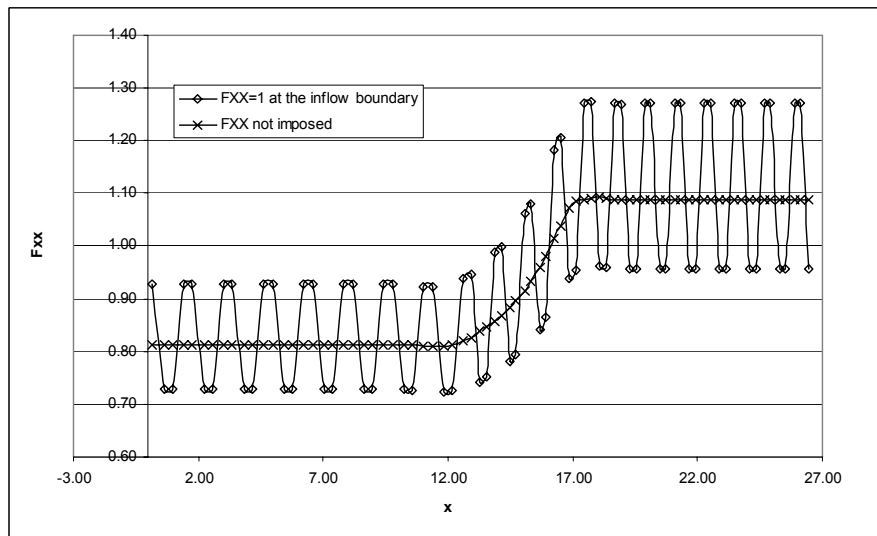


Figura 7: Caso 2 ($\nu = 0.1$) . ${}^t_0F_{xx}$ a lo largo del eje del canal con distintas condiciones de borde a la entrada del flujo.

5.1.3 Dependencia con Δt

Debe tenerse en cuenta que al disminuir Δt , la cantidad de pasos para llegar al estacionario crecerá. Por otro lado, a partir de la linealización (42), podemos estimar que los resultados serán más exactos al disminuir Δt si es que no se presenta ninguna inestabilidad del algoritmo. La convergencia del algoritmo es lineal con una pendiente que disminuye a medida que disminuye Δt .

Para el caso que se ha analizado más arriba para la malla de la Fig. 1 y $\nu = 0.49$ se presentan, en la Fig. 8, los valores de ${}^t\Theta$ a lo largo del eje del canal, para distintos valores de Δt . En las mismas se observa la convergencia al disminuir Δt .

5.2 Incorporación de la superficie libre: Rodillos

En la Fig 9 se muestra un esquema del problema a tratar para testear el algoritmo completo, incluyendo el modelado del contacto. El material fluye arrastrado por la fricción con el rodillo. La velocidad tangencial del rodillo es de 80 cm/s; el material es elástico con un coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. El paso temporal en todos los casos es $\Delta t = 8 \cdot 10^{-3}$ s.

5.2.1 Contacto

En el marco del conformado de metales, con el fin de resolver el problema de contacto entre las herramientas de conformado y el material procesado, nuestro grupo ha venido implementado condiciones de borde, para la ecuación del balance de momentos, dependientes del valor de pseudo-concentración; ver, por ejemplo, (Dvorkin et al. 2003).

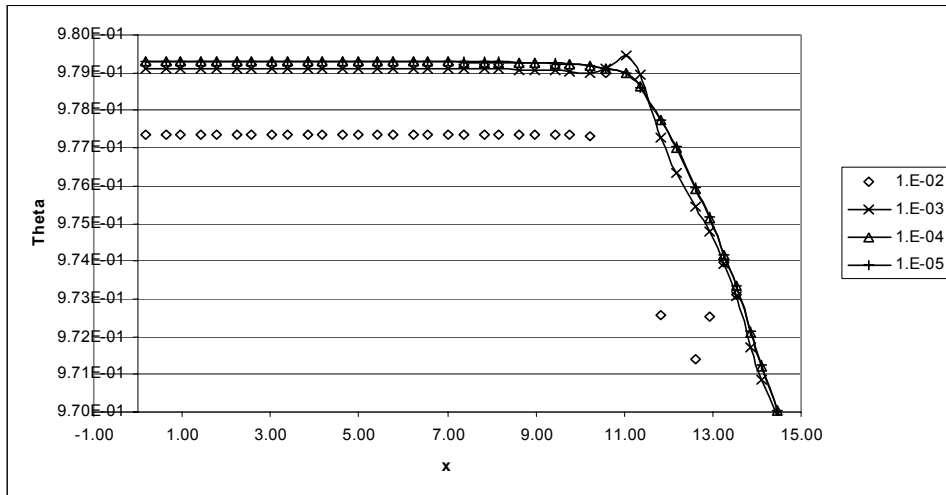
En los nodos correspondientes al borde en el que se encuentra la herramienta (representado por la línea roja en el esquema de la Fig. 9), se impone sobre la velocidad:

$$\begin{aligned} (i) \quad & {}^t\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{si } \phi(\mathbf{x}, t) \geq \phi_l \\ (ii) \quad & {}^t\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \text{ libre} \quad \text{si } \phi(\mathbf{x}, t) < \phi_l \end{aligned} \quad (52)$$

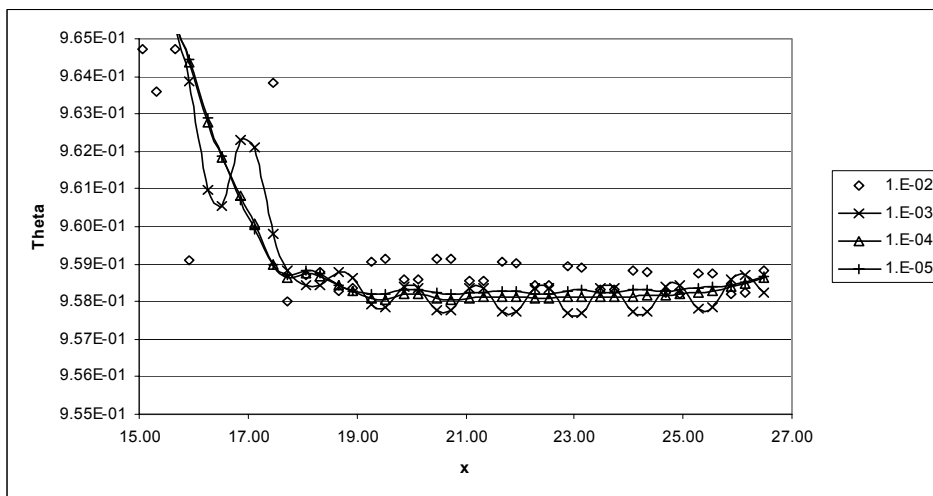
\mathbf{n} = normal a la superficie de contacto.

Entonces, luego de cada transporte de pseudo-concentraciones se imponen las condiciones (52).

Por otro lado, en lo relativo a las ecuaciones de evolución de ϕ y ${}^t_0\mathbf{F}$, debe tenerse en cuenta que, si para algún paso de tiempo, la velocidad normal en un nodo en la superficie de contacto apunta hacia adentro del dominio, este nodo debe considerarse como parte de Γ_{ent} (22) y, por lo tanto, se deben imponer condiciones de borde para ϕ y ${}^t_0\mathbf{F}$ en este punto. En (Dvorkin, Cavaliere, Goldschmit & Amenta 1998) se presenta una técnica que consiste en ampliar el dominio de cálculo más allá de los nodos de contacto, de tal manera que el límite con la herramienta deje de ser un contorno de la malla, como se observa en la Fig. 10, que muestra la malla a utilizar en este problema. Esta técnica evita que los valores (de, en este caso, ϕ y ${}^t_0\mathbf{F}$) arbitrarios, utilizados como condición de borde, estén impuestos sobre la superficie de contacto.



(a)



(b)

Figura 8: Canal convergente ($\nu = 0.49$). ${}^t\Theta$ a lo largo del eje del canal para diferentes Δt : (a) $0 \text{ cm} \leq x \leq 15 \text{ cm}$; (b) $15 \text{ cm} \leq x \leq 27 \text{ cm}$.

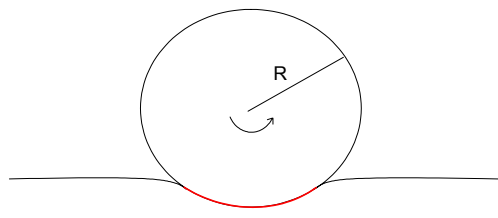


Figura 9: Esquema de un problema de laminación tipo.

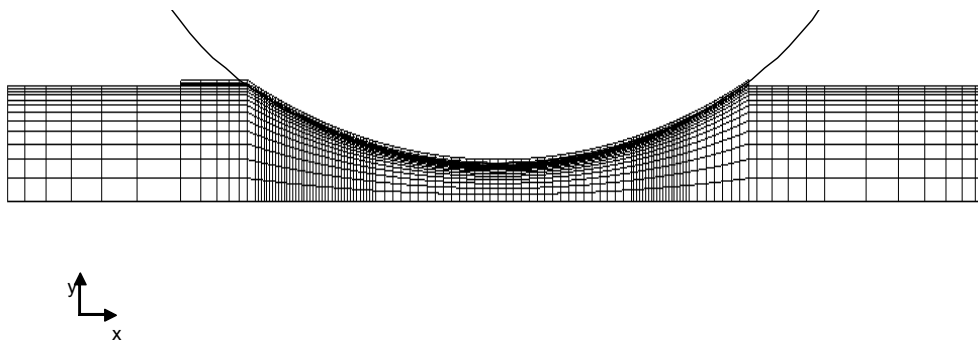


Figura 10: Malla del problema.

5.2.2 Fuerza de fricción

Para completar el modelo de contacto, es necesario incluir el modelado de la fuerza de fricción que se producirá entre el material y la herramienta de trabajo. Aquí se utilizará un modelo de fricción de Coulomb. El mismo se origina en modelos para cuerpos rígidos que, al extrapolarse a modelos del continuo son aplicados a cada punto de la interfase de contacto (Belytschko, Liu & Moran 2000).

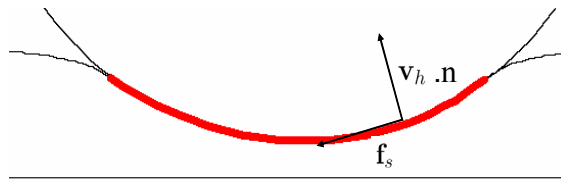


Figura 11: Condiciones de borde de fricción.

Sobre la interfase de contacto, se imponen condiciones de borde de velocidad y tracción (ver Fig. 11). La condición de borde sobre la velocidad será normal a la interfase y estará dada por la velocidad de la herramienta y la condición de borde de tracción, tangente a la interfase, estará dada por la siguiente relación

$$\mathbf{f}_s = -\mu_F (\mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \tag{53}$$

donde

$$\mu_F = \begin{cases} \frac{m|\sigma_{nn}|}{|\mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{t}|} & \text{si } |\mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{t}| > VMIN \\ \mu_F^{corte} & \text{si } |\mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{t}| \leq VMIN \end{cases} ; \tag{54}$$

donde $VMIN$ es cierto parámetro impuesto y m es coeficiente de fricción dinámica ($0 \leq m \leq 1$), $|\sigma_{nn}|$ la componente normal del tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{t} el vector tangente a la interfase entre el material y la herramienta,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{rel} &= {}^t\mathbf{v} - \mathbf{v}_h \\ {}^t\mathbf{v} &= \text{velocidad del material} \\ \mathbf{v}_h &= \text{velocidad de la herramienta en la superficie de contacto.} \end{aligned}$$

5.2.3 Resultados

En la Fig. 12 se muestran los mapas de colores de las velocidades en x y de la componente yy de la deformación y de la tensión para un problema con $m = 0.7$. La malla utilizada tiene 2283 elementos (10).

La Fig. 13 muestra la velocidad relativa en el arco de contacto. Se observa que, para este problema elástico, existe una zona neutra, no puntos aislados como se encuentran, por ejemplo,

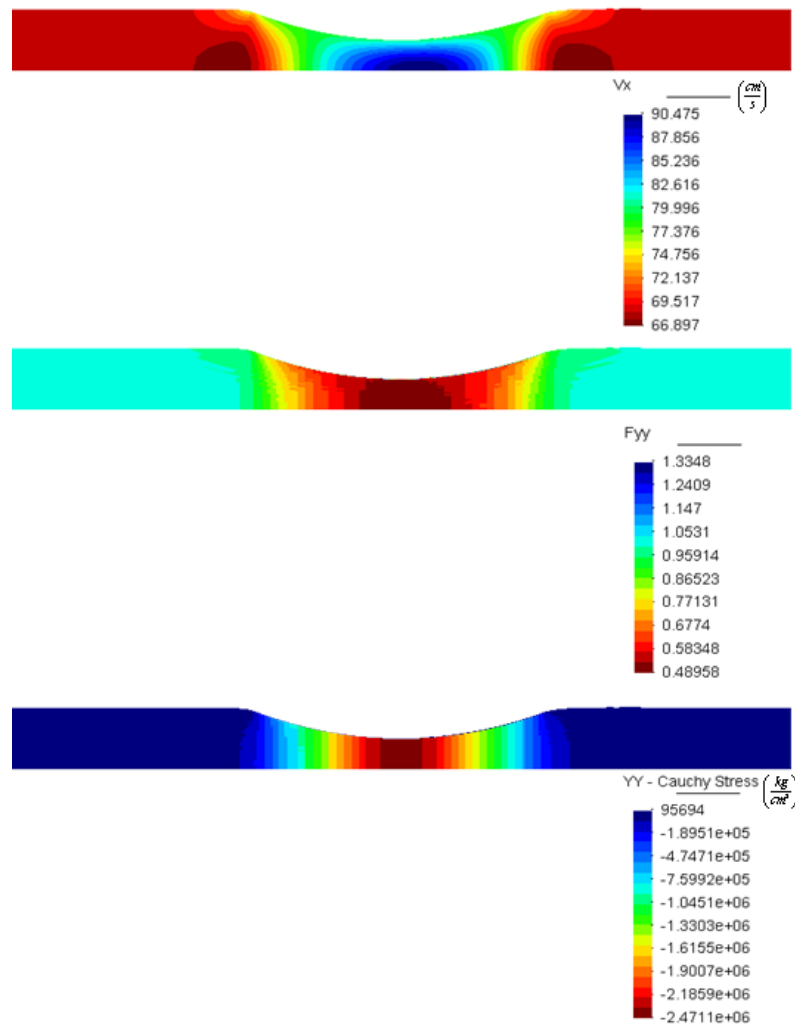


Figura 12: ${}^t v_x$, ${}^t F_{yy}$ y ${}^t \sigma_{yy}$ para el problema con superficie libre.

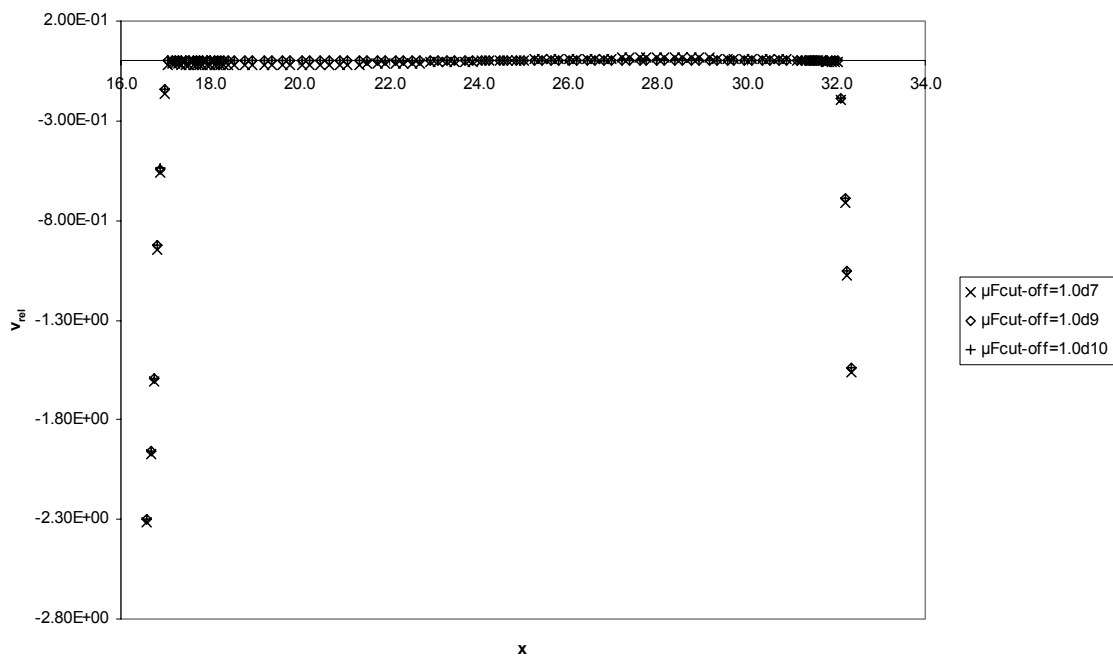


Figura 13: Velocidad relativa en los puntos del arco de contacto para diferentes μ_F^{corte} para un material con $m=0.7$.

en los modelos de laminación descritos en (Dvorkin et al. 1998) en los cuales se utiliza un modelo de material viscoplástico. Se resuelve el problema con $\mu_F^{corte} = 10^7, 10^9$ y $10^{10} \left(\frac{\vec{kg}\cdot s}{cm^3} \right)$.

En la Fig. 14 se muestra la variación del largo del arco de contacto para materiales que sólo difieren en el coeficiente de fricción, m . Como es de esperar, al reducirse m , se reduce el largo del arco. Estos cálculos fueron hechos con un $\mu_F^{corte} = 10^7 \frac{\vec{kg}\cdot s}{cm^3}$.

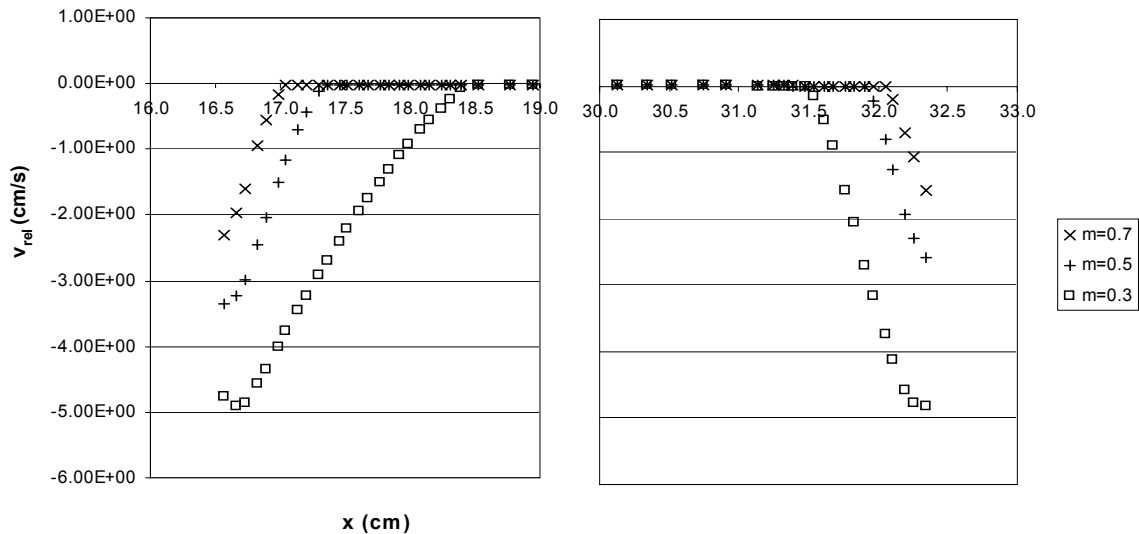


Figura 14: Velocidad relativa para distintos coeficientes m , al principio y al final del arco de contacto.

5.2.4 Interfase: detalles de implementación

- En los elementos cortados por la interfase, en la ecuación de balance de momento lineal, es necesario incrementar la cantidad de puntos de integración para el cálculo de las matrices elementales. Para el elemento hexaedro, se deben utilizar por lo menos 4 puntos de Gauss para cada dirección espacial. Esto es sólo una aproximación ya que las cuadraturas no son convergentes en los casos de integrales de funciones discontinuas; sin embargo de la experiencia numérica surge que los resultados no difieren apreciablemente respecto a utilizar otras técnicas de integración de funciones discontinuas.
- Dado que se utiliza una interpolación continua para las componentes del tensor Gradiente de Deformaciones, la capa extra de elementos influenciará los resultados en la superficie de contacto. Esto no es deseable; por lo tanto, para eliminar este efecto, no se considera el aporte de los elementos de la capa al resolver la evolución de ${}^t\mathbf{F}$.

5.2.5 Dependencia con Δt

Se ha observado que al disminuir Δt , se presentan oscilaciones en los valores de las componentes de deformación normales a la interfase. Es decir, si la interfase fuera una línea en \hat{x} , la componente ${}^t_o F_{yy}$ presentaría una oscilación de su valor cerca de la interfase (ver (Demarco 2006)). Como se analiza en (Demarco 2006), estas oscilaciones dependen de Δt y de la densidad de elementos en esta dirección. Cuanto mayor es la densidad cerca de la interfase, más cerca de la interfase se amortiguan las oscilaciones. Cuanto mayor es Δt mayor es la difusión en esta dirección. Dado que con determinados pasos temporales no se obtienen oscilaciones, para el ejemplo que se presenta, se utiliza un Δt que cumple con el compromiso de no presentar grandes oscilaciones pero que no es tan grande que la interfase pierda definición (excesiva difusión). Igualmente, queda como trabajo futuro poder determinar con exactitud un rango de validez del Δt .

6 CONCLUSIONES

Se desarrolló una nueva formulación de elementos finitos para modelar procesos estacionarios con deformaciones elásticas finitas. La nueva formulación se basa en una descripción Euleriana del movimiento y en la recuperación de la historia de deformación a través de la integración del tensor Gradiente de Deformaciones a lo largo de las líneas de corriente. Esta nueva formulación es estable y provee buenos resultados para un amplio rango de coeficientes de Poisson.

Se completó la formulación anterior con la descripción de la superficie libre a través del método de las pseudo-concentraciones o formulación level set. Se estudiaron ejemplos con las condiciones de borde de los problemas de laminación.

Este algoritmo es el primer paso hacia el desarrollo de una formulación Euleriana que describa deformaciones elasto-plásticas con la finalidad de describir procesos de conformado masivo de metales en los cuales las deformaciones elásticas no son despreciables.

REFERENCIAS

- Bathe, K. J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall.
- Belytschko, T., Liu, W. K. & Moran, B. (2000), *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley and Sons.
- Cavaliere, M. A., Goldschmit, M. B. & Dvorkin, E. N. (1997), '3d modeling of bulk metal forming processes via the flow formulation and the pseudo - concentrations technique', *Proceedings Fifth Int. Conf. on Computational Plasticity, (Ed. D.R.J.Owen et al), CIMNE* .
- Cavaliere, M. A., Goldschmit, M. B. & Dvorkin, E. N. (2001), 'Finite element simulation of the steel plates hot rolling process', *Int. J. Num. Meth. in Engrg.* **52**, 1411–1430.
- Demarco, D. (2006), Una formulación Euleriana de elementos finitos para la descripción de deformaciones elásticas, PhD thesis, Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
- Demarco, D. & Dvorkin, E. N. (2005), 'An Eulerian finite element formulation for modelling stationary finite strain elastic deformation processes', *Int. J. Num. Meth. in Engrg.* **62**, 1038–1063.
- Dvorkin, E. N., Cavaliere, M. A. & Goldschmit, M. B. (1995), 'A three field element via Augmented Lagrangian form modelling bulk metal forming processes', *Comput. Mech.* **17**, 2–9.
- Dvorkin, E. N., Cavaliere, M. A. & Goldschmit, M. B. (2003), 'Finite element models in the steel industry. Part i: simulation of flat product manufacturing processes', *Comput. & Struct.* **81**, 559–573.
- Dvorkin, E. N., Cavaliere, M. A., Goldschmit, M. B. & Amenta, P. (1998), 'On the modelling of steel product rolling processes', *Int. J. of Forming Processes* **1**, 211–242.
- Dvorkin, E. N. & Petöcz, E. G. (1993), 'An effective technique for modelling 2d metal forming processes using an Eulerian formulation', *Engrg. Comput.* **10**, 323–336.
- Hughes, T. J. R. (1987), *The Finite Element Method*, Prentice-Hall.
- Marsden, J. E. & Hughes, T. J. R. (1983), *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover.
- Osher, S. & Sethian, J. (1988), 'Fronts propagating with curvature-dependent speed algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation', *J. Comput. Phys.* **79**, 12–49.
- Simo, J. & Hughes, T. (1998), *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag.
- Simo, J., Taylor, R. & Pister, K. (1985), 'Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity', *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **51**, 177–208.

- Soto, O. & Codina, R. (2000), 'A numerical model for mould filling using a stabilized finite element method and the VOF technique', *Int. J. for Numer. Meth. in Fluids* **0**, 1–29.
- Thompson, E. (1986), 'Use of pseudo-concentrations to follow creeping viscous flow during transient analysis', *Int. J. for Numer. Meth. in Fluids* **6**, 749–761.
- Thompson, E. & Smelser, R. S. (1988), 'Transient analysis of forming operations by the pseudo-concentrations method', *Int. J. Num. Meth. in Engrg* **23**, 177–189.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (1989), *The Finite Element Method*, McGraw-Hill.