

ANÁLISIS DE VIGAS RETICULADAS DE MADERA USANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Omar R. Faure^a, Viviana C. Rougier^a and Mario R. Escalante^a

^a*Grupo de Métodos Numéricos, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional C. del Uruguay, Ingeniero Pereyra 676, 3260 Concepción del Uruguay, Entre Ríos, Argentina,*
<http://www.frcu.utn.edu.ar>

Palabras claves: MEF, Cálculo Avanzado, Estrategias Didácticas.

Resumen. Se presenta aquí una propuesta de enseñanza-aprendizaje del método de Elementos Finitos y métodos variacionales aplicados a las ciencias de la ingeniería. Dicha propuesta consistió en la simulación numérica de un reticulado de madera sometido a flexión, fue formulada y aplicada en la asignatura Cálculo Avanzado que pertenece al tercer año de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad Regional Concepción del Uruguay (FRCU) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN). Se intentó que el alumno comprenda y asimile los conceptos teóricos del método de Elementos Finitos, que adquiera conocimiento y destreza en el manejo de herramientas computacionales y finalmente que visualice la aplicación del método para la resolución de un problema concreto de ingeniería civil. Como elemento disparador del problema se partió de la discusión sobre las estructuras de cubiertas destinadas a salvar grandes luces y en particular, las de tipo reticuladas, ejecutadas con tablas de madera de Eucaliptus Grandis.

Los resultados numéricos obtenidos a partir de las simulaciones fueron posteriormente comparados con resultados experimentales obtenidos por el GEMA (Grupo de Estudio de Maderas) de la FRCU-UTN.

1 INTRODUCCIÓN

La formulación de modelos matemáticos en ingeniería lleva generalmente a ecuaciones diferenciales o integrales. Sólo en los casos más simples es posible encontrar soluciones analíticas exactas de las ecuaciones para el modelo, y en general es necesaria la ayuda de técnicas numéricas para encontrar soluciones aproximadas. El método de los elementos finitos (MEF) es una técnica para hallar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales muy difundida y utilizada hoy en día en ingeniería para problemas de ingeniería estructural, resistencia de materiales, mecánica de fluidos, ingeniería nuclear, electromagnetismo, propagación de ondas, conducción de calor, procesos de convección-difusión, circuitos integrados, ingeniería de petróleo, procesos de reacción-difusión, etc.

El Cálculo Numérico en la actualidad, es una parte esencial de la educación matemática para ingenieros, pues relaciona la matemática aplicada con distintas áreas de la ingeniería, empleando métodos numéricos para la resolución de problemas reales de interés. En el pasado la enseñanza se basaba prácticamente por completo en la tiza y el pizarrón, y los ejemplos podían ser resueltos a mano, para transmitir las ideas y conceptos principales de los temas. Con el advenimiento de las computadoras y de poderosos software matemáticos, las posibilidades de resolver problemas más complejos utilizando métodos numéricos, han aumentado enormemente. Ello ha incrementado la interacción entre las matemáticas por un lado y la ciencia y la tecnología por otro. A través del software también es posible interactuar formalmente con la computación y la programación. Ello permite a los alumnos comprender e implementar algunas de las técnicas numéricas y la posibilidad de potenciar el aprendizaje significativo de los temas desarrollados.

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica orientada a potenciar el aprendizaje significativo del Método de los Elementos Finitos para la resolución de un problema concreto de ingeniería civil, llevada a cabo en la asignatura Cálculo Avanzado de la FRCU-UTN. La propuesta consistió en resolver, mediante un análisis lineal estático el comportamiento a flexión de un reticulado de madera de Eucaliptus Grandis y comparar los resultados numéricos con los obtenidos experimentalmente por el grupo GEMA de la FRCU. El desarrollo de la propuesta contempló la utilización del software general OCTAVE (<http://www.gnu.org/software/octave>), que es un sistema integrado de programación que incluye interfaces gráficas y un gran número herramientas especializadas y el software específico ANSYS (<http://www.ANSYS.com>; Madenci & Guven, 2006; Moaveni, 2003). El software ANSYS es una herramienta de análisis muy poderosa que puede ser usada en numerosas disciplinas de la ingeniería. Permite realizar análisis estructural estático con no linealidad material o geométrica y análisis dinámico. Y también analizar diferentes problemas térmicos. La Facultad Regional Concepción del Uruguay cuenta con la licencia de ANSYS desde el año 2009 y continuando hasta la fecha. Octave, en cambio es un software libre.

El problema a resolver se eligió de acuerdo a los conocimientos previos que los estudiantes tienen al momento de cursar la asignatura. Cálculo avanzado se dicta en el segundo cuatrimestre del tercer año de la carrera de Ingeniería Civil. Para entonces el alumno debe tener aprobada Análisis Matemático II y cursadas Estabilidad y Resistencia de Materiales. Estas dos últimas le brindan los conocimientos necesarios sobre el comportamiento estructural de sistemas isostáticos y los diferentes tipos de esfuerzos a los que puede estar solicitada una estructura. Análisis Matemático II proporciona los conceptos necesarios sobre ecuaciones diferenciales, los cuales son puestos en acción para pensar sobre la necesidad de abordar la problemática propuesta desde las posibilidades numéricas.

Se presenta en primer lugar una breve descripción de las características de la asignatura Cálculo Avanzado, se mencionan las estrategias, técnicas y métodos utilizados en el proceso de enseñanza, luego se describe el comportamiento estructural de una estructura reticulada, los métodos analíticos de resolución, el análisis con elementos finitos y dos ejemplos de aplicación, un reticulado sencillo resuelto con **Octave** y otro más complejo utilizando ANSYS.

2 CARACTERÍSTICAS DE LA ASIGNATURA CÁLCULO AVANZADO

Cálculo Avanzado es una materia de grado de tercer año en la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Tecnológica Nacional de 64 horas. Es un curso interdisciplinario que relaciona la matemática aplicada con distintas áreas de la ingeniería civil, empleando medios computacionales para la resolución de problemas. Consta de tres partes, una primera parte introductoria sobre diferentes técnicas numéricas, la segunda de métodos generales para la solución de ecuaciones diferenciales y termina con el método de elementos finitos. Tiene entre sus objetivos iniciar al alumno en la formulación matemática de modelos de sistemas reales en la Ingeniería Civil y su solución mediante métodos numéricos. De esta manera, los contenidos de la materia son importantes en la formación del estudiante de ingeniería y contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico (deductivo y creativo), algorítmico y funcional.

Para el desarrollo del Método de Elementos Finitos, se comienza haciendo una reformulación de la ecuación diferencial dada como un problema variacional. Este problema variacional es básicamente un problema de minimización de la forma:

(M) Encontrar u en V tal que $F(u)$ sea menor o igual que $F(v)$ para todo v en V , donde V es un conjunto de funciones admisibles y F un funcional, es decir, $F(v)$ es un número real para cada v de V . Las funciones de V frecuentemente representan una cantidad que varía continuamente como el desplazamiento de un cuerpo elástico, una temperatura, etc. En nuestro caso $F(v)$ representa la energía total asociada con el desplazamiento v . Se muestra que hay una equivalencia entre la ecuación diferencial, el problema variacional y el problema de minimización de la energía ([Johnson, 1995](#)).

Durante el curso se utiliza un ida y vuelta constante entre la resolución analítica y la implementación computacional de un mismo problema. Sobre esta idea se formaliza un paralelismo entre el enfoque del análisis estructural y un enfoque teórico analítico.

La utilización de un software general (**Octave**) está orientada básicamente a que los alumnos comprendan de manera cabal la mecánica del cálculo, mientras que mediante la utilización de un software específico de elementos finitos (ANSYS) se muestra la capacidad para resolver problemas de gran magnitud. En este último caso se brindan a los alumnos los conocimientos necesarios para que puedan comprender los fundamentos del software, aprender algunos comandos y así realizar análisis lineales estáticos de estructuras sencillas. Todo ello teniendo en cuenta que en este curso se enseña la solución de problemas con elementos finitos unidimensionales y el tiempo disponible para introducir a los estudiantes en el conocimiento de ANSYS (<http://www.ANSYS.com>; [Madenci & Guven, 2006](#); [Moaveni, 2003](#)) es de 3 semanas.

La materia se aprueba mediante la presentación y posterior defensa oral de un trabajo final integrador realizado en grupos de dos estudiantes, que consiste en la resolución de un problema de aplicación de ingeniería civil. Dicho trabajo consta de dos partes, una primera donde se presenta el problema y se plantea un modelo sencillo que se resuelve con el software general (**Octave**) y la segunda parte donde se resuelve el problema general utilizando un software específico de elementos finitos (ANSYS). No se toman exámenes parciales durante

el desarrollo de la cursada y la regularidad se obtiene con el 80% de la asistencia y la entrega de trabajos prácticos planteados por la cátedra para la mejor comprensión y afianzamiento de las diferentes unidades temáticas.

2.1 Estrategias, técnicas y métodos

Para el proceso de aprendizaje se utilizan los métodos y técnicas aúlicas y extraaúlicas siguientes: métodos hipotético deductivo, de investigación, de estudio dirigido y las técnicas expositiva dialogada, de resolución de problemas.

Las estrategias se basan en la utilización de recursos tecnológicos y herramientas computacionales.

Durante el desarrollo de las clases teórico-prácticas el estudiante participa activamente puesto que da su punto de vista ante las diferentes preguntas del docente; discute con sus compañeros de mesa de trabajo constituida por cuatro alumnos, y cada grupo propone una respuesta con diferentes grados de acercamiento a la “mejor” solución de la situación planteada justificando con argumentación técnica cada resultado. Se revaloriza el error con las distintas intervenciones del docente que actúa como guía u orientador en la elaboración de los saberes por parte del estudiante, siendo éstos los que conjeturan los posibles resultados en las diferentes etapas de avance hacia la resolución. El docente desarrolla los contenidos teóricos que intervienen en la comprensión del problema tratado con la participación activa de los alumnos, e interviene cuando la situación planteada por cada grupo de trabajo lo requiere dando el cierre parcial de cada etapa de resolución, y el cierre teórico final de la situación que se estudia.

3 COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE UN RETICULADO EN EL PLANO

A continuación se describen brevemente las características y métodos analíticos utilizados en la resolución de reticulados planos.

3.1 Aspectos generales

Un reticulado o armadura es una estructura integrada por un conjunto de barras diseñadas y conectadas de tal modo que integran una estructura que trabaja como una viga de gran tamaño. Sus elementos (barras) suelen formar uno o más triángulos, en un solo plano, y están dispuestos de manera que las cargas externas se aplican en los nudos de los elementos estructurales, y teóricamente sólo producen tracción o compresión axiales entre ellos. Esto es, bajo la acción de una fuerza axial pura un elemento sufre sólo un empuje (compresión) o un estiramiento (tracción) sin ninguna forma de pandeo o flexión, como se puede ver en la [Figura 1](#). Se supone que en su unión, las barras están conectados por articulaciones libres de fricción, lo cual permite que los elementos puedan girar levemente ([McCormac, 1983](#)). En la [Figura 2](#) se muestran una armadura o reticulado plano típico ([Chandrupatla and Belegundu, 1999](#)).



Figura 1: Fuerzas axiales en barras

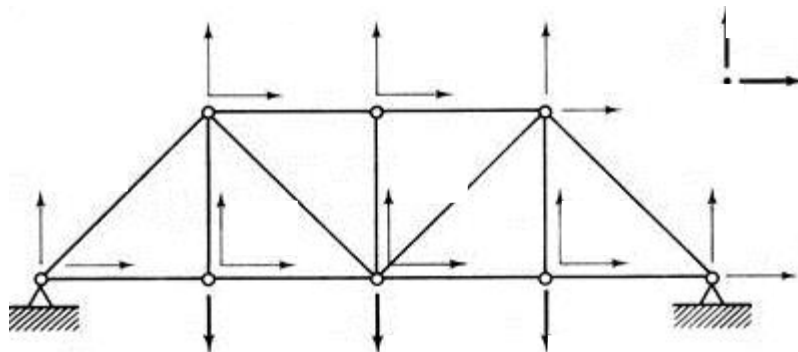


Figura 2: Reticulado Plano (Chandrupatla and Belegundu, 1999)

Con el fin de simplificar el análisis de armaduras se consideran las siguientes hipótesis:

1. Las barras están unidas mediante articulaciones libres de fricción. (En realidad, las conexiones de pasador se utilizan muy poco en las armaduras actuales, y a ninguna se le puede considerar libre de fricción. Entre una robusta unión atornillada o soldada, y una articulación o junta ideal de pasador, existe una diferencia enorme).
2. Las barras son elementos perfectamente rectilíneos. (Si no lo fueran, las fuerzas axiales causarían sobre ellas momentos flectores).
3. Las deformaciones de una armadura con carga, originadas por cambios en la longitud de sus elementos, no tienen la magnitud suficiente para causar cambios apreciables en la forma y dimensiones de la estructura.
4. Los elementos de una armadura están dispuestos de manera que las cargas y reacciones a que está sujeta se consideran aplicadas únicamente en sus nudos o juntas (McCormac, 1983).

3.2 Métodos analíticos para el análisis de reticulados

Para resolver analíticamente un reticulado en el plano se utilizan, por lo general, el método de los nudos o el de las secciones (considerando momentos o fuerza cortante). El concepto de equilibrio de cuerpo libre es básico para calcular las fuerzas cualquiera sea el método que se utilice. La armadura se secciona en dos porciones mediante un corte imaginario. Se aísla luego una parte de la armadura que queda a un lado de la sección para estudiarla en forma independiente. Las cargas aplicadas a tal cuerpo libre incluyen las fuerzas internas de los elementos que han sido cortados por la sección, así como cualquier carga y reacción que estén aplicadas exteriormente (McCormac, 1983). En el caso del método de los nudos, aplicando las ecuaciones de la estática a los cuerpos libres aislados, se determinan las fuerzas en los elementos seleccionados. Como sólo se cuenta con tres ecuaciones de estática, no se pueden determinar más de tres incógnitas por sección.

Si se utiliza el método de las secciones, considerando momentos, la suma de aquéllos para todas las fuerzas aplicadas al cuerpo libre considerado, con respecto a un punto cualquiera en el plano de la armadura, vale cero en condiciones de equilibrio. Así, el valor de la fuerza buscada se obtiene fácilmente si es posible tomar momentos de las fuerzas con respecto a un punto tal, que en la ecuación correspondiente solo aparezca una fuerza desconocida

(McCormac, 1983).

Una ventaja del método de secciones con momentos es que si se busca la fuerza ejercida sólo en un elemento y éste no se halla cerca de un extremo de la armadura en la mayoría de los casos su valor podrá obtenerse directamente sin tener que determinar primero las fuerzas en las demás barras. Si se usara el método de los nudos sería necesario calcular las fuerzas en las barras nudo por nudo, desde el extremo de la armadura y hasta llegar al elemento en cuestión (McCormac, 1983).

En el caso del método de las secciones con fuerzas cortantes, se procede de igual manera que en los anteriores, es decir se hace pasar una sección vertical por la armadura dividiéndola en dos cuerpos libres independientes. Luego la suma de las fuerzas verticales que se encuentran a la izquierda de la sección debe ser de igual magnitud y opuesta en dirección a la suma de las fuerzas verticales que se hallan a su derecha (McCormac, 1983).

3.3 Análisis mediante elementos finitos de reticulados en el plano

Si bien los métodos analíticos mencionados anteriormente ilustran los fundamentos de la estática, ellos se vuelven tediosos al aplicarlos a grandes armaduras estructurales estáticamente indeterminadas. Además los desplazamientos de los nudos no se obtienen fácilmente. Surge entonces la posibilidad de utilizar el método de elementos finitos (MEF) que es aplicable tanto a estructuras estáticamente determinadas como indeterminadas. Proporciona también las deflexiones en los nudos.

El MEF permite aproximar el comportamiento de una estructura con infinitos grados de libertad por el de otra, con aproximadamente las mismas propiedades físicas y geométricas, pero con un número finito de grados de libertad, cuyas ecuaciones de equilibrio pueden expresarse por un sistema algebraico de ecuaciones simultáneas con un número limitado de incógnitas (Oñate, 1995). Por ello sólo podrá encontrarse una solución aproximada del problema, en lugar de la solución exacta.

A continuación se presenta la aplicación del método de elementos finitos al análisis estático de un reticulado en el plano, que consiste en barras orientadas en un sistema cartesiano bidimensional (Chandrupatla and Belegundu, 1999; Ferreira, 2009).

En la Figura 3 se puede ver un elemento de un reticulado en el plano x-y. Las coordenadas locales x' - y' definen los desplazamientos locales u_1' , u_2' . En dichas coordenadas el elemento posee entonces dos grados de libertad:

$$\mathbf{u}'^T = [u_1' \quad u_2'] \quad (1)$$

Mientras que el sistema global de coordenadas, el elemento se define mediante cuatro grados de libertad.

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \quad (2)$$

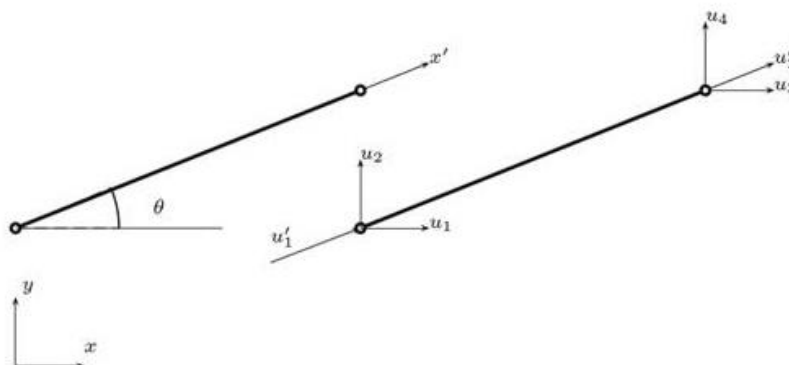


Figura 3: Elemento de un reticulado en 2D: grados de libertad locales y globales (Ferreira, 2009)

A continuación se muestra la relación entre \mathbf{u}'^T y \mathbf{u}^T

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \cos \theta + u_2 \operatorname{sen} \theta \\ u'_2 &= u_3 \cos \theta + u_4 \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (3)$$

donde θ es el ángulo entre los ejes x' y x . Las ecuaciones (3) pueden escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (4)$$

Donde la matriz L de transformación está dada por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \quad (5)$$

y l y m se definen mediante las coordenadas nodales:

$$\begin{aligned} l &= \frac{x_2 - x_1}{L_e} \\ m &= \frac{y_2 - y_1}{L_e} \end{aligned} \quad (6)$$

donde L_e es la longitud del elemento:

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (7)$$

En coordenadas locales, la matriz de rigidez de un elemento de reticulado plano, teniendo en cuenta que en dichas coordenadas es un elemento unidimensional, está dado por:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde A es el área de la sección transversal del elemento y E es el módulo de Young. La matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales se obtiene considerando la energía de deformación unitaria del elemento.

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

4 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se ilustra a continuación la resolución de un ejemplo sencillo de un reticulado plano utilizando *Octave*. Luego se describe la solución de un ejemplo más complejo mediante la aplicación del software ANSYS. Ambos ejemplos fueron resueltos por los alumnos A. A. Noir y A. N. Giani, como parte de su trabajo final, requisito para aprobar la materia.

4.1 Ejemplo sencillo resuelto en Octave

Con el fin de lograr una mayor comprensión del MEF, asimilar mejor su mecánica de resolución e introducir a los alumnos en el desarrollo de algoritmos computacionales, se planteó la resolución de un armadura sencilla, como se muestra en la Figura 4, utilizando *Octave*. Se pidió obtener la matriz de rigidez para cada elemento, la matriz de rigidez de toda la estructura, los desplazamientos nodales, los esfuerzos para cada elemento y las reacciones.

En la Tabla 1 se pueden ver los valores de desplazamiento nodales, los esfuerzos en cada barra y las reacciones.

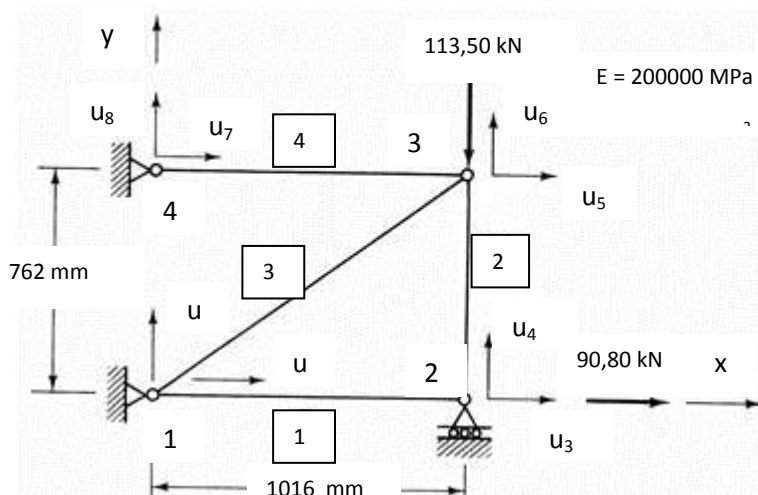


Figura4:Reticulado plano: características geométricas y mecánicas (Chandrupatla and Belegundu, 1999)

Desplazamientos (mm)	Esfuerzos (MPa)	Reacciones (kN)
$u_3 = 0,69$	$\sigma_1 = 137,90$	$R_1 = -71,88$
$u_5 = 0,14$	$\sigma_2 = -150,86$	$R_2 = 14,19$
$u_6 = -0,56$	$\sigma_3 = 35,91$	$R_4 = 99,33$
	$\sigma_4 = 28,73$	$R_7 = -18,92$

Tabla1: Resultados numéricos obtenidos con Octave.

4.2 Análisis de un reticulado de madera con ANSYS

En este ejemplo se simuló el comportamiento una viga reticulada de madera simplemente apoyada y sometida a flexión en dos puntos. Se realizó un análisis lineal elástico. Se adoptaron las características geométricas y propiedades mecánicas de una viga previamente analizada y ensayada por el Grupo de Estudio de Maderas de la Facultad Regional de Concepción del Uruguay de la UTN.

En la construcción de dicha viga se emplearon tablas de *Eucalyptus grandis*, cultivado en

el nordeste de Entre Ríos, y en todos los casos con sección transversal de 1" x 3". Tanto el cordón superior como el inferior estuvieron constituidos por dos tablas con longitud igual al largo de la viga, y las diagonales por una tabla que en todos los casos presentó una inclinación de 45° respecto del eje longitudinal de la viga. Las conexiones en la intersección de las diagonales con los cordones se materializaron con clavos de 2,2 mm de diámetro colocados con clavadora neumática. En la [Figura 5](#) se muestra un detalle del reticulado y sus dimensiones.

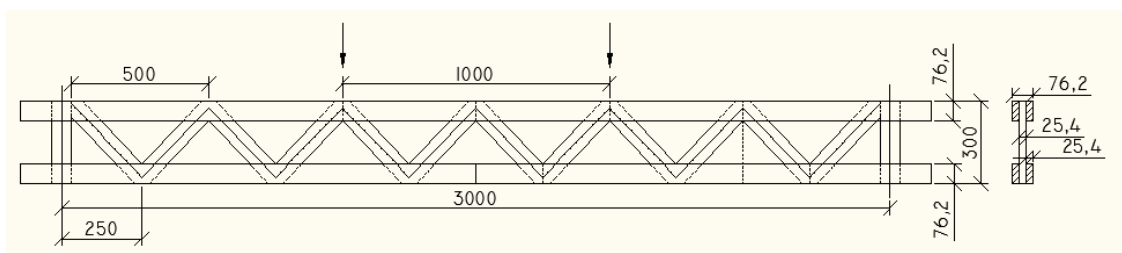
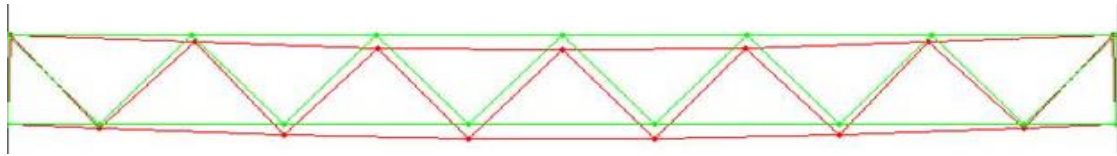


Figura 5: Reticulado de madera. Características y dimensiones

La estructura se discretizó con un cierto número de elementos que se correspondieron con el número de barras del reticulado. Se emplearon elementos barras denominados LINK 1, quedando en total, 16 nodos y 30 barras, ver [Figura 6](#). Se aplicaron dos cargas puntuales en los tercios de la luz, nodos 6 y 11 ([Figura 6](#)). En la [Figura 7](#) se puede ver la configuración deformada y en la [Tabla](#) se presentan los valores experimentales y numéricos del desplazamiento medido en el centro de la luz para diferentes valores de carga hasta alcanzarse la carga de servicio. Se debe destacar que el prototipo experimental tuvo un comportamiento marcadamente no lineal aún para bajos valores de carga, debido al tipo de unión. Este comportamiento, explicaría la diferencia entre los resultados experimentales y numéricos, diferencia que se va incrementando en la medida que los valores se aproximan a la carga de servicio y aumenta la no linealidad. Por ello el tipo de análisis lineal utilizado en la simulación no logró reproducir adecuadamente los valores experimentales de desplazamientos sobre todo para valores de carga cercanos a la carga de servicio, donde las diferencias porcentuales fueron importantes ([Tabla 2](#)). Este resultado sirvió, sin embargo, como disparador para que los alumnos comprendan como influye en los resultados la elección de un determinado modelo, aun cuando el modelo que daría un mejor ajuste está fuera del alcance del curso.



Figura 6: Reticulado de madera. Elementos y nodos



a)



b)

Figura 7: Configuración deformada. a) Resultado numérico; b) Resultado experimental

P (N)	δ_{exp} (mm) (1)	$\delta_{\text{num.}}$ (mm) (2)	Dif (%) $100[(2)-(1)]/(1)$
0	0	0	0
500	0,62	0,44	-29
1000	1,50	1,20	-20
1500	2,48	1,95	-21,37
2000	3,74	2,75	26,47
2500	4,96	3,67	-26
3000	6,82	4,64	-32

Tabla 2: Comparación de resultados experimentales y numéricos.

5 CONCLUSIONES

Se mostró una propuesta metodológica para la enseñanza del MEF en un curso de Cálculo Avanzado de la carrera de Ingeniería Civil que se dicta en la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional, con el auxilio de herramientas computacionales. A partir de un problema concreto de aplicación en ingeniería civil, reticulados planos, se analizaron dos ejemplos, uno sencillo para ser resuelto en un software libre de elementos finitos y otro de mayor complejidad, para el cual se utilizó un software comercial específico. El primer ejemplo permitió a los alumnos comprender MEF y profundizar sus conocimientos, así como también asimilar la mecánica del mismo. El segundo ejemplo los inició en el conocimiento de un software de poderosa resolución y aplicable a múltiples ramas de la ingeniería. Se trató de una alternativa didáctica ventajosa que permitió introducir a los alumnos en los principios básicos del MEF y al mismo tiempo mostrar herramientas computacionales de uso en ingeniería.

REFERENCIAS

- Chandrupatla, T.R., and Belegundu, A.D., Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería. Segunda Edición. Prentice Hall, 1999.
- Ferreira, A.J.M., MATLAB Codes for Finite Element Analysis. Solids and Structures, Springer, 2009.
- <http://www.gnu.org/software/octave>
- Johnson, C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, 1995.
- Madenci, E. & Guven, I., The Finite Element Method and Application in Engineering Using ANSYS, Springer Verlag, 2006.
- McCormac, J. C., Análisis Estructural, Harla 1983.
- Moaveni, S., Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS, Pearson Education, 2003.
- Oñate, E., Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal. Segunda Edición. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España, 1995.