

ESTIMACIÓN DE MATRICES O-D MEDIANTE TÉCNICAS DE ELEVACIÓN Y MÉTODOS DE NEWTON SEMISUAVES

Pablo A. Lotito^{a,b} y Lisandro A. Parente^{a,c}

^aCONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas), Argentina,
<http://www.conicet.gob.ar>

^bPLADEMA - Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro, Paraje Arroyo Seco s/n,
7000 Tandil, Argentina, plotito@exa.unicen.edu.ar, <http://www.pladema.net>

^cFCEIA, UNR - CIFASIS (Centro Internacional Franco Argentino de Ciencias de la Información y de
Sistemas), 27 de Febrero 210 bis, 2000 Rosario, Argentina, <http://www.cifasis-conicet.gob.ar>

Palabras Clave: Ajuste de demanda, Equilibrio de tráfico, MPCC, Métodos de Newton semi-suaves.

Resumen. Uno de los aspectos fundamentales en los problemas de tráfico, tanto en planificación como en simulación, corresponde a la actualización de matrices origen-destino (OD), que puede ser formulado como un problema de optimización binivel. Específicamente, se trata de un problema de optimización cuadrática con restricciones de equilibrio tipo Wardrop en el nivel inferior (MPEC). En este trabajo, utilizamos una reformulación como problema de optimización con restricciones de complementariedad (MPCC) que habilita su tratamiento con técnicas de elevación obteniendo una condición de optimalidad dada por un sistema no diferenciable de ecuaciones. Para su resolución, aplicamos un método tipo Newton para funciones semisuaves dotado de una estrategia de globalización. Mostramos y discutimos los resultados numéricos en redes de tráfico bien conocidas en la literatura.

1. INTRODUCCIÓN

Cualquier estudio de planificación del transporte requiere el conocimiento de la demanda de transporte. Hoy en día estos datos representan también un insumo fundamental para aplicaciones en tiempo real y pseudo-real tales como guía de ruta, la predicción de las condiciones del tráfico y otras aplicaciones de sistemas inteligentes de transporte (ITS).

La demanda de transporte, definida por pares de origen-destino, se organiza en la denominada tabla de viajes origen-destino, o simplemente matriz-OD. Originalmente, la estimación de matrices OD se hicieron a través de encuestas, entrevistando hogares seleccionados. Hoy en día, la disponibilidad de conteos de tráfico a partir de distintas fuentes (cámaras de video, telefonía celular) permite considerar estas observaciones parciales para mejorar la estimación de la matriz de demanda. Una hipótesis extensamente aceptada es que, dada una matriz OD, una estimación del flujo de tráfico se puede obtener suponiendo que se verifica un equilibrio de Wardrop (ver Patriksson (1994) por ejemplo). En forma inversa, a partir del flujo observado en algunos arcos de la red, se puede buscar una matriz OD de manera que el flujo de tráfico de toda la red verifique la demanda, se ajuste a los flujos observados y satisfaga un equilibrio de Wardrop. Sin embargo, este es un problema inverso difícil y, de hecho, podría haber una variedad de matrices que coincidan con los conteos de tráfico observados (ver Ortúzar y Willumsen (2001)). Un criterio generalizado (ver Codina y Barceló (2004); Lundgren y Petersen (2008)) consiste en penalizar la distancia a una matriz OD desactualizada que se encuentre disponible por algún estudio previo que puede ser de naturaleza diferente. Por un lado, esto se justifica en la suposición de que al menos una porción de la demanda de tráfico no cambia drásticamente para determinados períodos de tiempo, y por otro, mejora las condiciones de la función objetivo permitiendo en algunos casos probar la unicidad de soluciones.

En este trabajo partimos del modelo binivel adoptado en Lundgren y Petersen (2008) y proponemos una reformulación del problema inferior a través de las condiciones KKT de la inecuación variacional subyacente planteada con una relajación del conjunto factible que produce las mismas soluciones. Esto da lugar a un problema de optimización con restricciones de complementariedad que es abordado mediante las técnicas de elevación planteadas en Stein (2012); Izmailov et al. (2012) para generar un sistema de ecuaciones no lineal semisuave que es resuelto mediante un algoritmo tipo Newton.

En la siguiente sección especificamos la formulación del problema, luego explicamos la reformulación y el algoritmo de resolución para después mostrar los resultados numéricos en dos redes tomadas de la literatura del área. Finalmente hacemos algunas conclusiones.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideramos el problema de actualizar una matriz OD ajustándose a los conteos de tráfico observados en los arcos \tilde{A} de la red. Específicamente, consideramos un grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, donde \mathcal{N} es el conjunto de nodos con N_n elementos y \mathcal{A} es el conjunto de arcos con N_a elementos. el vector de demanda es $d \in \mathbb{R}_+^{N_d}$, donde N_d es el número de pares OD. Cada para OD k está asociado a un vector $\gamma_k \in \{-1, 0, 1\}^{N_n}$ tal que $\gamma_{k,n} = -1$ si i es el nodo origen y $\gamma_{k,n} = 1$ si es el nodo destino, siendo 0 en otro caso. De forma similar, la matriz de incidencia nodo-arco $A \in \{-1, 0, 1\}^{N_n \times N_a}$ se define por $A_{n,a} = -1$ si n es el nodo del arco a , $A_{k,n} = 1$ si es su nodo destino, y 0 en otro caso.

Queremos resolver el siguiente problema

$$\text{mín } f(d, x) \tag{1}$$

con

$$f(d, x) = \sum_k \rho_k (d_k - \bar{d}_k)^2 + \sum_{a \in \bar{A}} \beta_a (x_a(d) - \bar{x}_a)^2, \quad (2)$$

donde $x(d) \in \mathbb{R}^{N_a}$ es el flujo de Wardrop en la red correspondiente a la demanda d . El valor de $x(d)$ está dado por la solución $x \in \omega(d)$ de la inecuación variacional paramétrica (IVP)

$$t(x)^T (x - x') \geq 0, \quad \forall x' \in \omega(d) \quad (3)$$

donde $t(x)$ es la función tiempo de viaje para el flujo x y $\omega(d)$ es el conjunto de flujos de arcos que satisfacen la demanda d , i.e.,

$$\omega(d) = \left\{ x = \sum_{k=1}^{N_d} x_k \mid x_k \geq 0, Ax_k = d_k \gamma^k, \forall k \right\}.$$

Consideramos la variable desagregada $X = (x_1; x_2; \dots; x_{N_d}) \in \mathbb{R}^{N_d N_a}$, donde cada x_k es el vector de flujo de arcos asociado a la demanda k . De aquí en adelante, para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos con I_k , la matriz identidad en $\mathbb{R}^{k \times k}$. Definamos las matrices R, Γ y M por

$$R = (I_{N_a}, \dots, I_{N_a}) \in \mathbb{R}^{N_a \times N_d N_a},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma^{N_d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_d N_n \times N_d},$$

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_d N_n \times N_d N_a}$$

La función tiempo de viaje es entonces $T(X) = R^T t(RX)$, y el conjunto factible ss

$$\Omega(d) = \{X \geq 0 \mid \Gamma d - MX = 0\}.$$

Ahora, la IVP (3) puede reformularse como el problema de hallar $X \in \Omega(d)$ tal que

$$T(X)^T (X - X') \geq 0, \quad \forall X' \in \Omega(d). \quad (4)$$

Las condiciones KKT para (4) están dadas por

$$T(X) + M^T \lambda - \tilde{\lambda} = 0, \quad (5)$$

$$\Gamma d - MX = 0, \quad (6)$$

$$0 \leq \tilde{\lambda} \perp X \geq 0. \quad (7)$$

Usando la igualdad (5) para substituir $\tilde{\lambda}$ en (7) obtenemos el problema de complementariedad equivalente

$$\Gamma d - MX = 0, \quad 0 \leq (T(X) + M^T \lambda) \perp X \geq 0. \quad (8)$$

3. SOLUCIÓN POR TÉCNICAS DE ELEVACIÓN

En esta sección trabajaremos con la siguiente notación. Sea $z = (d; X; \lambda) \in \mathbb{R}^n$, con $n = N_d(1 + N_a + N_n)$, es decir la variable compuesta por el vector de demanda, el vector de flujo de arcos desagregado por demanda y los multiplicadores en (8). Siendo $\beta_a = 0$ si $a \notin \tilde{A}$, definamos las matrices $B = \text{diag}((\beta_a)_{a=1}^{N_a}) \in \mathbb{R}^{N_a \times N_a}$ y $P = \text{diag}((\rho_k)_{k=1}^{N_d}) \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$, y las funciones $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $H, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ y $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_d}$, con $m = N_d N_a$ y $\ell = N_d N_n$, dadas por

$$F(z) = f(d, RX) = (d - \bar{d})^\top P(d - \bar{d}) + (RX - \bar{x})^\top B(RX - \bar{x}), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} G(z) &= T(X) + M^T \lambda, & H(z) &= X, \\ J(z) &= \Gamma d - MX & \text{y} & K(z) = d. \end{aligned} \quad (10)$$

Entonces el problema puede escribirse como el problema de optimización con restricciones de complementariedad

$$\min_z F(z) \text{ subject to } J(z) = 0; 0 \leq G(z) \perp H(z) \geq 0; K(z) \geq 0. \quad (11)$$

Abordamos este problema mediante la metodología de elevación presentada en [Stein \(2012\)](#) y revisada en [Izmailov et al. \(2012\)](#), introduciendo las variables auxiliares $w \in \mathbb{R}^{N_d}$ y $y \in \mathbb{R}^m$ a fin de reformular el problema como

$$\min_{z,y} F(z) \text{ s.t. } J(z) = 0; (y^-)^2 - G(z) = 0, (y^+)^2 - H(z) = 0; w^2 - K(z) = 0, \quad (12)$$

donde $y^- = \min(0, y)$, $y^+ = \max(0, y)$, y las operaciones de mínimo, máximo, y potencia son entendidas componente a componente. El Lagrangiano de este problema está dado por

$$L(z, y, w, \mu) = F(z) + \langle \mu_G, (y^-)^2 - G(z) \rangle + \langle \mu_H, (y^+)^2 - H(z) \rangle + \langle \mu_J, J(z) \rangle + \langle \mu_K, w^2 - K(z) \rangle. \quad (13)$$

Llamando $u = (z, y, w, \mu)$ y $\mu = (\mu_G, \mu_H, \mu_J, \mu_K)$, una condición necesaria de optimalidad de primer orden está dada por

$$\Phi(u) = 0, \quad (14)$$

donde la función Φ está definida por

$$\Phi(u) = L'(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z}(z, y, w, \mu) \\ \frac{\partial L}{\partial y}(z, y, w, \mu) \\ \frac{\partial L}{\partial w}(z, y, w, \mu) \\ (y^-)^2 - G(z) \\ (y^+)^2 - H(z) \\ J(z) \\ w^2 - K(z) \end{pmatrix}$$

con

$$\frac{\partial L}{\partial z}(z, y, w, \mu) = F'(z) - G'(z)^\top \mu_G - H'(z)^\top \mu_H + J'(z)^\top \mu_J - K'(z)^\top \mu_K,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(z, y, w, \mu) = 2Y^- \mu_G + 2Y^+ \mu_H$$

and

$$\frac{\partial L}{\partial w}(z, y, w, \mu) = 2W \mu_K,$$

donde $Y^- = \text{diag}(y^-)$, $Y^+ = \text{diag}(y^+)$ y $W = \text{diag}(w)$. Notemos que Φ es un operador no diferenciable y no monótono (tomar por ejemplo $u = 0$, $u' = (z', y', w', \mu') = (0, 0, 1, -1)$) para verificar que $\langle \Phi(u) - \Phi(u'), u - u' \rangle < 0$). En consecuencia, hallar un cero de Φ no es una tarea sencilla. Sin embargo, Φ hereda parcialmente algunas propiedades de F , G , H , J and K . En primer lugar, siendo estas funciones diferenciables con derivadas localmente Lipschitz-continuas (de hecho son dos veces diferenciables), el operador Φ resulta localmente Lipschitz y, por el teorema de Rademacher, es diferenciable en un conjunto denso \mathcal{D}_Φ . Por lo tanto admite un Jacobiano generalizado de Clarke en todo punto u , definido por

$$\partial\Phi(u) = \text{conv}\partial_B\Phi(u), \tag{15}$$

donde $\text{conv}X$ es la cápsula convexa del conjunto X y $\partial_B\Phi(u)$ es el B-diferencial de Φ en u dado por

$$\partial_B\Phi(u) = \{ \text{matrices } \Lambda \text{ t.q. } \exists \{u^k\} \subset \mathcal{D}_\Phi \text{ con } \{u^k\} \rightarrow u, \{\Phi'(u^k)\} \rightarrow \Lambda \text{ cuando } k \rightarrow \infty \}. \tag{16}$$

Más aún, Φ resulta semisuave (ver [Izmailov et al. \(2012\)](#)), y en consecuencia admite esquemas tipo Newton (ver [Facchinei y Pang \(2003\)](#)). Recordemos que una función localmente Lipschitz Φ es semisuave en u si es direccionalmente diferenciable en u y

$$\sup_{\Delta \in \partial\Phi(u+v)} \|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Delta v\| = o(\|v\|). \tag{17}$$

Es fuertemente semisuave si satisface

$$\sup_{\Delta \in \partial\Phi(u+v)} \|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Delta v\| = O(\|v\|^2). \tag{18}$$

Utilizaremos un método de Newton para funciones semisuaves con una estrategia de globalización por medio de búsqueda lineal, basado en el método presentado en [Izmailov et al. \(2012\)](#). Este método posee buenas propiedades de convergencia local bajo hipótesis usuales.

En primer lugar, explicitamos el B-diferencial de Φ como cualquier matriz de la forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(z, y, \mu) & 0 & 0 & -G'(z)^\top & -H'(z)^\top & J'(z)^\top & -K'(z)^\top \\ 0 & 2S & 0 & 2Y^- & 2Y^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2U & 0 & 0 & 0 & 2W \\ -G'(z) & 2Y^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H'(z) & 2Y^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J'(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K'(z) & 0 & 2W & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

donde $U = \text{diag}(\mu_K)$ y $S = \text{diag}(s(y, \mu))$, with $s(y, \mu)_i = \begin{cases} (\mu_G)_i, & \text{si } y_i < 0, \\ (\mu_G)_i \circ (\mu_H)_i, & \text{if } y_i = 0, \\ (\mu_H)_i, & \text{si } y_i > 0. \end{cases}$ En

nuestro caso podemos tomar las matrices

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma^\top & -I_{N_d} \\ 0 & 2R^\top BR & 0 & 0 & 0 & -T'(X)^\top & -I_{N_d N_a} & -M^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S & 0 & 2Y^- & 2Y^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2U & 0 & 0 & 0 & 2W \\ 0 & -T'(X) & -M^\top & 2Y^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{N_d N_a} & 0 & 2Y^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_{N_d} & 0 & 0 & 0 & 2W & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resulta además que $\phi(u) = \|\Phi(u)\|^2/2$ es una función de mérito para nuestro problema, que resulta ser continuamente diferenciable y se verifica que (ver [Izmailov et al. \(2012\)](#))

$$\phi'(u) = \Lambda\Phi(u), \quad \forall \Lambda \in \partial_B \Phi(u). \quad (20)$$

El Método de Newton Semisuave sigue el siguiente esquema:

A partir de una iterada $u^k = (z^k, y^k, w^k, \mu^k)$, calcula una matriz Δ_k en el B-diferencial de Φ en u^k y obtiene \tilde{u}^{k+1} resolviendo el sistema lineal

$$\Delta_k u = \Delta_k u^k - \Phi(u^k).$$

Si \tilde{u}^{k+1} existe (es decir, si el sistema anterior tiene solución) y, para adecuados parámetros $M > 0$ y $\theta > 0$, se verifica

$$\|\tilde{u}^{k+1} - u^k\| \leq \max\left(M, \frac{1}{\phi(u^k)^\theta}\right),$$

entonces define $v^k = \tilde{u}^{k+1} - u^k$, en caso contrario $v^k = -\lambda_k \Phi(u^k)$. Es decir, el paso de Newton se intenta obtener de la forma usual, pero si no existe o es demasiado grande se utiliza una dirección de descenso de la función de mérito (ver fórmula (20)). Si resulta $v^k = 0$, el algoritmo no puede seguir y se detiene sin llegar a una solución. Esto puede suceder porque no está garantizado a priori que las matrices del B-diferencial sean no singulares. Habiendo obtenido una dirección $v^k \neq 0$, la siguiente iteración se obtiene mediante una búsqueda lineal siguiendo una regla de Armijo.

Si el algoritmo evoluciona obteniendo siempre pasos no nulos, entonces puede demostrarse que converge con velocidad local cuadrática a un punto estacionario de ϕ (ver [Izmailov et al. \(2012\)](#)).

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección implementamos el método descrito en dos ejemplos bien conocidos en la literatura del área, correspondientes a redes de pequeño porte. Codificamos el algoritmo usando Scilab 5.4.1 (ver www.scilab.org), con algunos datos de redes obtenidos de la toolbox Ciudad-Sim 5, disponible en ScicosLab 4.4.1. Dado que buscamos un cero de la función de mérito $\frac{1}{2}\|\Phi\|^2$, el test de parada implementado fue $\frac{1}{2}\|\Phi(u^k)\|^2 < \varepsilon\sigma_p$, donde ε es una tolerancia dada y σ_p es constante de escalamiento elegida de acuerdo al tamaño de la red y al rango de las variables involucradas en cada Problema. Los tests de desempeño fueron ejecutados en una PC Intel Core i5 de 2.66 GHz y 4GB RAM.

Tabla 1: Parámetros de la red

Arcos	Nodos correspondientes	t_0	q	\bar{x}
1	(1, 5)	0.10	200	400.00
2	(3, 8)	0.10	200	400.00
3	(5, 6)	0.20	100	188.26
4	(5, 8)	0.70	100	0.00
5	(5, 9)	0.50	100	431.36
6	(6, 7)	1.00	100	368.64
7	(7, 2)	0.10	200	400.00
8	(7, 9)	0.10	100	180.38
9	(8, 5)	1.00	100	219.62
10	(8, 6)	1.00	100	180.38
11	(9, 4)	0.08	200	400.00
12	(9, 7)	0.70	100	211.74

4.1. RED CODINA-BARCELÓ

Consideramos el problema propuesto en Codina y Barceló (2004). Esta red de transporte consiste en dos pares OD, 9 nodos y 12 arcos (ver figura 1).

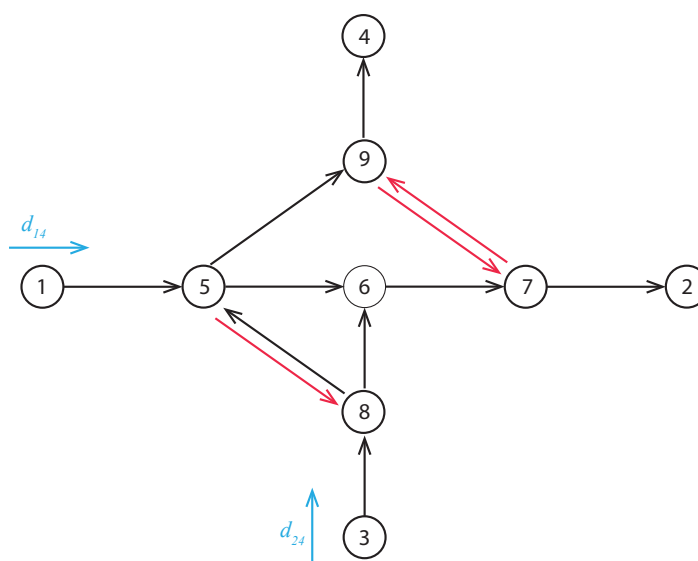


Figura 1: Red de Codina-Barcelo

El flujo en los arcos es la suma de los flujos de arco para cada OD, i.e., $x_a = x_a^1 + x_a^2$. El vector de tiempos de viaje $t(x)$ es $t_a(x) = t_{0,a}(1 + 10(x_a/q_a)^4)$, los parámetros $t_{0,a}$ y q_a se dan en la tabla 1 junto con las incidencias nodo-arco y un flujo factible \bar{x} , dado por un flujo de Wardrop correspondiente a la demanda $\bar{d} = (\bar{d}_1, \bar{d}_2) = (400, 400)$. A fin de proceder a las pruebas numéricas, algunas componentes de este vector \bar{x} se tomaron como los flujos observados en las funciones objetivo.

En Codina y Barceló (2004) se proponen dos funciones objetivo dadas por

$$f_1(x) = (x_8 - \bar{x}_8)^2 + \frac{2}{3}(x_{12} - \bar{x}_{12})^2$$

y

$$f_2(x) = (x_4 - \bar{x}_4)^2 + \frac{2}{3}(x_8 - \bar{x}_8)^2,$$

donde \bar{x}_4 , \bar{x}_8 y \bar{x}_{12} son los flujos observados en los arcos 4, 8 y 12, respectivamente. Consideramos aquí otras cuatro funciones objetivo, dadas por

$$f_3(d, x) = (d_1 - \bar{d}_1)^2 + (d_2 - \bar{d}_2)^2 + f_1(x),$$

$$f_4(d, x) = (d_1 - \bar{d}_1)^2 + (d_2 - \bar{d}_2)^2 + f_2(x),$$

$$f_5(d, x) = (d_1 - \hat{d}_1)^2 + (d_2 - \hat{d}_2)^2 + f_1(x)$$

y

$$f_6(d, x) = (d_1 - \hat{d}_1)^2 + (d_2 - \hat{d}_2)^2 + f_2(x),$$

que además consideran el vector demanda desactualizado \bar{d} o $\hat{d} = (\hat{d}_1, \hat{d}_2) = (390, 410)$. Notemos que f_1 y f_2 no tienen objetivo de demanda, mientras que \bar{x} es un flujo de Wardrop para la demanda objetivo en f_3 y f_4 , con lo cual es razonable esperar que el algoritmo pueda obtener un valor cero para estas cuatro funciones objetivo. En los dos últimos casos, no hay garantía de que los flujos observados pertenezcan a un vector de Wardrop de la demanda dada, de manera que el valor óptimo puede ser estrictamente positivo. Nuestros resultados numéricos confirman esto, como se ilustra en la tabla 2, donde además se presentan el número de iteraciones y el tiempo computacional de cada ejecución. La tolerancia escogida fue $\varepsilon = 10^{-7}$ y la constante de escalamiento se fijó en $\sigma_p = 1$. Finalmente, los flujos de arco desagregados por demanda se muestran en la tabla 3, donde los arcos observados son resaltados en negrita para cada función objetivo.

Tabla 2: Resultados y desempeño

Prob	f	$\frac{1}{2}\ \Phi\ ^2$	Demandas	Iter	Tiempo
f_1	7.705057e-13	3.547188e-08	(399.996;399.998)	123	7.270
f_2	4.131674e-05	1.667789e-08	(544.991;432.810)	120	7.129
f_3	1.407199e-06	3.164393e-08	(399.999;399.999)	117	7.379
f_4	8.078760e-08	2.512924e-08	(400.000;399.999)	122	7.223
f_5	3.099497e+01	2.908765e-08	(391.197;408.107)	118	7.145
f_6	2.514299e+01	2.560786e-08	(390.409;407.915)	122	7.238

4.2. RED STEENBRINK

La red Steenbrink (Steenbrink (1976b,a)) es muy conocida en la literatura y, pese a ser una red de un porte entre mediano y pequeño, sus características hacen que presente dificultades en los abordajes numéricos. Consiste en 12 pares OD, 9 nodos y 36 arcos.

Analizamos cuatro funciones objetivo diferentes, considerando o no la distancia a una demanda desactualizada \bar{d} y eligiendo dos conjuntos de arcos observados en cada caso (ambos con

Tabla 3: Flujos desagregados

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
x_1^1	399.997	544.992	400.000	400.000	391.197	390.409
x_2^1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_3^1	188.257	270.670	188.258	188.259	182.249	181.814
x_4^1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_5^1	211.740	274.322	211.741	211.742	208.949	208.595
x_6^1	188.257	270.670	188.258	188.259	182.249	181.814
x_7^1	399.997	544.992	400.000	400.000	391.197	390.409
x_8^1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_9^1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{10}^1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{11}^1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_{12}^1	211.740	274.322	211.741	211.742	208.949	208.595
x_1^2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_2^2	399.999	432.811	400.000	400.000	408.108	407.915
x_3^2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_4^2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_5^2	219.619	252.439	219.620	219.620	222.144	221.973
x_6^2	180.380	180.372	180.380	180.380	185.964	185.943
x_7^2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x_8^2	180.380	180.372	180.380	180.380	185.964	185.943
x_9^2	219.619	252.439	219.620	219.620	222.144	221.973
x_{10}^2	180.380	180.372	180.380	180.380	185.964	185.943
x_{11}^2	399.999	432.811	400.000	400.000	408.108	407.915
x_{12}^2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

seis elementos). En todos los casos, el valor de los flujos en los arcos observados fue tomado de un flujo de Wardrop x^0 (obtenido mediante el algoritmo DSD) asociado a la demanda $\hat{d} \neq \bar{d}$. En consecuencia, como en los ejemplos de la sección precedente, es esperable que nuestro método obtenga valores cero cuando las funciones objetivo no incluyen ajuste de demanda, y valores estrictamente positivos cuando los flujos en los arcos observados no pertenecen necesariamente a un flujo de Wardrop asociado a la demanda objetivo \bar{d} . En estos últimos casos, dado que el ajuste a los flujos de los arcos observados debería ser más importante que el ajuste a la demanda desactualizada (esto es $\sum_{\tilde{A}} \beta_a (x_a - \bar{x}_a)^2$ debería ser cercano a cero incluso si $\sum \rho_k (d_k - \bar{d}_k)^2$ no lo es), todos los arcos observados fueron ponderados con parámetro 1 ($\beta_a = 1$) mientras que las demandas fueron ponderadas con parámetro $\rho = 1/N_d$.

Como mencionamos previamente, el criterio de parada es $\frac{1}{2} \|\Phi(u^k)\|^2 < \varepsilon \sigma_p$. Como en el ejemplo anterior, el parámetro de tolerancia fue fijado en $\varepsilon = 10^{-7}$. Por otro lado, dado que el tamaño de esta red ya empieza a tener cierta importancia, la constante de escalamiento σ_p debería elegirse de acuerdo al rango de las variables involucradas (flujo en arcos y demandas) y la dimensión de $\|\Phi\|$ (que crece dramáticamente con el tamaño de la red). A fin de tener en cuenta estos factores, es razonable asociar esta constante a la función de mérito evaluada en un punto inicial específico, i.e. $\sigma_p = \frac{1}{2} \|\Phi(u_0)\|^2$. Para ello es importante adoptar una estrategia para la elección de estos puntos iniciales. Para estos ejemplos, la demanda inicial elegida fue

$d_0 = \bar{d}$, por lo tanto el flujo inicial en arcos desagregado por demanda X_0 fue obtenido mediante el algoritmo DSD como el Wardrop asociado a d_0 (que en general no corresponde a los flujos en los arcos observados, ya que estos no pertenecen a priori a un flujo de Wardrop de la demanda \bar{d}), y el multiplicador inicial λ_0 se obtuvo resolviendo (8) para d_0 y X_0 . Finalmente, $y_0 = \sqrt{X_0} - \sqrt{G(X_0)}$ (componente a componente), $\mu_0 = 0$ y $w_0 = \sqrt{d_0}$. La idea subyacente es que en el caso en que el flujo en los arcos observados correspondiera a un flujo de Wardrop x_0 , el valor inicial de la función de mérito debería ser cero.

Todos los parámetros mencionados se muestran en la tabla 4.

Tabla 4: Problemas en la red Steenbrink

Prob	\tilde{A}	ρ_k	β_a	ε	σ_p
St_1	{5, 6, 17, 18, 21, 22}	0	1	10^{-7}	316524.73
St_2	{7, 8, 18, 19, 31, 32}	0	1	10^{-7}	532571.57
St_3	{5, 6, 17, 18, 21, 22}	1/12	1	10^{-7}	316524.73
St_4	{7, 8, 18, 19, 31, 32}	1/12	1	10^{-7}	532571.57

Los resultados numéricos obtenidos se muestran en la tabla 5.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo presentamos un nuevo abordaje para el problema de estimación de matrices OD en redes de transporte. El abordaje tienen la ventaja de no basarse en técnicas heurísticas, como lo han hecho la mayoría de los trabajos en el área hasta el momento, sino en la formulación de una adecuada condición de optimalidad. La desventaja reside en el hecho de que la dimensión del problema crece dramáticamente con el número de arcos de la red y la cantidad de pares OD, y nuestra formulación no explota explícitamente la estructura del problema de tráfico. Por esta razón los problemas abordados numéricamente son hasta el momento de pequeño y mediano porte. En trabajos futuros se buscará introducir algún tipo de descomposición que permita aprovechar la estructura subyacente a fin de permitir el abordaje de problemas de mayor porte.

REFERENCIAS

- Codina E. y Barceló J. Adjustment of O-D trip matrices from observed volumes: An algorithmic approach based on conjugate directions. *European Journal of Operational Research*, 155:535–557, 2004.
- Facchinei F. y Pang J. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Vol. I and II*. Springer Series in Operations Research, Springer, Berlin, Germany, 2003.

Tabla 5: Resultados

Prob	Iter	f	$\frac{1}{2} \ \Phi\ ^2$	Tiempo
St_1	6	1.692792e-05	1.286100e-02	60.872
St_2	6	2.022813e-04	2.971659e-02	44.928
St_3	11	1.259151e+01	3.112575e-02	216.514
St_4	105	9.450584e-02	5.239437e-02	2685.744

[h]

- Izmailov A.F., Pogosyan A.L., y Solodov M.V. Semismooth Newton method for the lifted reformulation of mathematical programs with complementarity constraints. *Computational Optimization and Applications*, 51(1):199–221, 2012.
- Lundgren J.T. y Petersen A. A heuristic for the bilevel origin-destination-matrix estimation problem. *Transport Research B*, 42:339–354, 2008.
- Ortúzar J. y Willumsen L. *Modelling Transport*. Wiley, New York, USA, 2001.
- Patriksson M. *The Traffic Assignment Problem. Models and Methods*. Topics in Transportation VSP, The Netherlands, 1994.
- Steenbrink P.A. *Optimization of transport networks*. John Wiley and Sons, 1976a.
- Steenbrink P.A. Transport network optimization in the dutch integral transportation study. *Transportation Research*, 8:11–27, 1976b.
- Stein O. Lifting mathematical programs with complementarity constraints. *Mathematical Programming*, 131:71–94, 2012.