

## GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS ÓPTIMAS UTILIZANDO CONTROL PREDICTIVO

Marina H. Murillo<sup>a</sup>, Alejandro C. Limache<sup>a</sup> y Leonardo L. Giovanini<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Research Center of Computational Methods (CIMEC).*

*UNL - CONICET. Santa Fe, Argentina., <http://www.cimec.gov.ar/>*

<sup>b</sup>*Research Center for Signals, Systems and Computational Intelligence (SINC)*

*UNL - CONICET. Santa Fe, Argentina., <http://fich.unl.edu.ar/sinc/>*

**Palabras Clave:** trayectoria óptima, *waypoints*, *model predictive control*

**Resumen.** Los vehículos aéreos no tripulados (UAVs) son vehículos que cuentan con la capacidad de volar sin un piloto a bordo. Actualmente los mismos se utilizan en diversas misiones como ser búsqueda y rescate, adquisición de imágenes, agricultura de precisión, entre otros. Para el cumplimiento de las mismas es esencial que el UAV cuente con un sistema de navegación que permita planificar la trayectoria, es decir la ruta que el mismo debe seguir para cumplir con su objetivo.

En este trabajo se presenta un algoritmo que permite la generación de trayectorias en el espacio bidimensional (2D). Dada una colección de puntos, denominados *waypoints*, por los cuales debe pasar la ruta que debe seguir un UAV, existen infinitas curvas que cumplen dicha condición. En particular, en este trabajo se desea hallar aquella trayectoria que minimice la distancia entre la posición actual del vehículo aéreo y el *waypoint*, teniendo en cuenta además las restricciones impuestas por la dinámica propia del UAV.

La técnica utilizada aquí para determinar la ruta óptima es una variante de la técnica *Model Predictive Control* (MPC), que tiene en cuenta la dinámica no-lineal del modelo del vehículo y permite la incorporación de las restricciones del mismo de forma sencilla. El correcto funcionamiento del algoritmo propuesto es evaluado mediante la generación de distintas trayectorias en el plano *xy*, las cuales surgen de las diferentes secuencias de *waypoints* definidas por el usuario.

## 1. INTRODUCCIÓN

Una de las áreas de la aviación que ha experimentado un importante crecimiento es aquella que involucra a los UAVs. Esta clase de vehículos son operados de forma remota mediante radio-control o bien de forma totalmente autónoma (Valavanis y Valavanis, 2007; Valavanis et al., 2008). Los UAVs son más económicos, prácticos y seguros que los aviones tripulados y su operación requiere un equipo mínimo de trabajo. En la actualidad, los mismos se utilizan en misiones como ser: búsqueda y rescate de personas (Doherty y Rudol, 2007), inspección de líneas eléctricas (Jones, 2005), actividades agrícolas (Zhang y Kovacs, 2012) y recolección de imágenes (Adams et al., 2014), entre otras.

Para que los UAVs puedan cumplir satisfactoriamente sus misiones es indispensable que los mismos cuenten con un adecuado sistema de navegación y control, el cual debe encargarse de establecer la ruta que se desea seguir entre el origen y el destino, posicionar el UAV en dicha ruta y corregir la posición basándose en la discrepancia entre la posición actual del mismo y la establecida por la trayectoria deseada. Es importante que el UAV cuente con la capacidad de computar o actualizar su ruta en tiempo real teniendo en cuenta sus propiedades dinámicas y cinemáticas.

Existen diversos métodos para el cómputo de trayectorias. Por ejemplo, en (Egerstedt y Martin, 2001) se generan las trayectorias mediante la obtención de *splines* suaves utilizando técnicas de control óptimo y de programación matemática. En primer lugar, el método se centra en la generación de curvas que pasen cerca de los *waypoints* y luego se agregan las restricciones de interpolación a la formulación del problema. En el trabajo (Arney, 2007) se presenta una técnica para la generación de una trayectoria a partir de una serie de *waypoints*. Mediante la utilización de *B-Splines*, la trayectoria puede modificarse en presencia de ambientes dinámicos. En el trabajo presentado por (Richter et al., 2013) se utiliza el algoritmo *Rapidly exploring Random Tree* (RRT) para encontrar una determinada ruta, inicialmente ignorando la dinámica del vehículo. De la ruta obtenida se determina un conjunto de puntos de interés (*waypoints*) que representan la ruta óptima. Luego, una secuencia de segmentos polinomiales óptimos se utiliza para unir esos *waypoints* en una trayectoria suave. Es importante destacar que los trabajos anteriormente mencionados utilizan un procedimiento de planificación de la trayectoria deseada *offline* y además la ruta deseada resultante no tiene en cuenta la dinámica del vehículo que debe seguirla.

En este trabajo se presenta un algoritmo que permite la generación de trayectorias en el plano  $xy$ . El principio del algoritmo propuesto se basa en el cómputo de una trayectoria *online* por tramos hacia un destino determinado. Dado un listado de *waypoints* definido por el usuario, el origen del primer tramo de la ruta queda determinado por la posición actual del vehículo mientras que el destino queda determinado por el primer *waypoint* del listado. El primer tramo de la trayectoria a seguir se obtiene mediante la minimización de una función objetivo que penaliza principalmente las desviaciones de la posición del vehículo respecto del primer *waypoint* y también tiene en cuenta las desviaciones excesivas de las entradas de control. Una vez que el vehículo alcanza el primer *waypoint*, se cambia el valor deseado de posición al segundo *waypoint* de la lista, y así sucesivamente, hasta llegar al último *waypoint* del listado.

El problema de generación de cada tramo de la trayectoria a seguir, se plantea aquí como un problema de control óptimo con restricciones y se utiliza la técnica de control *Iterative Nonlinear Model Predictive Control* (INL-MPC) (Murillo et al., in review).

Este trabajo se organiza como sigue: En la Sección 2 se describe brevemente la dinámica de sistemas no lineales y se presenta un modelo no lineal, trivial y reducido de un vehículo, el cual es utilizado para la obtención de la trayectoria a seguir. En la Sección 3 se resume el algoritmo

de control INL-MPC utilizado y en la Sección 4 se presenta la metodología propuesta para la obtención de trayectorias óptimas y se muestran los resultados obtenidos. Finalmente, en la Sección 5 se describen las conclusiones.

## 2. DINÁMICA DE SISTEMAS NO LINEALES

Una representación general de la dinámica no lineal de un sistema arbitrario está dada por la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estados del sistema,  $\mathbf{u}$  es el vector de entradas o controles del sistema,  $\dot{\mathbf{x}}$  es el vector de *rates* de estados y  $\bar{\mathbf{f}}$  es una función vectorial que depende de la dinámica del sistema modelado.

### 2.1. Modelo Reducido de un Vehículo en el Plano

En este apartado, se presenta el modelo no lineal y reducido de un vehículo, el cual se modela como una partícula que se desplaza en el plano  $xy$  con velocidad constante  $v_T$ . Se ha adoptado este modelo trivial puesto que la cinemática de una partícula se reduce simplemente a:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_T \quad (2)$$

En este caso, el vector de estados  $\mathbf{x}$  del vehículo queda simplemente definido por su posición, es decir:

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [x \ y]^T \quad (3)$$

Como se está analizando el movimiento en el plano, la dimensión del vector de estados es por lo tanto  $N_s = 2$ .

En la Fig. 1 se puede ver un esquema del modelo del vehículo reducido propuesto. Si se des-

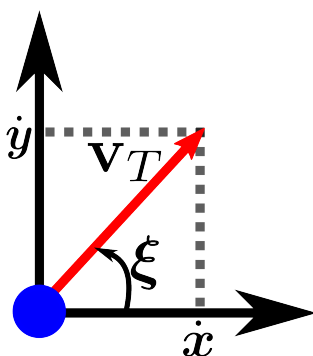


Figura 1: Modelo Reducido del Vehículo Tipo Partícula

componer el vector de *rates* de estados  $\dot{\mathbf{x}}$  en sus componentes en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente, se obtiene que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_T \cos \xi \\ v_T \sin \xi \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $v_T$  es el módulo del vector velocidad del vehículo y  $\xi$  representa el ángulo de orientación, determinado por la dirección del vector velocidad  $\mathbf{v}_T$  y la horizontal. Adoptando el ángulo  $\xi$  como entrada de control, es decir

$$\mathbf{u} = [u_1]^T = [\xi]^T \quad (5)$$

cuya dimensión es  $N_i = 1$ , se puede observar que la Ec.(4) puede escribirse en forma genérica como la Ec.(1), donde la función vectorial  $\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , que define la dinámica del modelo reducido del vehículo queda determinada por:

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} v_T \cos \xi \\ v_T \sin \xi \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 3. CONTROL PREDICTIVO NO LINEAL E ITERATIVO (INL-MPC)

*Model Predictive Control* (MPC), o control predictivo basado en modelos, es una técnica moderna que, hoy en día, engloba diferentes técnicas de control óptimo. En el caso de dinámicas no lineales se pueden desarrollar muchas variantes dando lugar al surgimiento de nuevos algoritmos de control.

La técnica INL-MPC (Murillo et al., *in review*) permite controlar, de manera óptima, diferentes sistemas dinámicos no lineales. El método se basa en la utilización de trayectorias definidas en forma iterativa en el espacio de estados. El método utiliza un proceso de linealización genérico que, opuesto a los métodos convencionales, no emplea estados de equilibrio predefinidos sino que la linealización se realiza a lo largo de cualquier estado arbitrario. Esta técnica, además, permite la inclusión de restricciones con facilidad.

#### 3.1. Predicción de Trayectorias de Estados

Se considera que la partícula en el tiempo  $t^0$  se encuentra en un estado arbitrario  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ , y se asume ahora que la partícula va a ser controlada por una serie de  $h_p$  controles constantes por tramos (Ver Fig. 2):

$$\mathbf{U}_p = [\mathbf{u}^1 \quad \mathbf{u}^2 \quad \dots \quad \mathbf{u}^k \dots \quad \mathbf{u}^{h_p}]^T \quad (7)$$

durante un período de tiempo  $[t^0, t^{h_p}]$ . Cada control  $\mathbf{u}^k$  en la Ec. (7) se aplica durante un intervalo de tiempo  $[t^{k-1}, t^k]$  de longitud  $\Delta T_s$ . Los tiempos discretos se definen como  $t^k = t^0 + k\Delta T_s$ .

**Notación:** De ahora en adelante se utilizarán superíndices para denotar los valores discretos de

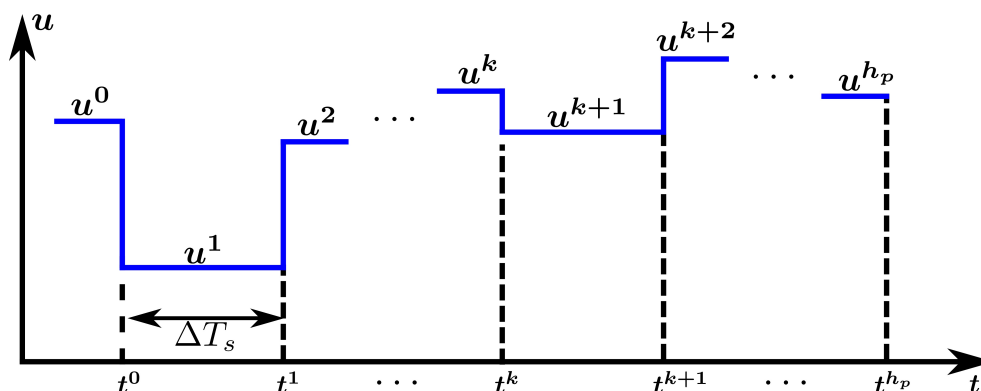


Figura 2: Esquema de discretización temporal

variables en diferentes instantes temporales discretos  $t^k$ . Por ejemplo, el valor de la variable  $y(t)$  en el instante de tiempo  $t^k$  se denotará por  $y^k$ .

Con la partícula en el estado inicial  $\mathbf{x}^0$  y dada la primer entrada de control  $\mathbf{U}_p(1) = \mathbf{u}^1$ , la Ec. (1) puede integrarse utilizando, por ejemplo, un algoritmo de integración Runge-Kutta para encontrar el nuevo estado de la partícula  $\mathbf{x}^1$  en el instante de tiempo  $t^1$ . Iterativamente pueden

determinarse los estados subsiguientes  $\mathbf{x}^k$  asociados a la secuencia de control  $\mathbf{U}_p$  definidos en Ec. (7) para encontrar el vector de estados predichos:

$$\hat{\mathbf{X}} = [\mathbf{x}^1 \quad \mathbf{x}^2 \quad \dots \quad \mathbf{x}^k \quad \dots \quad \mathbf{x}^{h_p}]^T \quad (8)$$

Lo anterior define una trayectoria de estados de la partícula  $T(\mathbf{U}_p)$ , como se muestra en la Fig. 3. Por supuesto, una secuencia de control  $\mathbf{U}_p^{(i)}$  diferente:

$$\mathbf{U}_p^{(i)} = [\mathbf{u}^{1,(i)} \quad \mathbf{u}^{2,(i)} \quad \dots \quad \mathbf{u}^{k,(i)} \quad \dots \quad \mathbf{u}^{h_p,(i)}]^T \quad (9)$$

generará una trayectoria de estados diferente  $T(\mathbf{U}_p^{(i)})$  con su correspondiente vector de estados predichos  $\hat{\mathbf{X}}^{(i)}$ :

$$\hat{\mathbf{X}}^{(i)} = [\mathbf{x}^{1,(i)} \quad \mathbf{x}^{2,(i)} \quad \dots \quad \mathbf{x}^{k,(i)} \quad \dots \quad \mathbf{x}^{h_p,(i)}]^T \quad (10)$$

Esto también se muestra en la Fig. 3.

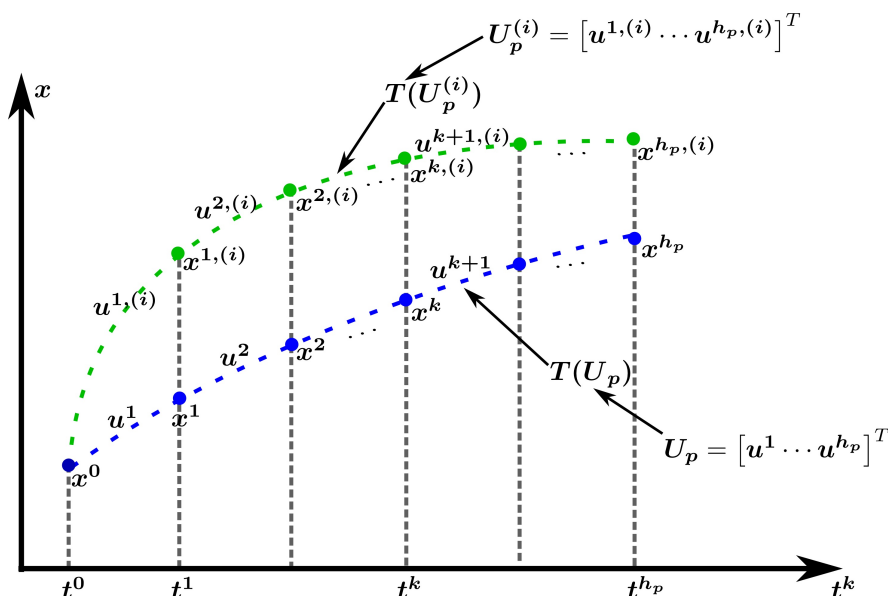


Figura 3: Predicción de trayectorias de estados

### 3.2. Linealización Generalizada, Discretización Temporal y Restricciones

#### 3.2.1. Linealización

La ecuación de estados no lineal (1) puede linealizarse expandiendo  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  en serie de Taylor de primer orden (o de mayor orden Slegers et al. (2006)) alrededor de un punto de operación arbitrario  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  (Stevens y Lewis, 2003; Maciejowski, 2002):

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{u}}|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_e) \quad (11)$$

donde  $\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}$  y  $\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{u}}$  son las matrices jacobianas del sistema evaluadas en  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ . Notar que  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  puede ser calculada para cada  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  usando la ecuación (1) y puede tomar valores no nulos. Luego, si se definen

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{u}}|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}, \quad \mathbf{d} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) - \mathbf{A}\mathbf{x}_e - \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (12)$$

entonces, la ecuación (11) puede escribirse en forma compacta como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{d} \quad (13)$$

La solución general de (13) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_e)} \mathbf{x}(t_e) + \int_{t_e}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \int_{t_e}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{d} d\tau \quad (14)$$

### 3.2.2. Linealización a lo largo de una trayectoria de estados predicha

Como puede verse en la subsección 3.1, diferentes secuencias de entradas de control definen diferentes trayectorias de estados. Se asume que, en el instante de tiempo  $t^0$ , la partícula se encuentra en un estado conocido  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$  y que durante el horizonte de predicción  $[t^0, t^{h_p}]$  se moverá próxima a la trayectoria de estados predicha  $T(\mathbf{U}_p^{(i)})$ , la cual es definida por el vector de entradas de control  $\mathbf{U}_p^{(i)}$  y estados predichos  $\hat{\mathbf{X}}^{(i)}$  dados en las Ecs. (9) y (10). Ahora, se procede a linealizar la Ec. (1) en cada intervalo de tiempo  $[t^k, t^{k+1}]$ , usando como puntos de linealización  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  los estados y entradas de control  $(\mathbf{x}^{k,(i)}, \mathbf{u}^{k,(i)})$  asociados a la trayectoria de estados predicha  $T(\mathbf{U}_p^{(i)})$ . Luego, para cada intervalo de tiempo  $[t^k, t^{k+1}]$ , las matrices linealizadas de la Ec. (12) se transforman en:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \mathbf{A}^{k,(i)} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{k,(i)}, \mathbf{u}^{k,(i)}}, \quad \mathbf{B}^k = \mathbf{B}^{k,(i)} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^{k,(i)}, \mathbf{u}^{k,(i)}} \\ \mathbf{d}^k &= \mathbf{d}^{k,(i)} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{k,(i)}, \mathbf{u}^{k,(i)}) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{k,(i)} - \mathbf{B}^k \mathbf{u}^{k,(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

Estas matrices se pueden utilizar dentro de la Ec. (14) para predecir el estado  $\mathbf{x}^{k+1}$  en el instante de tiempo  $t^{k+1}$  dado el estado  $\mathbf{x}^k$  en el instante de tiempo  $t^k$  y el control constante aplicado  $\mathbf{u}^{k+1}$  (ver Fig. 2), luego:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}^k \mathbf{x}^k + \tilde{\mathbf{B}}^k \mathbf{u}^{k+1} + \tilde{\mathbf{G}}^k \mathbf{d}^k \quad (16)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{A}}^k = e^{\mathbf{A}^k \Delta T_s}, \quad \tilde{\mathbf{G}}^k = \int_0^{\Delta T_s} e^{\mathbf{A}^k \tau} d\tau, \quad \tilde{\mathbf{B}}^k = \tilde{\mathbf{G}}^k \mathbf{B}^k \quad (17)$$

son las versiones discretizadas de las matrices del sistema lineal (15). La Ec. (16) resulta ser la representación discreta en espacio de estados del modelo linealizado de la partícula.

Iterando el modelo descrito por (16) a lo largo de los tiempos consecutivos  $t^k$  con  $k = 0, 1, \dots, h_p - 1$ , el vector de estados predichos definido en la Ec. (8) puede calcularse como:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{P} \mathbf{x}^0 + \mathbf{H}_u \mathbf{U}_p + \mathbf{H}_g \mathbf{D} \quad (18)$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^0 \\ \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{h_p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}^{h_p-1} \dots \tilde{\mathbf{A}}^0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_u = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{B}}^0 & \tilde{\mathbf{B}}^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{B}}^0 & \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{B}}^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}^{h_p-1} \dots \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathbf{B}}^0 & \tilde{\mathbf{A}}^{h_p-1} \dots \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{B}}^1 & \dots & \tilde{\mathbf{B}}^{h_p-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{H}_g = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{G}}^0 & \tilde{\mathbf{G}}^1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{G}}^0 & \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{G}}^1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}^{h_p-1} \cdots \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathbf{G}}^0 & \tilde{\mathbf{A}}^{h_p-1} \cdots \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{G}}^1 & \cdots & \tilde{\mathbf{G}}^{h_p-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

### 3.2.3. Restricciones

En este apartado se muestra como calcular las restricciones en las entradas de control, en las variaciones de las entradas de control y en los estados.

En cada instante de tiempo  $t = t^k$  con  $k = 1, \dots, h_p$ , debe satisfacerse que:

$$\mathbf{u}_m^k \leq \mathbf{u}^k \leq \mathbf{u}_M^k \quad k = 1, \dots, h_p \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_m^k \leq \dot{\mathbf{u}}^k \leq \dot{\mathbf{u}}_M^k \quad k = 1, \dots, h_p \quad (23)$$

y

$$\mathbf{x}_m^k \leq \mathbf{x}^k \leq \mathbf{x}_M^k \quad k = 1, \dots, h_p \quad (24)$$

Puede demostrarse que la Ec. (22) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \mathbf{U}_p \leq \begin{bmatrix} \mathbf{U}_M \\ -\mathbf{U}_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

donde  $\mathbf{U}_M$  y  $\mathbf{U}_m$  son vectores que contienen los límites superior e inferior de las entradas de control, respectivamente y  $\mathbf{I}_p$  es una matriz identidad de dimensión  $(N_i \times h_p) \times (N_i \times h_p)$ .

De forma similar, la Ec. (23) puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{U}_p \leq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_M \\ -\dot{\mathbf{U}}_m \end{bmatrix} \Delta T_s + \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde  $\dot{\mathbf{U}}_M$  y  $\dot{\mathbf{U}}_m$  son vectores que contienen los límites superior e inferior de los *rates* de las entradas de control, respectivamente,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_i} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_{N_i} & \mathbf{I}_{N_i} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{N_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I}_{N_i} & \mathbf{I}_{N_i} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{u}^0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

y  $\mathbf{I}_{N_i}$  es una matriz identidad de dimensión  $N_i \times N_i$ .

Utilizando la Ec. (16), las restricciones de estados definidas en Ec. (24) se pueden escribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_u \\ -\mathbf{H}_u \end{bmatrix} \mathbf{U}_p \leq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_M \\ -\mathbf{X}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{P} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \mathbf{x}^0 + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_g \\ \mathbf{H}_g \end{bmatrix} \mathbf{D} \quad (28)$$

donde  $\mathbf{X}_M$  y  $\mathbf{X}_m$  son vectores que contienen los límites superior e inferior de los estados, respectivamente.

Finalmente, agrupando las Ecs. (25), (26) y (28), se tiene que:

$$\mathbf{A}_{\text{ineq}} \mathbf{U}_p \leq \mathbf{b}_{\text{ineq}} \quad (29)$$

donde

$$\mathbf{A}_{\text{ineq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ -\mathbf{I}_p \\ \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} \\ \mathbf{H}_u \\ -\mathbf{H}_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\text{ineq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_M \\ -\mathbf{U}_m \\ \dot{\mathbf{U}}_M \Delta T_s - \mathbf{U}_0 \\ -\dot{\mathbf{U}}_m \Delta T_s + \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{X}_M - \mathbf{P}\mathbf{x}^0 - \mathbf{H}_g \mathbf{D} \\ -\mathbf{X}_m + \mathbf{P}\mathbf{x}^0 + \mathbf{H}_g \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (30)$$

### 3.2.4. Función Objetivo Cuadrática

MPC utiliza la predicción del comportamiento futuro de un sistema para determinar una secuencia de entradas de control óptima, que minimiza una función objetivo o función de costo  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . En particular, la función de costo  $J$  que se utiliza en este trabajo penaliza las desviaciones de estados y las desviaciones en los *rates* de entradas de control. La función objetivo se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$J(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{U}_p) = (\mathbf{X}_{sp} - \hat{\mathbf{X}})^T \check{\mathbf{Q}}_x (\mathbf{X}_{sp} - \hat{\mathbf{X}}) + (\dot{\mathbf{U}}_p - \dot{\mathbf{U}}_{sp})^T \check{\mathbf{R}}_u (\dot{\mathbf{U}}_p - \dot{\mathbf{U}}_{sp}) \quad (31)$$

donde  $\check{\mathbf{Q}}_x$  y  $\check{\mathbf{R}}_u$  son matrices definidas semi positiva y positiva, respectivamente,  $\mathbf{X}_{sp}$  especifica los valores deseados de los estados y  $\dot{\mathbf{U}}_{sp}$  especifica los valores deseados de *rates* de entradas de control.

Utilizando la Ec. (18) en la Ec. (31), escribiendo  $\dot{\mathbf{U}}_p$  en términos de  $\mathbf{U}_p$  y descartando los términos constantes, se puede demostrar que la función objetivo (31) se puede escribir como una función de la secuencia de control solamente, como sigue:

$$J(\mathbf{U}_p) = \mathbf{g}^T \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_p^T \mathbf{H} \mathbf{U}_p \quad (32)$$

donde

$$\mathbf{g} = 2 \left[ \mathbf{H}_u^T \check{\mathbf{Q}}_x (\mathbf{P}\mathbf{x}^0 + \mathbf{H}_g \mathbf{D} - \mathbf{X}_{sp}) + \mathbf{E}^T \check{\mathbf{R}}_u (\mathbf{U}_0 - \Delta T_s \dot{\mathbf{U}}_{sp}) \right] \quad (33)$$

y

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_u^T \check{\mathbf{Q}}_x \mathbf{H}_u + \mathbf{E}^T \check{\mathbf{R}}_u \mathbf{E} \quad (34)$$

De la Ec. (32), se puede ver que el problema de control se redujo al problema de encontrar una secuencia de control óptima  $\mathbf{U}_p^*$  que minimice la función objetivo cuadrática sujeta a las restricciones definidas en la Ec. (30).

En MPC se asume que los valores de control permanecen constantes una vez que se ha alcanzado el horizonte de control  $t^{hc}$ . Esto significa que los valores  $\mathbf{U}_p(k)$  de la secuencia de control  $\mathbf{U}_p$  permanecen igual a  $\mathbf{u}^{hc}$  para  $k = h_c + 1, \dots, h_p$ . En consecuencia, es posible expresar la secuencia completa de control  $\mathbf{U}_p$  en términos de la secuencia de control efectiva  $\mathbf{U}_c$  como sigue:

$$\mathbf{U}_p = \check{\mathbf{T}} \mathbf{U}_c \quad (35)$$

donde el vector de secuencia efectiva de control está dado por

$$\mathbf{U}_c = [\mathbf{u}^1 \ \mathbf{u}^2 \ \dots \ \mathbf{u}^{h_c}]^T \quad (36)$$



y  $\check{\mathbf{T}}$  es una matriz que copia el vector  $\mathbf{U}_c$  en  $\mathbf{U}_p$  y repite el elemento  $u^{h_c}$  para  $k = h_c + 1, \dots, h_p$ . Finalmente, el problema de minimización puede escribirse en términos de  $\mathbf{U}_c$  como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}_c} J(\mathbf{U}_c) &= \mathbf{g}^T \check{\mathbf{T}} \mathbf{U}_c + \mathbf{U}_c^T \check{\mathbf{T}}^T \mathbf{H} \check{\mathbf{T}} \mathbf{U}_c \\ \text{st. } \mathbf{A}_{\text{ineq}} \check{\mathbf{T}} \mathbf{U}_c &\leq \mathbf{b}_{\text{ineq}} \end{aligned} \quad (37)$$

La solución del problema de minimización de la Ec. (37) da como resultado la secuencia de entradas de control óptima  $\mathbf{U}_c^* \rightarrow \mathbf{U}_p^*$  que hace que el modelo en propuesto describa una trayectoria óptima.

#### 4. GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS ÓPTIMAS

La idea principal del algoritmo es generar una trayectoria que sea óptima en cuanto a su longitud y que además tenga en cuenta las restricciones propias del modelo del vehículo y penalice variaciones excesivas en la entrada de control.

Si el modelo tipo partícula del vehículo no tuviese restricciones, la trayectoria más corta sería la recta que une la posición actual con un determinado *waypoint*. En la Fig. 4 se pueden observar dicha trayectoria junto con la trayectoria óptima que tiene en cuenta las restricciones del modelo del vehículo. Si se logra modificar la dirección del vector velocidad  $\mathbf{v}_T$  de forma tal

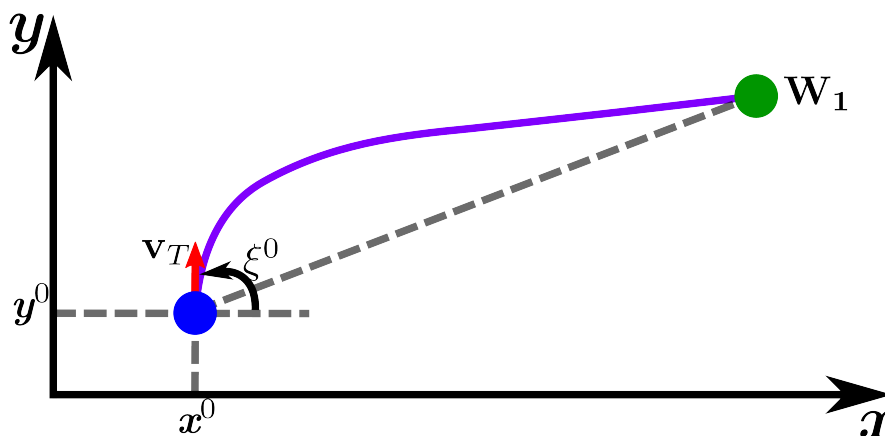


Figura 4: Trayectoria generada

que la partícula se dirija hacia el *waypoint* deseado, quedará determinada una trayectoria que considera las restricciones del modelo del vehículo.

Dada una posición inicial  $(x_0, y_0)$  y un ángulo inicial  $\xi_0$ , existen infinitas curvas que unen la posición inicial del vehículo con el *waypoint*. En este trabajo, se desea hallar aquella trayectoria que sea la más corta teniendo en cuenta las restricciones impuestas por el vehículo. Esto puede realizarse si en cada instante de tiempo se calcula el valor de ángulo  $\xi$  que minimiza la distancia entre la posición actual del vehículo tipo partícula y el *waypoint*, lo cual puede lograrse resolviendo el problema de minimización definido en la Ec. (37) utilizando el modelo reducido del vehículo tipo partícula descrito en la Ec. (6). La resolución del problema de Ec. (37) da como resultado una secuencia efectiva de control  $\mathbf{U}_c^*$  que contiene los ángulos  $\xi^k$  para  $k = 1, \dots, h_c$ , es decir:

$$\mathbf{U}_c^* = [\xi^1 \ \xi^2 \ \dots \ \xi^{h_c}]^T \quad (38)$$

Aplicando el ángulo  $\xi^1$ , que corresponde al primer instante de muestreo, al modelo reducido del vehículo definido en la Ec. (6), se puede hallar el nuevo estado del vehículo mediante un

algoritmo de integración y el proceso se reinicia desplazando el horizonte de predicción al próximo instante de muestreo. El cómputo de los sucesivos estados del vehículo son los que determinan la ruta resultante.

En el caso de contar con un listado de *waypoints*, la trayectoria final se determina computando trayectorias parciales como se muestra en la Fig. 5. Cada *waypoint* define un tramo de

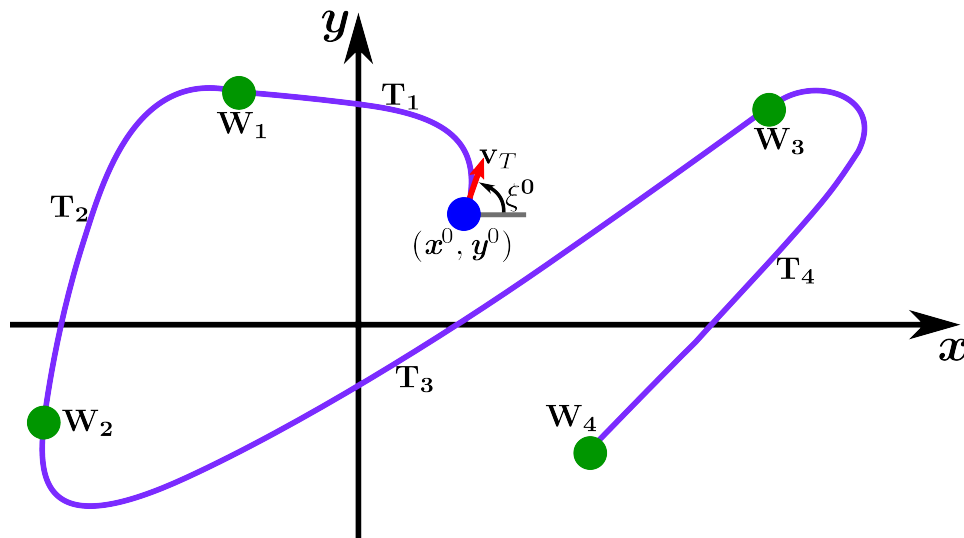


Figura 5: Generación de Trayectoria por Tramos

la trayectoria. Por ejemplo,  $T_1$  es la trayectoria parcial que une la posición inicial del vehículo con el *waypoint*  $W_1$ ,  $T_2$  es la trayectoria parcial que une el *waypoint*  $W_1$  con el *waypoint*  $W_2$ , y así sucesivamente hasta llegar al último *waypoint* del listado.

Cada tramo de ruta parcial se obtiene, del mismo modo que se explicó anteriormente, es decir, mediante la resolución del problema de minimización definido en la Ec. (37) utilizando el modelo reducido del vehículo tipo partícula. La trayectoria completa se calcula concatenando los tramos parciales de las rutas obtenidas.

#### 4.1. Simulación de Trayectorias Óptimas

Para evaluar el desempeño de la metodología propuesta, en este apartado se presenta el problema de generación de diferentes trayectorias óptimas utilizando el modelo de Ec. (6) y la técnica de control INL-MPC.

Para todas las simulaciones se adoptaron los siguiente parámetros:  $h_p = 10$ ,  $h_c = 8$ ,  $\Delta T_s = 0,1$ . Las matrices utilizadas fueron las siguientes:  $\check{Q}_x = 0,1 \cdot \text{eye}(h_p \times N_s, h_p \times N_s)$  y  $\check{R}_u = 0,1 \cdot \text{eye}(h_p \times N_i, h_p \times N_i)$ , donde  $\text{eye}(i, i)$  representa una matriz identidad cuya dimensión es  $i \times i$ . En cuanto a las restricciones solamente se limitó la variación de la entrada de control  $\xi$ :  $\dot{\xi}_m = -15$  [deg/seg] y  $\dot{\xi}_M = 15$  [deg/seg].

Se simularon dos casos particulares: 1) Generación de trayectorias óptimas a partir de un único *waypoint*, considerando diferentes condiciones iniciales para el ángulo  $\xi$  y 2) Generación de una trayectoria óptima a partir de cuatro *waypoints*. Para el primer caso, el *waypoint* se seleccionó en  $W_1 = [4, 3]^T$  [m] y para el segundo caso se seleccionaron los siguientes *waypoints*:  $W_1 = [1, 2]^T$  [m],  $W_2 = [-1, 3]^T$  [m],  $W_3 = [2, 1]^T$  [m] y  $W_4 = [4, 3]^T$  [m]. En ambos casos el valor deseado para los *rates* de entrada de control se adoptó de la siguiente manera:  $\dot{u}_{sp} = 0$  si  $\|x_{sp} - x\|_2 > 0,01$  y  $\dot{u}_{sp} = 18$  [deg/seg] en caso contrario. Esto se realizó para

que, una vez alcanzada la posición deseada, la trayectoria describa una circunferencia de radio constante que intersecte al *waypoint*.

En la Fig. 6 se pueden observar dos trayectorias óptimas que fueron generadas a partir de la posición inicial  $\mathbf{x}^0$  del modelo reducido del vehículo tipo partícula y un único *waypoint*  $\mathbf{W}_1$ . También se muestra en cada una de las figuras el vector velocidad inicial  $\mathbf{v}_T$ , el cual indica la dirección en la cual comenzará a moverse el vehículo. En la Fig. 6(a) puede verse la trayectoria

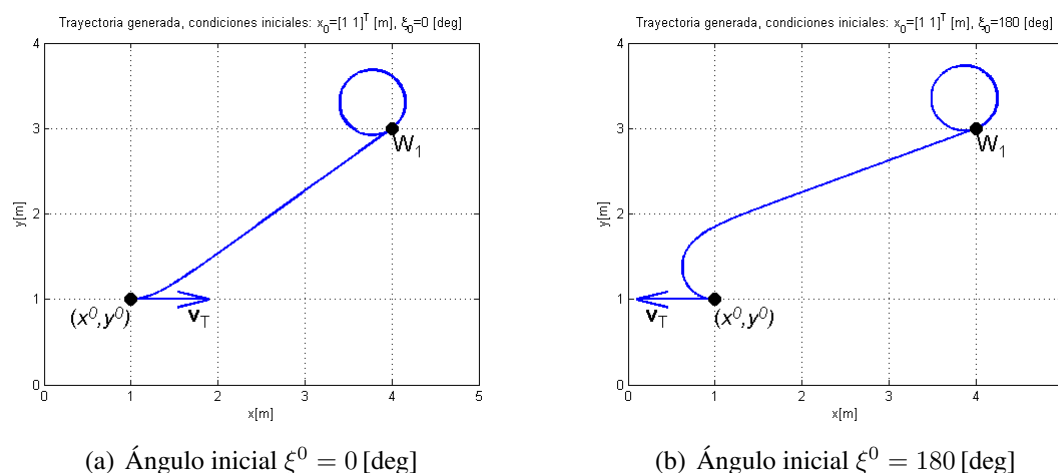


Figura 6: Trayectorias óptimas generadas para distintos valores de  $\xi$

óptima resultante para el caso en que el vehículo se encuentra inicialmente en  $\mathbf{x}^0 = [1, 1]^T$  [m] con un ángulo inicial  $\xi^0 = 0$  [deg]. Como la dirección inicial del vector velocidad  $\mathbf{v}_T$  es hacia el Este, puede observarse en la Fig. 6(a) que la trayectoria inicia su movimiento en esa dirección. En las Fig. 6(b) el vector velocidad  $\mathbf{v}_T$  apunta hacia el Oeste, dando como resultado una trayectoria que inicia su movimiento en esa dirección. Debe destacarse que las trayectorias óptimas resultantes tienen en cuenta tanto la dinámica del vehículo reducido como las restricciones en la variación del ángulo  $\xi$ . Puede verse además que, en ambos casos, a pesar que la condición inicial  $\xi^0$  es distinta, las trayectorias generadas alcanzan el *waypoint*  $\mathbf{W}_1$  y luego describen una circunferencia de radio constante que intersecta dicho valor.

En la Fig. 7 se puede observar la trayectoria óptima que se obtiene teniendo en cuenta la posición inicial del vehículo reducido  $\mathbf{x}^0 = [0, 0]^T$  [m], el ángulo inicial  $\xi^0 = 230$  [deg] y cuatro *waypoints* ( $\mathbf{W}_1$  a  $\mathbf{W}_4$ ). En este caso, la trayectoria resultante se obtiene mediante la concatenación de 4 trayectorias parciales: 1) Entre  $\mathbf{x}^0$  y  $\mathbf{W}_1$ , 2) Entre  $\mathbf{W}_1$  y  $\mathbf{W}_2$ , 3) Entre  $\mathbf{W}_2$  y  $\mathbf{W}_3$  y 4) Entre  $\mathbf{W}_3$  y  $\mathbf{W}_4$ . Como puede observarse en la Fig. 7, en cada trayectoria parcial la dinámica del vehículo reducido es tenida en cuenta, dando como resultado una ruta óptima que intersecta los puntos de paso  $\mathbf{W}_i$  y que al alcanzar el último *waypoint*, describe una circunferencia de radio constante intersectando dicho *waypoint*.

Una de las ventajas de la utilización del método propuesto consiste en que se trata de un algoritmo *online*, es decir, las entradas de control se computan en tiempo de ejecución, lo cual permite la corrección de posibles desviaciones en estados y entradas.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un método *online* para la generación de trayectorias óptimas. Se trabajó con un modelo no lineal, reducido de un vehículo tipo partícula que, al ser utilizado en el algoritmo INL-MPC, proporciona las coordenadas  $(x, y)$  que determinan la ruta o trayectoria

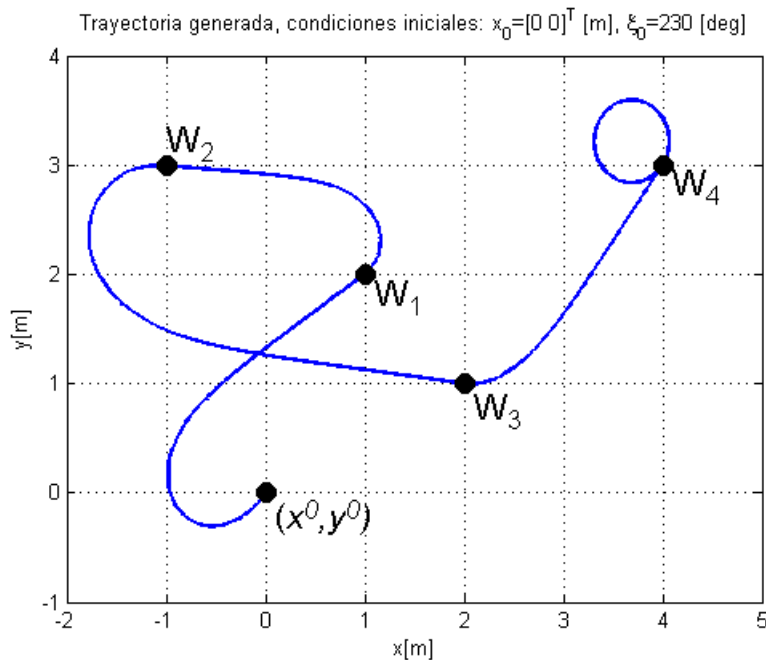


Figura 7: Trayectoria óptima generada con cuatro *waypoints*

deseada. La función de costo utilizada en el algoritmo INL-MPC minimiza la distancia entre la posición actual del vehículo reducido y las coordenadas de los *waypoints*, por lo tanto la trayectoria óptima resultante es aquella que, considerando la dinámica del vehículo, brinda el camino más corto. El desempeño del método propuesto se demostró mediante la generación de tres trayectorias utilizando uno o más *waypoints* y diferentes condiciones iniciales. En todos los casos los resultados fueron satisfactorios dando origen a tres trayectorias óptimas que alcanzan el *waypoint* final. Es importante destacar que al tratarse de un método de generación de trayectorias óptimas *online*, las trayectorias generadas son actualizadas instante a instante, permitiendo ajustar en todo momento la posición y el ángulo de orientación del vehículo.

## REFERENCIAS

- Adams S.M., Levitan M.L., y Friedland C.J. High resolution imagery collection utilizing unmanned aerial vehicles (uavs) for post-disaster studies. *Bridges*, 10:9780784412626–067, 2014.
- Arney T. Dynamic path planning and execution using b-splines. En *Information and Automation for Sustainability, 2007. ICIAFS 2007. Third International Conference on*, páginas 1–6. IEEE, 2007.
- Doherty P. y Rudol P. A uav search and rescue scenario with human body detection and geolocalization. En *AI 2007: Advances in Artificial Intelligence*, páginas 1–13. Springer, 2007.
- Egerstedt M. y Martin C.F. Optimal trajectory planning and smoothing splines. *Automatica*, 37(7):1057–1064, 2001.
- Jones D. Power line inspection-a uav concept. En *Autonomous Systems, 2005. The IEE Forum on (Ref. No. 2005/11271)*, páginas 8–pp. IET, 2005.
- Maciejowski J.M. *Predictive control: with constraints*. Pearson education, 2002.
- Murillo M., Limache A., Rojas Fredini P., y Giovanini L. Generalized nonlinear optimal predictive control using iterative state-space trajectories: Applications to autonomous flight of

uavs. in review.

- Richter C., Bry A., y Roy N. Polynomial trajectory planning for quadrotor flight. En *International Conference on Robotics and Automation*. 2013.
- Slegers N., Kyle J., y Costello M. Nonlinear model predictive control technique for unmanned air vehicles. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 29(5):1179–1188, 2006.
- Stevens B.L. y Lewis F.L. *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons Inc., 2003.
- Valavanis K.P., Oh P.Y., y Piegl L.A. *Unmanned Aircraft Systems: International Symposium On Unmanned Aerial Vehicles, UAV 08*. Springer, 2008.
- Valavanis K.P. y Valavanis K.P. *Advances in unmanned aerial vehicles: state of the art and the road to autonomy*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
- Zhang C. y Kovacs J.M. The application of small unmanned aerial systems for precision agriculture: a review. *Precision agriculture*, 13(6):693–712, 2012.