

## ANÁLISIS DINÁMICO DE MICRO-VIGAS TIMOSHENKO MEDIANTE LA TEORÍA ELÁSTICA DEL PRIMER GRADIENTE DE DEFORMACIÓN Y EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Daniel H. Felix<sup>a</sup>, Graciela I. Guerrero<sup>a,b</sup> y Diana V. Bambill<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dhfelix@uns.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Km 4, 9005, Comodoro Rivadavia, Argentina, graisague@hotmail.es; <http://www.unp.edu.ar>*

<sup>c</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dbambill@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

**Palabras Clave:** Timoshenko, microvigas, frecuencias, gradiente, elementos finitos.

**Resumen.** El uso, a escala industrial, de sistemas electromecánicos de dimensiones del orden de micrómetros o inclusive de nanómetros es, en la actualidad, continuo y creciente. Tales dispositivos son frecuentemente identificados por su sigla en inglés, como MEMS y NEMS respectivamente. Debido a sus dimensiones tan reducidas, algunos elementos que lo componen, tales como actuadores y sensores, requieren ser modelados como microvigas, con el fin de tener en cuenta los efectos de escala del material, que como se verá en el trabajo, resultan ser muy significativos. En el presente estudio se realiza un análisis numérico de su comportamiento dinámico mediante un modelo de microviga Timoshenko, que tiene en cuenta, efecto Poisson, deformación por corte, inercia rotatoria, y lo que resulta más significativo aquí, la incorporación de tres parámetros adicionales respecto de la teoría de elasticidad clásica, que contemplan los efectos de escala del material. Para tal propósito se utiliza la teoría del Primer Gradiente de Deformación que muestra ser en este caso, mediante confirmación experimental de otros autores, más precisa que la teoría de elasticidad clásica. La resolución de los modelos propuestos, se realiza mediante una aplicación en elementos finitos realizada por los autores y basada en un elemento recientemente desarrollado por Bo Zhang y sus colaboradores, (B. Zhang et al., Finite Elem. Anal. Des. 79:22-39(2014).

## 1. INTRODUCCIÓN

Las primeras investigaciones en micro-estructuras que cuentan con registros bibliográficos de difusión internacional, fueron realizadas por los hermanos Cosserat a principios del siglo pasado [Cosserat y Cosserat \(2009\)](#). En sus trabajos desarrollaron la teoría del medio continuo generalizado.

La teoría del medio continuo generalizado, presenta como característica principal el hecho de tener en cuenta el tamaño mínimo de partícula que tiene todo material real. En su desarrollo, incluye componentes de deformación y de tensión que no son tenidas en cuenta en la teoría del medio continuo clásico. En consecuencia requiere, en las ecuaciones constitutivas adicionales que contiene, un cierto número de nuevas constantes, que caracterizan la propiedad mencionada y que se denominan parámetros de escala de longitud del material.

Estas constantes adicionales, al igual que las clásicas, deben ser determinadas por medio de mediciones indirectas en ensayos experimentales y dicha tarea, resulta en general más compleja, cuanto mayor es el número de parámetros de escala de longitud presentes.

Las primeras versiones de la teoría del medio continuo generalizado eran técnicamente correctas pero resultaban muy poco prácticas, debido al gran número de constantes adicionales que contenían. Por esta razón, uno de los objetivos principales de las teorías subsiguientes, fue disminuir el número de dichas constantes.

Los trabajos posteriores al de los hermanos Cosserat, que cobraron relevancia, aparecieron varias décadas después, con el desarrollo del modelo cinemático que planteó Mindlin, [Mindlin \(1964\)](#); [Mindlin y Eshel \(1968\)](#), quien incorporó el concepto de micro-estructura.

Sobre la base de dichos trabajos, surgieron entre otras, la teoría del primer gradiente de deformación, [Mindlin \(1965\)](#); [Lam et al. \(2003\)](#); [Kong et al. \(2009\)](#) y la teoría de la tensión de par, [Yang et al. \(2002\)](#), que incorpora solo dos constantes adicionales a las dos clásicas de Lamé. Posteriormente una variante de la teoría de tensión de par, mediante una ecuación de equilibrio complementaria, permitió plantear el problema con una única constante adicional, [Ma et al. \(2008\)](#), facilitando así su implementación.

Igualmente destacables han sido las contribuciones de Eringen, quien entre otras investigaciones, desarrolló la teoría basada en el micromorfismo, [Eringen y Suhubi \(1964\)](#), la teoría micropolar, [Eringen \(1966\)](#) y la teoría de elasticidad no local, [Eringen \(2001\)](#); [Ghannadpour y Fazilati \(2013\)](#); [Arash y Wang \(2014\)](#).

Sumado al problema del número de constantes adicionales presentes, se encontraba el hecho de que existía muy poca o casi nula demanda de aplicación de las teorías microestructurales, ya que, como se verá más adelante, solo se justifican cuando las dimensiones de la estructura en estudio son del orden de dichas constantes.

De este modo, las teorías micro-estructurales comenzaron a tener un significativo interés práctico recién en los últimos años, con la aparición en el mercado industrial de los sistemas micro-electro-mecánicos y luego los nano-electro-mecánicos conocidos como MEMs y NEMs, (sus respectivas siglas en inglés). La razón es que, en estos casos, el tamaño mínimo de partícula del material utilizado en la fabricación de los microcomponentes hace que no sea posible utilizar con precisión adecuada las teorías derivadas del medio continuo clásico.

Un aspecto importante a destacar de las teorías que tienen en cuenta el tamaño mínimo de partícula, es que también tienen un potencial campo de aplicación en estructuras de escala clásica, cuando los materiales involucrados son altamente heterogéneos. Esto es debido a que si bien la estructura tiene mayores dimensiones, lo mismo ocurre con el tamaño mínimo de partículas que definen las constantes de escala del material. Un ejemplo importante de este caso

lo constituye el estudio y modelización de suelos granulares, [di Prisco et al. \(2002\)](#).

En el caso de micro-vigas, se publicaron numerosos trabajos que tienen en cuenta la dependencia de las propiedades mecánicas del material con la dimensiones del componente construido, [Kong et al. \(2008\)](#); [Asghari et al. \(2010\)](#). En particular, se destaca, la teoría modificada de la tensión de par, [Ma et al. \(2008\)](#); [Guerrero et al. \(2015\)](#) y la teoría del segundo gradiente de desplazamiento, conocida como SGT (sigla en inglés de "second gradient theory"), que cuenta con la contribución de Lam y coautores, [Lam et al. \(2003\)](#) y más recientemente el trabajo de Zhang y colaboradores, [Zhang et al. \(2014\)](#), quienes desarrollaron un elemento de viga Timoshenko para aplicar a microvigas. En el presente trabajo se utiliza dicho elemento, en un algoritmo de elementos finitos desarrollado por los autores.

A diferencia de la teoría de la tensión de par, la teoría del segundo gradiente utiliza 3 parámetros de escala de longitud del material como constantes adicionales a las dos clásicas de Lamé, permitiendo así una evaluación más precisa de la rigidez de la microviga o bien de su energía de deformación.

Como consecuencia, se obtienen con su aplicación, mejores valores de los coeficientes de frecuencia naturales de la microviga. Esta mejora en los valores obtenidos resulta especialmente significativa cuando la altura o espesor de la microviga es del orden de dichas constantes.

También se destacan los aportes de Wang y coautores, [Wang et al. \(2013\)](#) en el campo de comportamiento no lineal. Actualmente, debido al gran interés tecnológico en esta disciplina, se advierte no solo un incremento muy significativo en los trabajos de investigación, sino también, en la cantidad de revistas científicas especializadas en micro y nano estructuras.

## 2. TEORÍA DEL SEGUNDO GRADIENTE DE DESPLAZAMIENTO

La teoría del segundo gradiente se basa en tener en cuenta la influencia en la rigidez estructural, de las componentes de tensión de segundo orden y las componentes de deformación originadas por el segundo gradiente de los desplazamientos. Como consecuencia de dicha consideración, resultan 4 grupos de tensiones y deformaciones: Las componentes clásicas o de primer orden, las tensiones de par o de cupla, las componentes de tensión de dilatación de segundo orden y las componentes del tensor desviador de segundo orden.

Si consideráramos una porción extremadamente pequeña de un material dado, observaríamos que el mismo nunca resulta perfectamente homogéneo o infinitamente continuo y que siempre existe un tamaño mínimo de partículas que lo caracteriza. Dicha propiedad se cuantifica a través de mediciones indirectas, realizadas por medio de ensayos experimentales, que permiten establecer para un material dado, un conjunto de valores que se definen como parámetros de escala de longitud del material.

Habitualmente los componentes estructurales tienen dimensiones mucho mayores que las dadas por estos parámetros y entonces, no resulta necesario tenerlos en cuenta en el desarrollo de las diferentes teorías que tratan con el comportamiento estático y dinámico de los mismos.

Sin embargo, si el material resulta muy heterogéneo con tamaños de partículas muy grandes o bien si el componente estructural es extremadamente pequeño, como en el caso de los que integran los micro y nano dispositivos, los parámetros de escala de longitud mencionados deben tenerse en cuenta en el cálculo estructural tanto estático como dinámico, si se desea tener resultados de precisión adecuada.

Si bien las teorías del primer gradiente de deformaciones y la del segundo gradiente de desplazamientos son levemente diferentes, luego de la evolución y simplificación de ambas, se converge actualmente a las mismas expresiones de las componentes de deformación de orden superior utilizadas en el cálculo. Frecuentemente nos referiremos a la teoría del segundo gra-

diente, identificándola en la forma habitualmente utilizada en la literatura, mediante su sigla en inglés, SGT ("second gradient theory").

Las constantes adicionales de escala mencionada, que parecen en la teoría del segundo gradiente, se denominan  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_0$ . Como se verá más adelante, cada una de dichas constantes aparecerá en las ecuaciones constitutivas de cada tipo de tensiones y deformaciones de orden superior involucradas.

## 2.1. Hipótesis cinemáticas

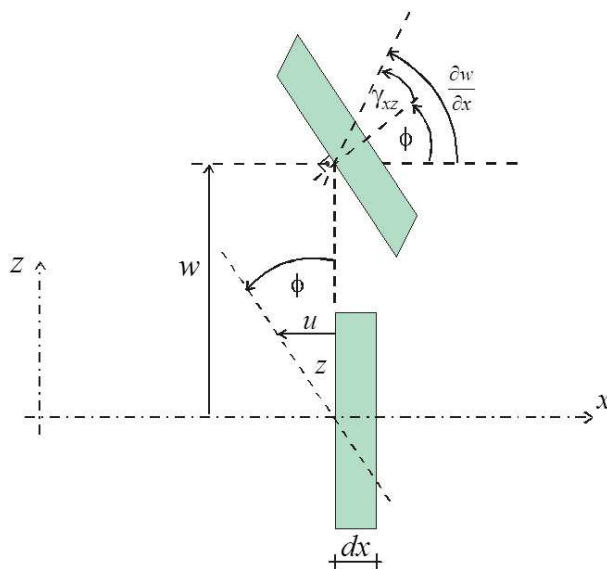


Figura 1: Cinemática del modelo de viga Timoshenko

La Figura 1 muestra esquemáticamente las hipótesis cinemáticas de una viga Timoshenko considerada inextensible. Cuando se utiliza la teoría de vigas Timoshenko inextensible en una microviga, se consideran las mismas hipótesis cinemáticas para los desplazamientos que en el caso de la teoría clásica. Para las variables cinemáticas primarias se tiene:

$$\varphi = \varphi(x) \quad (1a)$$

$$w = w(x) \quad (1b)$$

en la que  $\varphi$  es el giro de la sección transversal de la microviga y  $w$  su desplazamiento transversal. Si se desprecian las deformaciones axiales del eje neutro resulta:

$$u(x, z) = -z \varphi(x) \quad (2)$$

por otra parte, las deformaciones ocurren sobre planos verticales, paralelos al eje neutro, con lo cual no se tienen desplazamientos laterales, es decir:

$$v = 0 \quad (3)$$

Cuando un material elástico se deforma, de acuerdo a la teoría del segundo gradiente, intervinen cuatro grupos de tensiones y deformaciones, las cuales analizaremos a continuación.

## 2.2. Deformaciones y tensiones clásicas

El primer grupo de deformaciones y tensiones corresponde al primer gradiente de desplazamientos y se obtiene con las ecuaciones cinemáticas clásicas de la teoría de la elasticidad. Se tiene entonces:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Desarrollando la ec. (4) se obtienen las siguientes componentes de deformación no nulas:

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5a)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (5b)$$

Las relaciones constitutivas entre tensiones y deformaciones de primer orden, en materiales isotrópos, vienen dadas por las ecuaciones de Lamé, que pueden expresarse en la forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (6)$$

en las que  $\lambda$  y  $\mu$ , son las conocidas constantes elásticas de Lamé.

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7)$$

Con ayuda de las ecs. (5), se obtienen las componentes de tensión no nulas:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{xx} = -(\lambda + 2\mu) z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (8a)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \lambda \epsilon_{xx} = -\lambda z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (8b)$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu \epsilon_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (8c)$$

Las componentes de tensión normales  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$  aparecen al considerar el efecto Poisson,

## 2.3. Componentes del gradiente de rotación

El segundo grupo lo constituye la parte simétrica del gradiente de rotación, (de allí el supra-índice (s)). Las componentes de curvatura se obtienen por medio de la expresión:

$$\chi_{ij}^{(s)} = \frac{1}{4} \left( e_{ipq} \frac{\partial \epsilon_{qj}}{\partial x_p} + e_{jprq} \frac{\partial \epsilon_{qi}}{\partial x_p} \right) \quad (9)$$

siendo las únicas componentes de curvatura no nulas, las siguientes:

$$\chi_{xy}^{(s)} = \chi_{yx}^{(s)} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Las correspondientes relaciones constitutivas permiten establecer las denominadas tensiones de cupla, cuya forma genérica es:

$$m_{ij}^{(s)} = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^{(s)} \quad (11)$$

siendo  $l_2$  uno de los parámetros de escala de longitud del material. Al expandir la ec. (11) Las componentes de cupla no nulas resultan:

$$m_{xy}^{(s)} = m_{yx}^{(s)} = 2\mu l_2^2 \chi_{xy}^{(s)} = 2\mu l_2^2 \chi_{yx}^{(s)} = -\frac{1}{2} \mu l_2^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (12)$$

## 2.4. Componentes del gradiente de dilatación

El tercer grupo está dado por las componentes del tensor gradiente de dilatación, que son también de orden superior y resultan uniformes en todas las direcciones. Se obtienen a partir de las componentes de deformación de primer orden con la siguiente expresión:

$$\gamma_i = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x_i} \quad (13)$$

con  $x_i$  representando a  $x, y, z$  según sea  $i = 1, 2, 3$  respectivamente. Las componentes cinemáticas del tensor gradiente de dilatación no nulas para el modelo de microviga Timoshenko se obtienen al reemplazar la expresión (5.a) en la ecuación (13):

$$\gamma_x = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (14a)$$

$$\gamma_z = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (14b)$$

Las correspondientes relaciones constitutivas están dadas por:

$$p_i = 2 \mu l_0^2 \gamma_i \quad (15)$$

siendo  $l_0$ , el parámetro de escala de longitud interviniente en este caso. Las componentes no nulas del tensor de tensiones de dilatación, que se obtienen al expandir la ec. (15) resultan:

$$p_x = 2 \mu l_0^2 \gamma_x = -2 \mu l_0^2 z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (16a)$$

$$p_z = 2 \mu l_0^2 \gamma_z = -2 \mu l_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (16b)$$

## 2.5. Componentes desviadoras de orden superior

El cuarto grupo lo constituyen, las componentes de deformación del tensor desviador de orden superior, que vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{ijk}^{(s)} - \frac{1}{5} \left( \delta_{ij} \eta_{mmk}^{(s)} + \delta_{jk} \eta_{mmi}^{(s)} + \delta_{ik} \eta_{mmm}^{(s)} \right) \quad (17)$$

en donde  $\delta_{ij}$  o bien  $\delta_{jk}$  es el operador de Kronecker. Las componentes  $\eta_{ijk}^{(s)}$ , constituyen la parte simétrica del tensor desviador de orden superior y se expresan en la forma:

$$\eta_{ijk}^{(s)} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right) \quad (18)$$

Si se desarrolla la expresión (17) con las ecuaciones cinemáticas (1-3) se obtienen las componentes de deformación no nulas, las cuales resultan:

$$\eta_{xxx}^{(1)} = -\frac{2}{5} z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (19a)$$

$$\eta_{zxx}^{(1)} = \eta_{zxx}^{(1)} = \eta_{xxz}^{(1)} = \frac{4}{15} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (19b)$$

$$\eta_{yyx}^{(1)} = \eta_{zzx}^{(1)} = \eta_{xyy}^{(1)} = \eta_{yxy}^{(1)} = \eta_{xzz}^{(1)} = \eta_{zxx}^{(1)} = \frac{1}{5} z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (19c)$$

$$\eta_{yzy}^{(1)} = \eta_{zyy}^{(1)} = \eta_{yyz}^{(1)} = -\frac{1}{15} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (19d)$$

$$\eta_{zzz}^{(1)} = -\frac{1}{5} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (19e)$$

Las relaciones constitutivas entre las componentes de tensión de orden superior, correspondientes al tensor desviador,  $\tau_{ijk}^{(1)}$  y las componentes del tensor desviador de deformaciones, de orden superior,  $\eta_{ijk}^{(1)}$ , vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2 \mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (20)$$

Puede apreciarse que en la ec. (20) interviene el parámetro de longitud de escala del material  $l_1$ . Resulta claro que al ser  $l_1$  un valor extremadamente pequeño, la influencia de las componentes dadas solo es significativa frente a las tensiones clásicas cuando el espesor de la viga es del orden de dicho parámetro.

Desarrollando la ec. (20) se obtienen las componentes no nulas del tensor desviador de orden superior, para una microviga Timoshenko. Las mismas resultan:

$$\tau_{xxx}^{(1)} = -\frac{4}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (21a)$$

$$\tau_{xxz}^{(1)} = \tau_{zxx}^{(1)} = \tau_{xzx}^{(1)} = \frac{8}{15} \mu l_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (21b)$$

$$\tau_{yyx}^{(1)} = \tau_{zzx}^{(1)} = \tau_{xyy}^{(1)} = \tau_{yxy}^{(1)} = \tau_{xzz}^{(1)} = \tau_{zxx}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (21c)$$

$$\tau_{yzy}^{(1)} = \tau_{zyy}^{(1)} = \tau_{yyz}^{(1)} = -\frac{2}{15} \mu l_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (21d)$$

$$\tau_{zzz}^{(1)} = -\frac{2}{5} \mu l_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (21e)$$

### 3. ECUACIONES GOBERNANTES

Por tratarse de vibraciones libres, no se tienen fuerzas exteriores y entonces el principio de Hamilton establece en este caso:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (22)$$

siendo  $U$ , la energía de deformación y  $T$ , la energía cinética, cuando la microviga se encuentra vibrando libremente. La variación de la energía de deformación de la microviga, en función de las tensiones y deformaciones, es función de los cuatro grupos de tensiones y deformaciones vistos y se expresa en la siguiente forma general:

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^{(S)} \delta \chi_{ij}^{(S)}) dA dx \quad (23)$$

mientras que la variación de la energía cinética en función de los desplazamientos se expresa en la siguiente forma:

$$\delta T = \rho \int_0^L \left[ A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w + I_y \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \delta \varphi \right] dx \quad (24)$$

Luego de reemplazar en la ec. (23) las componentes no nulas de tensiones y deformaciones, vistas en la sección anterior e integrando por partes, se obtienen las ecuaciones de movimiento

en término de los desplazamientos. Considerando que la ec. (22) debe satisfacerse para todo conjunto arbitrario de desplazamientos virtuales  $\{\delta w, \delta \varphi\}$ , las mismas resultan:

$$\alpha_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \alpha_3 \varphi + \alpha_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial x} = -\rho I_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (25a)$$

$$-\alpha_4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (25b)$$

en las que las  $\alpha_i$  son constantes que tienen en cuenta las propiedades mecánicas y geométricas de la microviga. Dichas constantes se definen en la siguiente forma:

$$\alpha_1 = \mu I_y \left( \frac{4}{5} l_1^2 + 2 l_0^2 \right) \quad (26a)$$

$$\alpha_2 = \left[ \mu A \left( \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2 l_0^2 \right) + I_y (\lambda + 2 \mu) \right] \quad (26b)$$

$$\alpha_3 = \mu A \kappa \quad (26c)$$

$$\alpha_4 = \mu A \left( \frac{16}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \quad (26d)$$

$$\alpha_5 = \mu A \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{8}{15} l_1^2 \right) \quad (26e)$$

Claramente, la solución directa de dicho sistema requiere además, conocer tanto las condiciones de borde esenciales como las naturales, pero este no es el objetivo de nuestro estudio.

Se puede observar que, como caso particular, al suprimir la incidencia de los parámetros de escala de longitud del material en las ecuaciones de movimiento (25), es decir haciendo  $l_2 = l_1 = l_0 = 0$ , se obtienen las respectivas ecuaciones de movimiento que brinda la teoría clásica,

$$-I_y (\lambda + 2 \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu A \kappa \varphi - \mu A \kappa \frac{\partial w}{\partial x} = -\rho I_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (27a)$$

$$\mu A \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu A \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (27b)$$

La comparación entre el sistema de ecuaciones (25) y el sistema de ecuaciones (27) muestra la consistencia entre ambas teorías.

La forma débil del sistema de ecuaciones (25), puede obtenerse aplicando el principio de los trabajos virtuales. Resulta entonces:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[ \alpha_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} - \left( \alpha_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} - \alpha_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \delta \varphi \right. \\ & \left. + \left( \alpha_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \alpha_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right] dx \\ & + \int_0^L \left[ \rho I_y \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \delta \varphi + \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

La ecuación integral (28) incluye implícitamente las condiciones de borde naturales de la microviga.



#### 4. RESOLUCIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

Para el análisis numérico de los efectos de la microestructura en las frecuencias naturales de vibración transversal de la microviga, se implementa un elemento recientemente presentado por Zhang et al. (2014), en un algoritmo de elementos finitos desarrollado por los autores, para el caso particular en que no se considera la deformación del eje neutro de la microviga.

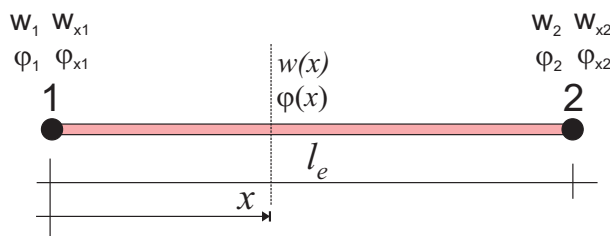


Figura 2: Elemento de microviga utilizado en el algoritmo de elementos finitos

##### 4.1. Características del elemento utilizado

El elemento elegido se muestra esquemáticamente en la Figura 2. Puede considerarse como una ampliación del elemento clásico (de 2 nodos con 2 grados de libertad por nodo), ya que se trata de un elemento de microviga Timoshenko de 2 nodos con 4 grados de libertad por nodo.

Los grados de libertad adicionales se deben a la necesidad de garantizar la continuidad tanto en  $C_0$  como en  $C_1$  del campo de desplazamientos a resolver, a diferencia del elemento clásico, que solo requieren continuidad en  $C_0$ .

Este requisito adicional se debe a que el sistema de ecuaciones diferenciales ahora es de cuarto orden, como muestran las ecs. (25), en comparación con el sistema clásico, ecs (27), que es de segundo orden.

Los 8 grados de libertad del elemento (4 por cada nodo), propuestos por Zhang y sus colaboradores están formados por los desplazamientos transversales de los dos nodos y su primera derivada,  $w_1, w_2, w_{x1}, w_{x2}$ , y por los giros de sus nodos y su primera derivada,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{x1}, \varphi_{x2}$ .

##### 4.2. Funciones de interpolación

El vector de desplazamientos nodales del elemento elegido es entonces:

$$\{U_e\} = \{w_1, w_{x1}, \varphi_1, \varphi_{x1}, w_2, w_{x2}, \varphi_2, \varphi_{x2}\}^t \quad (29)$$

La cantidad de grados de libertad que tiene el elemento, permite utilizar polinomios de tercer grado para determinar las funciones de forma o de interpolación de los desplazamientos y giros nodales. Los desplazamientos transversales y giros en el interior del elemento se expresan entonces en la forma:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (30a)$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (30b)$$

Como las expresiones anteriores se deben satisfacer en los propios nodos se tiene:

$$w(0) = a_0 = w_1 \quad (31a)$$

$$w_x(0) = a_1 = w_{x1} \quad (31b)$$

$$w(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = w_2 \quad (31c)$$

$$w_x(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = w_{x2} \quad (31d)$$

y de un modo similar se alcanza:

$$\varphi(0) = b_0 = \varphi_1 \quad (32a)$$

$$\varphi_x(0) = b_1 = \varphi_{x1} \quad (32b)$$

$$\varphi(1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = \varphi_2 \quad (32c)$$

$$\varphi_x(1) = b_1 + 2b_2 + 3b_3 = \varphi_{x2} \quad (32d)$$

Resolviendo las ecs. (31) y las ecs. (32) y estableciendo la variable de posición adimensional  $\xi = x/l_e$ , se obtienen las funciones de interpolación buscadas, las cuales resultan:

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (33a)$$

$$N_2(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) l_e \quad (33b)$$

$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (33c)$$

$$N_4(\xi) = (\xi^3 - \xi^2) l_e \quad (33d)$$

Los desplazamientos y giros pueden expresarse ahora en la forma:

$$w(\xi) = N_1(\xi) w_1 + N_2(\xi) w_{x1} + N_3(\xi) w_3 + N_4(\xi) w_{x2} \quad (34a)$$

$$\varphi(\xi) = N_1(\xi) \varphi_1 + N_2(\xi) \varphi_{x1} + N_3(\xi) \varphi_3 + N_4(\xi) \varphi_{x2} \quad (34b)$$

o más convenientemente en la forma:

$$w(\xi) = [N_w] \{U_e\} \quad (35a)$$

$$\varphi(\xi) = [N_\varphi] \{U_e\} \quad (35b)$$

siendo:

$$[N_w] = [N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi), 0, 0] \quad (36a)$$

$$[N_\varphi] = [0, 0, N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi)] \quad (36b)$$

En la ecuación gobernante (28), intervienen también las derivadas primera y segunda de los desplazamientos, con lo cual se requieren las correspondientes expresiones de la formulación de elementos finitos. Al derivar las funciones interpoladas del desplazamiento y del giro (35) se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \{U_e\} \quad (37a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \{U_e\} \quad (37b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \{U_e\} \quad (37c)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \{U_e\} \quad (37d)$$

mientras que, para la primera variación de las mismas se obtiene:

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial \delta w}{\partial \xi} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \{\delta U_e\} \quad (38a)$$

$$\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \xi^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \{\delta U_e\} \quad (38b)$$

$$\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{l_e} \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \{\delta U_e\} \quad (38c)$$

$$\frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{l_e^2} \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \{\delta U_e\} \quad (38d)$$

Si se aproximan las funciones de desplazamiento y giro mediante las funciones de interpolación vistas, la forma débil (28) de las ecuaciones gobernantes resultan en la siguiente expresión:

$$\sum_{e=1}^n \{\delta U_e\}_{ij} ([k_e]_{ij} - \omega^2 [m_e]_{ij}) \{U_e\}_{ij} = 0 \quad (39)$$

en donde, los subíndices  $ij$  indican que los vectores y matrices están expandidos a sus dimensiones globales. Además, por ser los desplazamientos virtuales arbitrarios, debe satisfacerse:

$$\sum_{e=1}^n ([k_e]_{ij} - \omega^2 [m_e]_{ij}) \{U_e\}_{ij} = 0 \quad (40)$$

y aplicando la propiedad distributiva a la sumatoria se tiene:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{U_e\}_{ij} = 0 \quad (41)$$

siendo:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [k_e]_{ij} = \text{Ensamblado}([k_e]) \quad (42a)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^n [m_e]_{ij} = \text{Ensamblado}([m_e]) \quad (42b)$$

En la expresión (42.a),  $[K]$ , es la matriz de rigidez global de la microviga y  $[k_e]$  es la matriz de rigidez del elemento. Como lo indica la expresión (42.a), la matriz de rigidez global se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de los elementos.

Por otra parte, en la expresión (42.b),  $[M]$ , es la matriz de masa global y  $[m_e]$  es la correspondiente matriz de masa del elemento. Como lo indica la expresión (42.b), la matriz de masa global se obtiene ensamblando las matrices de masa de los elementos.

Las expresiones de  $[k_e]$  y  $[m_e]$ , se obtienen a partir de la ecs. (28 a 38), integrando localmente

en el dominio de dicho elemento. Esto es:

$$\begin{aligned}
 [k_e] = & \frac{\alpha_1}{l_e^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right) d\xi - \frac{\alpha_4}{l_e^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\
 & + \frac{\alpha_2}{l_e} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi - \alpha_3 \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^t ([N_\varphi]) d\xi \\
 & + \alpha_3 l_e \int_0^1 ([N_\varphi])^t ([N_\varphi]) d\xi + \frac{\alpha_5}{l_e^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi \\
 & - \frac{\alpha_4}{l_e^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi + \frac{\alpha_3}{l_e} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\
 & - \alpha_3 \int_0^1 ([N_\varphi])^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$[m_e] = \rho l_e \left[ I_y \int_0^1 ([N_\varphi])^t ([N_\varphi]) d\xi + A \int_0^1 ([N_w])^t ([N_w]) d\xi \right] \tag{44}$$

Finalmente, una solución no trivial del sistema (41), requiere que el determinante de los coeficientes sea nulo, con lo cual surge la siguiente ecuación característica:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \tag{45}$$

La ec. (45), permite obtener los autovalores o coeficientes de frecuencia natural de la microviga.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

La implementación numérica del algoritmo desarrollado se aplicó en un modelo de microviga Timoshenko, para las condiciones de borde: Articulado-Articulado, Empotrado-Articulado, Empotrado-empotrado y Empotrado-libre. En cada caso se realizó en primer lugar, un análisis de convergencia de los valores del coeficiente de frecuencia fundamental en función del número de elementos y para diferentes relaciones  $h/l$ .

Una vez determinado el número apropiado de elementos para utilizar en el algoritmo de elementos finitos implementado, se obtuvieron los valores de los primeros tres coeficientes de frecuencia, tanto mediante la SGT como con la MCST. Por otra parte, los valores correspondientes a la teoría clásica se obtuvieron como condición límite de la relación  $h/l$ , es decir cuando  $h/l \rightarrow \infty$ .

En la Tabla 1 se observa la convergencia de los valores del coeficiente de frecuencia fundamental de una microviga, articulada en ambos extremos, cuya esbeltez viene dada por la relación  $L/h = 10$ , para  $\kappa \rightarrow \infty$ , mientras que el análisis de convergencia de la Tabla 2 corresponde a  $\kappa = 5/6$ .

En ambas tablas, se aprecia que en general la velocidad de convergencia es alta y que dicha velocidad se incrementa, conforme aumenta el parámetro adimensional  $h/l$ , es decir conforme se reduce la influencia de la microestructura.

En la Tabla 3 se observa la convergencia de los valores del coeficiente de frecuencia fundamental de una microviga, de relación  $L/h = 10$ , tipo cantilever, para  $\kappa \rightarrow \infty$  y en la Tabla 4 la correspondiente a  $\kappa = 5/6$ . Puede apreciarse en todos los casos que a partir de una malla de

elementos	h/l						
	1	2	3	5	8	12	TC
5	40.9262	23.5465	18.6260	15.5137	14.2917	13.8304	13.4500
10	40.9172	23.5422	18.6231	15.5117	14.2900	13.8289	13.4485
15	40.9149	23.5412	18.6226	15.5115	14.2899	13.8288	13.4485
20	40.9137	23.5408	18.6223	15.5114	14.2899	13.8287	13.4484
30	40.9127	23.5403	18.6221	15.5113	14.2898	13.8287	13.4484
40	40.9124	23.5401	18.6219	15.5112	14.2898	13.8287	13.4484

Tabla 1: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , en una microviga Timoshenko Art-Art,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 10^5$ .

elementos	h/l						
	1	2	3	5	8	12	TC
5	34.1785	21.9310	17.7876	15.0181	13.9014	13.4759	13.1234
10	34.1761	21.9297	17.7868	15.0176	13.9012	13.4757	13.1232
15	34.1756	21.9294	17.7866	15.0175	13.9011	13.4757	13.1232
20	34.1755	21.9293	17.7866	15.0175	13.9011	13.4757	13.1232
30	34.1755	21.9293	17.7865	15.0175	13.9011	13.4757	13.1232

Tabla 2: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , en una microviga Timoshenko Art-Art,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

elementos	h/l						
	1	2	3	5	8	12	TC
5	14.5882	8.3961	6.6437	5.5357	5.1008	4.9367	4.9367
10	14.5877	8.3959	6.6435	5.5356	5.1008	4.9367	4.9367
15	14.5875	8.3958	6.6435	5.5356	5.1008	4.9367	4.9367
20	14.5874	8.3958	6.6435	5.5356	5.1008	4.9367	4.9367
30	14.5874	8.3957	6.6435	5.5356	5.1008	4.9367	4.9367
40	14.5873	8.3957	6.6435	5.5356	5.1007	4.9367	4.9367

Tabla 3: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , en una microviga Timoshenko Emp-Lib,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 10^5$ .

elementos	h/l						
	1	2	3	5	8	12	TC
5	13.2156	8.1064	6.4971	5.4499	5.0335	4.8756	4.7450
10	13.2153	8.1063	6.4970	5.4499	5.0334	4.8755	4.7450
15	13.2153	8.1062	6.4970	5.4499	5.0334	4.8755	4.7450
20	13.2152	8.1062	6.4970	5.4499	5.0334	4.8755	4.7450
30	13.2152	8.1062	6.4970	5.4499	5.0334	4.8755	4.7450

Tabla 4: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , en una microviga Timoshenko Emp-Lib,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

20 elementos se estabiliza la convergencia y en consecuencia se obtienen resultados de elevada precisión.

Puede observarse la rápida convergencia de los valores obtenidos en todos los casos planteados. No obstante se aprecia una leve relentización de la convergencia cuando las dimensiones de la microviga disminuyen.

En las tablas 6 a 5 se muestran los valores obtenidos de los primeros coeficientes de frecuen-

cia, con la teoría del segundo gradiente (SGT) y con la teoría modificada de tensión de cupla (MCST), para diferentes condiciones de borde y para diferentes relaciones  $h/l$ , siendo en todos los casos la esbeltez  $L/h = 10$  y el factor  $\kappa = 5/6$ .

La Tabla 5 contiene los valores de los primeros tres coeficientes de frecuencia de una microviga tipo cantilever.

h/l	SGT			MCST		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	13.2152	59.2227	138.3920	7.5072	43.6797	113.1298
2	8.1062	42.8269	101.8499	5.7836	33.3352	84.8671
3	6.4970	36.0933	88.2553	5.2617	30.4420	77.3517
5	5.4499	31.1646	77.9338	4.9451	28.6952	72.8767
8	5.0334	29.0786	73.3897	4.8258	28.0369	71.2002
12	4.8755	28.2689	71.5912	4.7815	27.7926	70.5796
20	4.7925	27.8386	70.6271	4.7583	27.6647	70.2556
50	4.7527	27.6314	70.1605	4.7472	27.6034	70.1005
100	4.7469	27.6016	70.0932	4.7456	27.5946	70.0782
CT	4.7450	27.5916	70.0707	4.7450	27.5916	70.0707

Tabla 5: Primeros coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , de una microviga Timoshenko Emp-Lib,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

Se observa como era esperable, que en todos los casos planteados, los valores correspondientes a la MCST se encuentran ubicados entre los correspondientes a la SGT y a la teoría clásica (CT).

La Tabla 6 contiene los valores de los primeros tres coeficientes de frecuencia de una microviga articulada en ambos extremos.

h/l	SGT			MCST		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	34.1755	106.1114	202.4855	23.7053	86.4924	174.0725
2	21.9293	75.0271	144.0755	16.4813	61.0896	124.5333
3	17.7865	63.3427	124.3883	14.7163	54.6110	111.2653
5	15.0175	54.8512	109.8587	13.7192	50.9056	103.5636
8	13.9011	51.2495	103.5143	13.3593	49.5603	100.7463
12	13.4757	49.8484	101.0064	13.2287	49.0708	99.7185
20	13.2514	49.1032	99.6623	13.1613	48.8180	99.1871
50	13.1438	48.7441	99.0117	13.1293	48.6980	98.9347
100	13.1283	48.6924	98.9179	13.1247	48.6809	98.8986
CT	13.1232	48.6751	98.8865	13.1232	48.6751	98.8865

Tabla 6: Primeros coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , de una microviga Timoshenko Art-Art,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

La Tabla 7 contiene los valores de los primeros tres coeficientes de frecuencia de una microviga empotrada en un extremo y articulada en el otro.

La Tabla 8 contiene los valores de los primeros tres coeficientes de frecuencia de una microviga empotrada en ambos extremos.

h/l	SGT			MCST		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	43.0923	111.6444	205.9753	30.9875	92.4857	177.0843
2	30.9050	83.8328	150.4895	23.7924	69.9438	131.7824
3	25.8952	72.8473	132.2715	21.7229	63.8309	119.6340
5	22.2734	64.3599	118.6039	20.4677	60.1661	112.4404
8	20.7528	60.6050	112.4915	19.9940	58.7890	109.7567
12	20.1645	59.1175	110.0426	19.8180	58.2786	108.7659
20	19.8523	58.3200	108.7213	19.7259	58.0120	108.2496
50	19.7021	57.9340	108.0794	19.6817	57.8842	108.0030
100	19.6804	57.8783	107.9867	19.6754	57.8659	107.9675
CT	19.6732	57.8597	107.9557	19.6732	57.8597	107.9557

Tabla 7: Primeros coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , de una microviga Timoshenko Emp-Art,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

h/l	SGT			MCST		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
1	52.1416	116.2567	209.6659	38.1909	97.8855	179.9300
2	40.3360	91.6825	156.5133	31.7516	78.1645	138.4834
3	34.7853	81.6247	139.5968	29.5881	72.5888	127.4170
5	30.4711	73.4184	126.7752	28.1716	69.1036	120.7631
8	28.5838	69.6389	120.9253	27.6100	67.7496	118.2374
12	27.8414	68.1143	118.5529	27.3961	67.2384	117.2945
20	27.4448	67.2901	117.2650	27.2824	66.9682	116.7995
50	27.2533	66.8895	116.6370	27.2272	66.8375	116.5615
100	27.2257	66.8316	116.5461	27.2192	66.8186	116.5272
CT	27.2165	66.8123	116.5158	27.2165	66.8123	116.5158

Tabla 8: Primeros coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , de una microviga Timoshenko Emp-Emp.  $L/h=10$ .  $\kappa = 5/6$ .

C.B.	100% (SGT - CT)/CT			100% (MCST - CT)/CT		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
E - L	178.5	114.6	97.5	58.5	58.3	61.4
A - A	160.4	118.0	104.8	80.6	77.7	76.0
E - A	119.0	92.9	90.8	57.5	59.8	64.0
E - E	91.6	74.0	79.9	40.3	46.5	54.4

Tabla 9: Diferencias porcentuales en los valores de  $\Omega_i$ , entre las teorías micro estructurales y la teoría clásica, para  $h/l = 1$  y para las diferentes condiciones de borde analizadas. Esbeltez  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

La Tabla 9 muestra las diferencias porcentuales entre los valores obtenidos de los primeros 3 coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , tanto con la SGT como con la MCST para la relación  $h/l = 1$  y los correspondientes valores obtenidos mediante la teoría clásica, ( $h/l \rightarrow \infty$ ).

## 6. CONCLUSIONES

Las conclusiones que se obtuvieron, en base al análisis numérico realizado, son las siguientes:

1. La velocidad de convergencia de los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto es muy rápida, aún para valores pequeños de  $h/l$ , notándose una leve disminución de la misma a medida que se reduce el valor de  $h/l$ .
2. Los valores obtenidos con la teoría modificada de tensión de par (MCST) son más elevados que los obtenidos con la teoría clásica y la diferencia entre ambos se acentúa cuando la relación  $h/l$  disminuye.
3. A su vez, los valores obtenidos con la teoría del segundo gradiente (SGT) son más elevados que los obtenidos con la teoría modificada de tensión de par (MCST) y la diferencia entre ambos también se acentúa cuando la relación  $h/l$  disminuye.
4. Cuando el valor de la relación  $h/l < 5$  las diferencias entre los valores obtenidos con las diferentes teorías utilizadas es muy significativa y se justifica entonces la aplicación de las teorías micro-estructurales, siendo más indicada en este caso la teoría del segundo gradiente.
5. Comparando los resultados obtenidos con las diferentes teorías utilizadas, se observa una influencia muy significativa de las condiciones de borde en las diferencias porcentuales de los coeficientes de frecuencia mostrados en la Tabla 9.

### Agradecimientos

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), a la Comisión de Investigaciones Científicas-CIC de la Prov. de Buenos Aires, a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB) y al Programa DOCTORAR INGENIERÍA de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación, bajo cuyos auspicios se desarrolló el presente trabajo.

### REFERENCIAS

- Arash B. y Wang Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Springer Series in Materials Science*, 188:57–82, 2014.
- Asghari M., Ahmadian M., Kahrobaiyan M., y Rahaeifard M. On the size dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Material & Design*, 31:2324–2329, 2010.
- Cosserat E. y Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. A. Hermann et Fils, Paris (1909), reeditado por Gabay, Paris, 2009.
- di Prisco C., Imposimato S., y Aifantis E. A visco-plastic constitutive model for granular soils modified according to non-local and gradient approaches. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26:121–138, 2002.
- Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 15:909–923, 1966.
- Eringen A. *Non Local Continuum Theories*. Springer, 2001.
- Eringen A. y Suhubi E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids. *Journal of Engineering Science*, 2:189–203, 1964.
- Ghannadpour S.A.M. M.B. y Fazilati J. Bending, buckling and vibration problems of nonlocal euler beams. *Composite Structures*, 96:584–589, 2013.



- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Free vibration of timoshenko micro beams using the modified couple stress theory. *Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM)*, 2015.
- Kong S., Zhou S., Z. N., y K. W. The size-dependent natural frequency of bernoulli-euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science*, 46:427–437, 2008.
- Kong S., Zhou S. and Nie Z., y Wang K. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47:487–498, 2009.
- Lam D., Yang F., Chong A., J. W., y P. T. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477–1508, 2003.
- Ma H., Gao X., y Reddy J. A microstructure-dependent timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3379–3391, 2008.
- Mindlin R. *Micro-structure in Linear Elasticity*. Technical Report of Columbia University, 1964.
- Mindlin R. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1:417–438, 1965.
- Mindlin R. y Eshel N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109–124, 1968.
- Wang Y., W.H. L., y N. L. Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple stress theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 47:80–85, 2013.
- Yang F., Chong A., Lang D., y P. T. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2731–2743, 2002.
- Zhang B., Yuming H., Dabiao L., Zhipeng G., y Shen L. Non-classical timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 79:22–39, 2014.