

ESTUDIO DE LAS ESTRUCTURAS DE VORTICIDAD EN LA TRANSICIÓN ESPACIAL LAMINAR-TURBULENTO EN CANALES ANGOSTOS

William I. Machaca Abregu^{a,b} y Federico E. Teruel^{a,b,c}

^a*Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, Av. Ezequiel Bustillo 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

^b*Departamento de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, Av. Ezequiel Bustillo 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

^c*CONICET, Centro Atómico Bariloche, Av. Ezequiel Bustillo 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

Palabras Clave: DNS, Transición laminar-turbulenta, Incompact3D, Análisis de estabilidad lineal.

Resumen. En el presente trabajo se modela la transición espacial laminar-turbulenta en canales angostos usando simulación numérica directa (DNS). Para ello se utiliza la herramienta numérica Incompact3D y la teoría de estabilidad lineal, la cual permite describir la evolución de pequeñas perturbaciones en el flujo a partir de resolver el problema de autovalores dado por las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y Squire. Con el uso de esta técnica se logró inestabilizar el flujo para Reynolds inferiores al $Re_{crit} = 5772$ en distancias relativamente cortas en la dirección de la corriente. Esto permitió estudiar la evolución de las estructuras de vorticidad mediante la técnica de visualización de vorticidades λ_2 para un caso representativo de la transición. Se observó que la región de transición se encuentra gobernada por las estructuras de vorticidad tipo Λ y tipo *hairpin*.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas de interés presentan un cambio de régimen (laminar-turbulento) en su evolución, se pueden citar por ejemplo las alas de los aviones, los vehículos terrestres y espaciales, los álabes de las turbinas, las máquinas de combustión, los intercambiadores de calor y conductos con bajo número de Reynolds (Schlatter, 2005). Desde el punto de vista ingenieril las características del cambio de régimen son de gran relevancia. Por ejemplo, el coeficiente de fricción se incrementa notablemente cuando se pasa del régimen laminar al régimen turbulento (Schlatter et al., 2006). Por esto la predicción de la transición laminar-turbulenta en un flujo es de interés para muchas aplicaciones tecnológicas. El estudio de estos aspectos es, entonces, necesario para el correcto entendimiento de los dispositivos que tienen el régimen de transición como característica. La evolución del flujo laminar a un flujo turbulento completamente desarrollado es llamada transición laminar-turbulenta. Esta transición puede ocurrir en el tiempo (transición laminar-turbulenta temporal) o en el espacio (transición laminar-turbulenta espacial), siendo esta última de interés del presente trabajo.

La historia de la investigación de la transición empieza con el experimento hecho por Osborne Reynolds en el siglo 19 (Reynolds, 1883). Más tarde Orr (1907) y Sommerfeld (1908) desarrollaron las ecuaciones de estabilidad linealizadas (ecuaciones de Orr-Sommerfeld), que describen la evolución de las perturbaciones en un flujo y son fundamentales en el estudio de la transición. El mayor progreso para entender el fenómeno de la transición se dio luego de la descripción teórica del estado lineal de la transición por Tollmien (1929) y Schlichting (1933), que se verificó experimentalmente en el problema de capa límite en una placa plana realizada por Schubauer y Skramstad (1947). Finalmente, la introducción de la teoría de inestabilidad secundaria por Herbert (1988) permitió un enfoque teórico para la transición en tres dimensiones. Entre los mecanismos de transición más comunes o estudiados están los tipo K (Klebanoff et al., 1962) y tipo H (Herbert, 1983). También han sido identificados otros tipos de escenarios de transición como los tipo O (Schmid y Henningson, 1992) y *bypass transition* (Schmid y Henningson, 2001).

Un esquema clásico de la transición espacial laminar-turbulenta se muestra en la figura 1 para el caso de un flujo sobre una placa plana (*boundary-layer transition*). El fluido fluye a lo largo de la placa (posición 1) y en cierta posición aguas abajo, indicado por el Re_{crit} (para el caso del problema de capa límite), comienza a inestabilizarse. Aguas más abajo, se generan las perturbaciones bidimensionales dentro de la capa límite (posición 2), que rápidamente evolucionan a la perturbación tridimensional de la forma triangular (vórtices tipo Λ en la posición 3). Estas estructuras de vorticidad conducen a la turbulencia a través de la formación de vórtices tipo *hairpin* (posición 4), que crecen y se combinan para formar la capa límite turbulenta (posición 5 y 6).

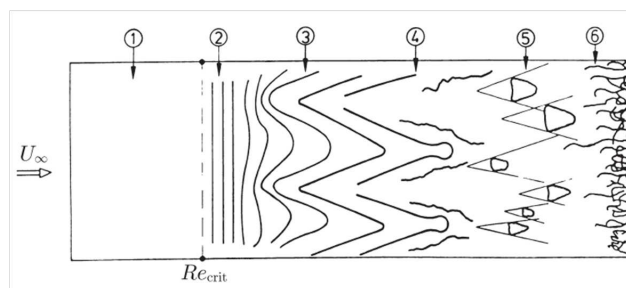


Figura 1: Esquema de la transición laminar-turbulenta en una placa plana.

La presencia de diversas estructuras de vorticidad, presentes en la transición laminar-turbulenta, ha sido investigada por muchos científicos tanto experimentalmente como numéricamente. [Robinson \(1991, 1993\)](#) analizó la cinemática de las estructuras de vorticidad observadas en los experimentos y en las simulaciones de capa límite turbulenta, donde el vórtice característico identificado fue el vórtice tipo *hairpin*, el cual había sido propuesto por [Theodorsen \(1952\)](#) en la década del 50. Este vórtice se caracteriza por tener una cabeza, un cuello y un par de patas. La cabeza se encuentra alejada de la pared y las patas se encuentran cercanas a ésta. Por otro lado, en los experimentos realizados por [Meinhart \(1994\)](#), [Meinhart y Adrian \(1995\)](#) y [Adrian et al. \(2000\)](#), quienes usaron el método PIV (*particle image velocimeter*), revelaron, también, que la capa límite está poblada de vórtices tipo *hairpin*, los cuales están alineados uno detrás del otro formando paquetes coherentes. También observaron que estos vórtices generan un flujo ascendente de baja velocidad generando *streaks* de baja velocidad cerca de la pared. Asimismo [Zhou et al. \(1996\)](#) estudió la autogeneración de las estructuras de vorticidad en un canal, [Zhou et al. \(1999\)](#) los mecanismos de generación de paquetes de vórtices tipo *hairpin*, [Adrian y Liu \(2002\)](#) la observación de vórtices tipo *hairpin* en un canal turbulento, [Kim et al. \(2008\)](#) el efecto del ruido en la generación de estructuras coherentes de vórtices tipo *hairpin*, entre otras investigaciones. Estas investigaciones señalan que los paquetes coherentes de vórtices *hairpin* toman diferentes formas. El más frecuente escenario es el vórtice primario seguido de vórtices *hairpin* más jóvenes aguas arriba. También es posible encontrar en algunos fluidos un pequeño y joven vórtice tipo *hairpin* aguas abajo del vórtice primario. Las investigaciones también señalan que el vórtice tipo *hairpin* es dispersado aleatoriamente en z y en x (y es la coordenada normal a la pared). Entonces, los vórtices *hairpin* pueden ocurrir en grupos con un arreglo espacial definido dentro del grupo, pero los paquetes pueden ellos mismos estar distribuidos aleatoriamente dentro de la capa límite turbulenta. Estos paquetes de vórtices son estructuras coherentes, en el sentido de que tienen una persistencia a largos tiempos, por lo que transportan momento y son un medio de producción de energía cinética turbulenta ([Adrian, 2007](#)), y a su vez juegan un papel importante en la producción de la tensión de corte de Reynolds. Entonces los vórtices *hairpin* pueden formar nuevos vórtices tipo *hairpin* para formar paquetes coherentes que pueblen una fracción significativa de la capa límite, incluso a altos números de Reynolds. La formación de nuevos vórtices tipo *hairpin* es llamado autogeneración ([Zhou et al., 1996, 1999](#)), el cual es un proceso no lineal.

En el presente trabajo se propone estudiar numéricamente la formación de estructuras de vorticidad en la transición espacial laminar-turbulenta en canales rectangulares angostos mediante la simulación numérica. Esto implica evolucionar espacialmente desde una condición de flujo laminar al estado turbulento. Esto se logra perturbando el flujo con perturbaciones que surgen de la teoría de estabilidad lineal ([Schmid y Henningson, 2001](#); [Schlatter, 2005](#)). Para la visualización de las estructuras de vorticidad en el flujo incompresible se utilizó la técnica de visualización de vorticidades λ_2 ([Jeong y Hussain, 1995](#); [Chakraborty et al., 2005](#)). Esta técnica consiste en calcular los autovalores del tensor simétrico $S^2 + \Omega^2 = -\frac{1}{\rho}\nabla(\nabla p)$, donde S es la parte simétrica y Ω es la parte antisimétrica del tensor gradiente de velocidad $\nabla\vec{u}$, ρ es la densidad, p es la presión y $\nabla(\nabla p)$ es la presión de Hessian. [Jeong y Hussain \(1995\)](#) definió al vórtice como una región conectada con dos autovalores positivos de la presión de Hessian. Si los autovalores del tensor simétrico se ordenan como $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, la definición es equivalente a que $\lambda_2 < 0$ en los puntos dentro del vórtice. De ahí la denominación de la técnica.

El trabajo está dividido en 5 apartados. En la sección 2 se describe al mecanismo de inestabilización usado. Luego se presenta el método numérico en el apartado 3, donde se describe los métodos numéricos del código Incompact3D ([Laizet et al., 2010](#); [Laizet y Li, 2011](#)) para resol-

ver la ecuación de Navier-Stokes en un canal de placas paralelas. En la sección 4 se presentan las estructuras de vorticidad en el estado transitorio (desde la condición inicial hasta el flujo estadísticamente estacionario) y en el flujo estadísticamente estacionario (transición espacial laminar-turbulenta). Finalmente se presentan las conclusiones principales del presente estudio.

2. MECANISMO DE INESTABILIZACIÓN

El objetivo del presente trabajo es el estudio numérico de las vorticidades en la transición espacial laminar-turbulenta, para ello se requiere de un mecanismo numérico que permita inestabilizar el flujo aguas abajo de la entrada del dominio computacional. En la literatura se encuentran varios trabajos que han reportado transición espacial en distancias relativamente accesibles computacionalmente (Sayadi et al., 2011; Schlatter, 2005; Criminale et al., 1997; Kucala y Birring, 2014; Lundbladh et al., 1994). Varios de estos trabajos utilizan la *teoría de estabilidad lineal*, que es utilizada en este trabajo. Esta teoría permite calcular perturbaciones que son introducidas a la entrada del canal, las cuales crecen, dependiendo de los parámetros impuestos en su cálculo, y permiten la obtención del estado turbulento aguas abajo de la entrada. Las perturbaciones bidimensionales teóricas que inestabilizan el flujo son conocidas como las ondas de Tollmien-Schlichting (TS), que presentan un Reynolds crítico, para el flujo Poiseuille, de $Re_{crit} = 5772$ (Chung y Sung, 1997), este es el menor valor para el cual una perturbación sinusoidal al flujo crece exponencialmente. Sin embargo, los experimentos reales muestran que el flujo puede inestabilizarse a $Re < Re_{crit}$ (Kao y Park, 1970), y se sabe también que es posible inestabilizar numéricamente el flujo para parámetros con valores inferiores al mencionado ($Re < Re_{crit}$) (Orszag y Patera, 1980). Este aspecto es de relevancia ya que mayores Re requieren mayor discretización espacial.

Para la transición espacial se considera la teoría de estabilidad lineal como mecanismo para inestabilizar el flujo espacialmente en la dirección de la corriente. Esta teoría se focaliza en la respuesta del flujo laminar ante perturbaciones de pequeña amplitud.

La formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes linealizadas da lugar a las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y Squire, las cuales permiten analizar el crecimiento de las perturbaciones. Estas ecuaciones resultan de introducir en las ecuaciones de Navier-Stokes una perturbación sinusoidal de la forma,

$$(u, v, w, \eta) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\eta})e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad (1)$$

donde α y β son el número de onda en la dirección de la corriente x y en la dirección z , respectivamente, ω es la frecuencia, (u, v, w) son las perturbaciones en la dirección x , y y z , respectivamente, η es la perturbación de la vorticidad normal, $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ son las autofunciones en la dirección x , y y z , respectivamente, y $\tilde{\eta}$ es la autofunción de la vorticidad normal (Schmid y Henningson, 2001). Reduciendo y considerando un flujo entre dos placas paralelas (flujo Poiseuille) se obtienen las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y Squire, las cuales se dan a continuación:

$$[(-i\omega + i\alpha U)(D^2 - \alpha^2 - \beta^2) - i\alpha U'' - \frac{1}{Re}(D^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2]\tilde{v} = 0, \quad (2)$$

$$[(-i\omega + i\alpha U) - \frac{1}{Re}(D^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2]\tilde{\eta} = -i\beta U' \tilde{v}, \quad (3)$$

con las condiciones de contorno $\tilde{v} = D\tilde{v} = \tilde{\eta} = 0$ en las paredes (para un flujo Poiseuille), y donde (\prime) y D denotan la derivada y el operador derivada en la dirección y , respectivamente.

Tener en cuenta que estas ecuaciones permiten resolver las autofunciones \tilde{v} y $\tilde{\eta}$, para obtener las autofunciones en la dirección de la corriente \tilde{u} y \tilde{w} ver [Machaca Abregu \(2015\)](#).

Para resolver el problema de autovalores (ecuación 2 y 3) se modificó el código desarrollado por investigadores de la universidad de Cambridge ([Juniper et al., 2010](#)). Este código está preparado para resolver el problema temporal utilizando el método de colocación de Chebyshev ([Schmid y Henningson, 2001](#); [Trefethen, 2000](#); [Moin, 2010](#)) y tiene la capacidad de graficar los autovalores y autofunciones obtenidos para un Re , α y β dados. El código se modifica en Octave para resolver el problema espacial de autovalores para un Re , ω y β dados. Este código fue validado para el cálculo de autovalores y autofunciones con datos de la bibliografía (ver [Machaca Abregu \(2015\)](#)).

3. MÉTODO NUMÉRICO

Las características principales del código Incompact3D para la simulación numérica de un flujo incompresible en un canal de placas paralelas, mediante la resolución de la ecuación de Navier-Stokes, son :

- Esquemas compactos (tipo Padé) de sexto orden para la discretización espacial.
- Discretización temporal explícita (*Adams Bashforth de segundo orden AB2*).
- Grilla uniforme en dos direcciones (x y z) y uniforme o refinada en y (coordenada normal a las paredes).
- Método de paso fraccionado para satisfacer la condición de incompresibilidad.
- Método espectral para resolver la ecuación de Poisson.
- Paralelización: librería 2DECOMP&FFT, basada en MPI, que tiene como principal desarrollo a la descomposición 2D.

A continuación se describen las aproximaciones numéricas para la resolución de la ecuación de Navier-Stokes, usando el código Incompact3D, para el problema del presente estudio.

3.1. Ecuaciones de Gobierno

El código Incompact3D resuelve la ecuación de Navier-Stokes adimensionalizada en un canal con desarrollo hidrodinámico espacial para un flujo incompresible. Los parámetros como la distancia, la velocidad instantánea, la presión y el tiempo son adimensionalizados con la altura media del canal h , la máxima velocidad en la dirección de la corriente U_o , la densidad ρ y la viscosidad cinemática ν . La ecuación adimensionalizada es,

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2}(\nabla(\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*) + \vec{u}^* \cdot \nabla)\vec{u}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^2 \vec{u}^*, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^* = 0, \quad (5)$$

donde: $\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U_o}$ es el campo de velocidades ($\vec{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$), $\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{h}$ es el vector de coordenadas ($\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$), $t^* = \frac{t U_o}{h}$ es el tiempo, $p^* = \frac{p}{\rho U_o^2}$ es el campo de presiones, $Re = Re_o = \frac{U_o h}{\nu}$ es el número de Reynolds. Notar que en la ecuación 4 el término convectivo está escrito en su forma antisimétrica. Esta forma específica permite una mejor conservación de la energía cinética para la discretización espacial usada en el código ([Kravchenko y Moin, 1997](#)).

3.2. Condiciones de contorno

Las ecuaciones de Navier-Stokes se resuelven en un dominio computacional $L_x = 90h \times L_y = 2h \times L_z = 6h$ discretizado en una grilla cartesiana de $n_x \times n_y \times n_z = 3601 \times 129 \times 256$ nodos, en las direcciones x , y y z , respectivamente (ver figura 2). Notar que $y \in [0 : 2h]$ e $y^* \in [0 : 2]$.

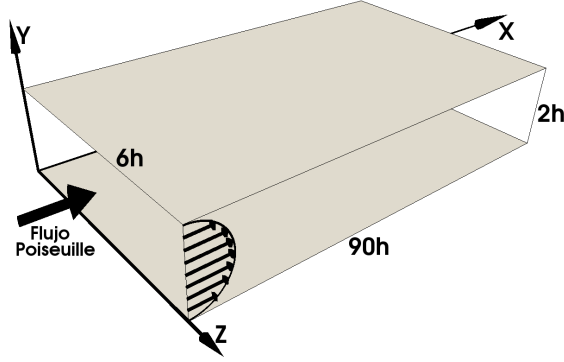


Figura 2: Dominio del canal rectangular entre dos placas paralelas.

Las condiciones de contorno, para el campo de velocidades, en el presente estudio son: periódico en z , Dirichlet en y ($u^*(x^*, 0, z^*) = u^*(x^*, 2, z^*) = 0$), y la condición de entrada-salida en la dirección de la corriente x . Esta última condición es importante en el presente estudio (crecimiento de las perturbaciones en la dirección de la corriente) por ello se las describe con más detalle en los dos siguientes apartados.

3.2.1. Condición de entrada

Como se mencionó líneas arriba para inestabilizar el flujo espacialmente se requiere introducir una perturbación a la entrada del canal. Esta perturbación resulta de la teoría de estabilidad lineal y consiste en resolver las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y Squire para la transición espacial laminar-turbulenta.

Entonces a la entrada del canal se introduce el flujo Poiseuille más la perturbación, la cual se muestra en en la ecuación 6

$$\vec{U} + \vec{u}, \quad (6)$$

donde $\vec{U} = (U(y), 0, 0)$ es el flujo Poiseuille base ($U(y) = \frac{y}{h}(2 - \frac{y}{h})U_o$) y $\vec{u} = (u, v, w)$ es la perturbación dada por

$$\begin{aligned} \vec{u}(x = 0, y, z, t) = & A_{2d} \Re e [(\vec{u}_{2d}(y)) e^{-i\omega_{r2d}t}] \\ & + \frac{1}{2} A_{3d} \Re e [(\vec{u}_{r3d}^+(y)) e^{i(\beta z - \omega_{r3d}t)}] + \frac{1}{2} A_{3d} \Re e [(\vec{u}_{r3d}^-(y)) e^{i(\beta z - \omega_{r3d}t)}], \end{aligned} \quad (7)$$

donde A_{2d} es la amplitud de la perturbación bidimensional y A_{3d} es la amplitud total del par de ondas oblicuas tridimensionales. Las autofunciones espaciales complejas, \vec{u}_{2d} y \vec{u}_{3d} , son calculados resolviendo la ecuación de Orr-Sommerfeld y Squire para un dado número de Reynolds, número de onda en dirección z (β), y para la frecuencia real en dos y tres dimensiones, ω_{2d} y ω_{3d} , respectivamente. Las autofunciones son normalizadas para que la amplitud máxima de la componente en la dirección de corriente sea uno con un desplazamiento de fase cero. Los

superíndices + y - representan las autofunciones calculadas para $\beta > 0$ y $\beta < 0$, respectivamente. Cuando $\omega_{r3d} = \omega_{r2d}$ la perturbación tridimensional conduce a la inestabilidad tipo K, y cuando $\omega_{r3d} = \frac{1}{2}\omega_{r2d}$ se desarrolla la inestabilidad tipo H (Saiki et al., 1993) que es la usada en el presente trabajo. También $i = \sqrt{-1}$ y Re indica la parte real del número complejo.

3.2.2. Condición de salida

En este tipo de flujos uno de los problemas numéricos principales es la falta de una condición de frontera de salida no reflectiva viable para las ecuaciones de Navies-Stokes, capaz de expulsar grandes perturbaciones del dominio computacional sin inestabilizar el flujo aguas arriba. Algunas soluciones, que fueron encontradas en los trabajos revisados, para el estudio de la transición espacial usan, en general, un dominio extendido a la salida del canal, donde artificialmente se modifica la ecuación de N-S buscando que el flujo se vuelva laminar. Dentro de esta técnica, por ejemplo, se encuentra el *buffer domain* (Streett y Macaraeg, 1990; Liu y Liu, 1994; Richards et al., 2004) y la *fringe zone* (Schlatter, 2005). Sin embargo, en el presente trabajo se considera el uso de la condición convectiva, que permite la salida de las ondas minimizando las reflexiones aguas arriba de la salida del canal, de acuerdo a la formulación presentada en la ecuación 8.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_c(y) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

con

$$u_c(y) = \frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h}\right) U_o. \quad (9)$$

Esta condición es más fácil de implementar para el método numérico en cuestión produciendo resultados satisfactorios. Si bien esta condición introduce inestabilidades y valores espurios a la salida del dominio, es posible lograr soluciones no divergentes y válidas aguas arriba (Lambailais, 2014). Desde el punto de vista computacional, el uso de la condición convectiva permite usar un dominio más pequeño respecto del uso del *buffer domain* o la *fringe zone*, disminuyendo el costo computacional.

4. RESULTADOS

En la presente sección se muestran los resultados obtenidos luego de realizar la simulación para $Re = 5000$ con los parámetros de perturbación mostrados en la tabla 1, las cuales conducen a la inestabilidad tipo H. Primero se muestra la validación de los resultados en la transición espacial. Para esto se calcula el Re_τ (Pope, 2000) en función de la dirección de desarrollo hidrodinámico para el flujo estadísticamente estacionario. Luego se presentan las estructuras de vorticidad formadas a lo largo de la dirección de la corriente en distintos tiempos y en diferentes posiciones desde la condición inicial hasta la condición de flujo estadísticamente estacionario (estado transitorio). Finalmente se muestran las estructuras de vorticidad en el flujo estadísticamente estacionario (transición espacial laminar-turbulenta).

Re	A_{2d}	A_{3d}	w_{r2d}	w_{r3d}	β
5000	6 %	0.2 %	0.3	0.15	2.0944

Tabla 1: Parámetros de la perturbación para la transición espacial laminar-turbulenta.

4.1. Transición Espacial

La simulación se realiza en un dominio computacional de $L_x = 90$, $L_y = 2$ y $L_z = 6$ con una discretización de $n_x \times n_y \times n_z = 3601 \times 129 \times 256$ en las direcciones x , y y z , respectivamente (de aquí en adelante se trabaja con las ecuaciones gobernantes adimensionalizadas por lo que ya no se usa el símbolo $(*)$). Se simuló 360000 pasos de tiempo, con un paso temporal de $\Delta t = 0.001$, partiendo de una condición inicial laminar y se tomó estadísticas durante los últimos 40000 pasos de tiempo, los cuales se encontraban en el estado estadísticamente estacionario. Con los promedios estadísticos, en el tiempo y en las direcciones homogéneas, se calculó el Re_τ en función de la dirección de la corriente. Para verificar que la solución a la salida del canal corresponde a un flujo turbulento (para $Re = 5000$ el $Re_\tau \approx 210$), se calculó el Re_τ aguas arriba de la salida del canal (donde no afecta la condición de salida convectiva). El resultado se muestra en la figura 3, en la que se observa una zona laminar, de transición y turbulenta. La zona turbulenta corresponde a un $Re_\tau \approx 210$ lo cual muestra que el resultado obtenido es correcto. Asimismo se observa que la condición convectiva influye en el resultado a la salida del canal, sin embargo no influye en la solución aguas arriba.

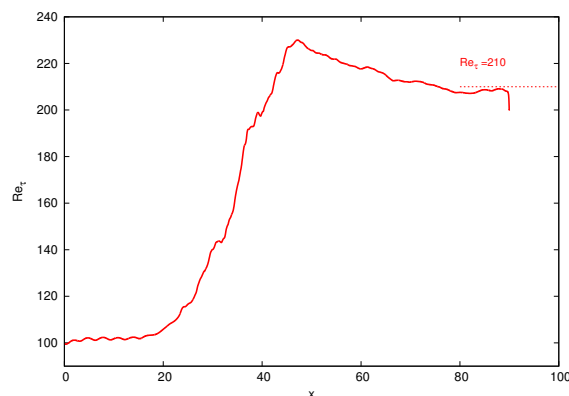


Figura 3: Re_τ en función de la dirección de la corriente para $Re = 5000$. A la salida del canal se muestra el Re_τ para un flujo turbulento completamente desarrollado a $Re = 5000$.

4.2. Tipos de vórtices en la zona transitoria

En esta subsección se realiza un estudio de las estructuras de vorticidades en la zona transitoria. Se muestra la formación del vórtice tipo hairpin primario (PHV) en la capa límite superior, su evolución y su interacción con los vórtices de la capa límite inferior.

4.2.1. Formación del vórtice tipo hairpin primario

La perturbación impuesta a la entrada del canal crece y evoluciona. Esta evolución se muestra en la figura 4, en la que se ve la formación de distintos vórtices aguas abajo de la entrada a distintos tiempos. En el tiempo $t = 25$ (ver figura 4b) se observa la evolución de la perturbación impuesta a la entrada del canal. En $t = 55$ se observa en la capa límite de la pared superior ($y = 2$) y en $x \approx 16$ la presencia del vórtice tipo Λ (ver figura 4a). En la figura 4c se ve la formación de un nuevo vórtice tipo Λ y un grupo de vórtices aguas abajo de este, así como la formación de vórtices tipo Λ en la pared inferior ($y = 0$). Entonces a $t < 80$, para las condiciones dadas de la perturbación, la pared superior en $x < 35$ presenta distintos tipos

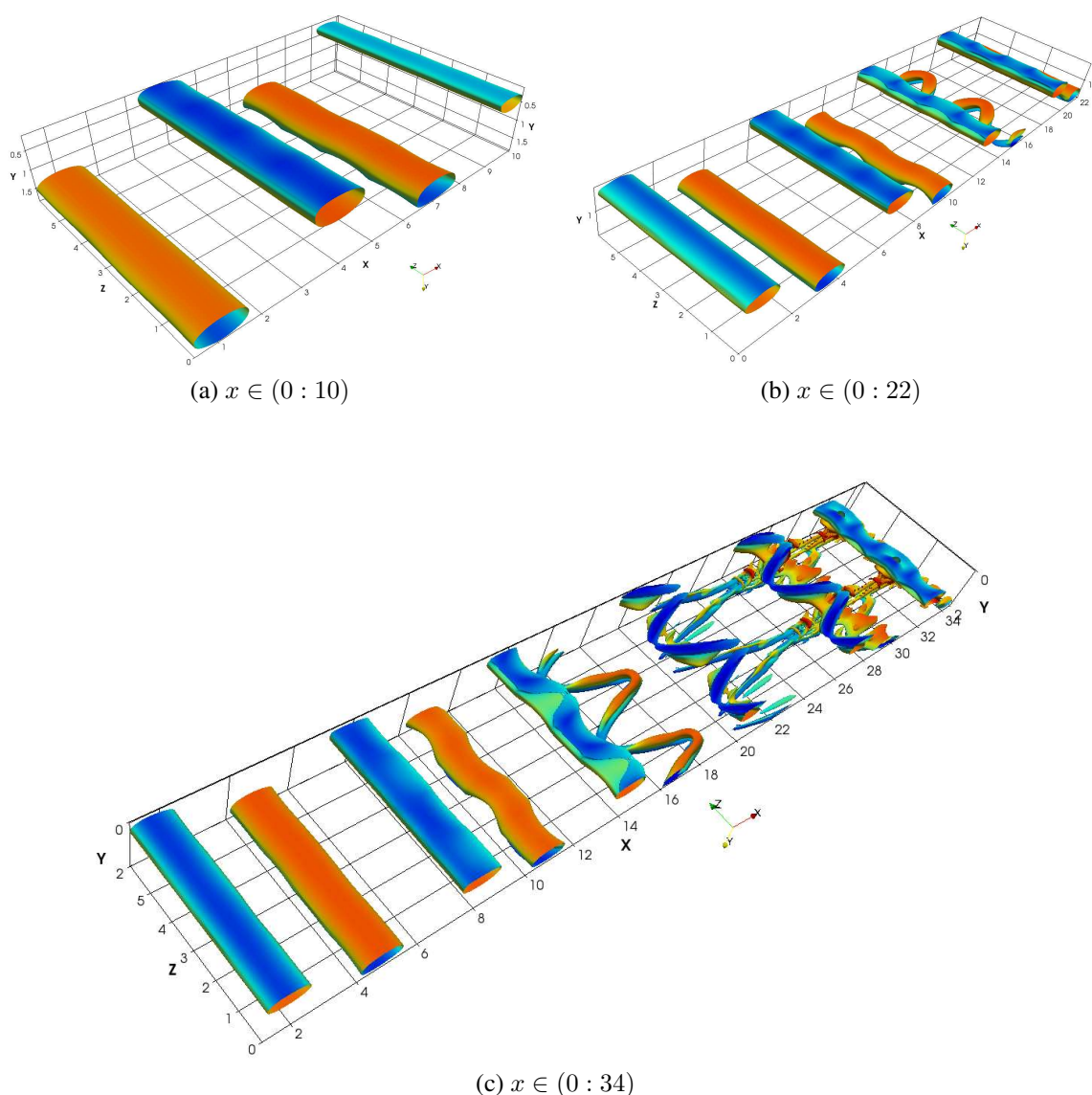


Figura 4: Crecimiento de las estructuras de vorticidad en la dirección de la corriente para $\lambda_2 = -0,02$. a) a $t = 25$, b) a $t = 55$ y c) a $t = 80$. Las figuras son las isosuperficies de λ_2 coloreadas con la velocidad en la dirección de la corriente.

de vórtices mientras que la pared inferior sólo presenta vórtices tipo Λ . Por ello se estudia la formación del vórtice tipo hairpin en la capa límite de la pared superior.

El primer vórtice que aparece es el vórtice tipo Λ en la capa límite de la pared superior, el cual se puede ver en la figura 5a al tiempo $t = 60$. Este vórtice surge de la perturbación bidimensional, la cual predomina a la entrada del canal, que evoluciona mediante la perturbación tridimensional al vórtice tipo Λ (Schlatter, 2005). Luego, cuando las patas del vórtice tipo Λ interactúan entre sí se forma un anillo, porque el tubo de vorticidad no puede romperse en el interior del campo del fluido (primera ley de Helmholtz para la conservación de la vorticidad (Liu y Chen, 2010)). Esto se puede observar en la figura 5b y 5c, mostradas a $t = 65$ y $t = 70$, respectivamente. Finalmente en la figura 5d se observa el vórtice tipo hairpin primario.

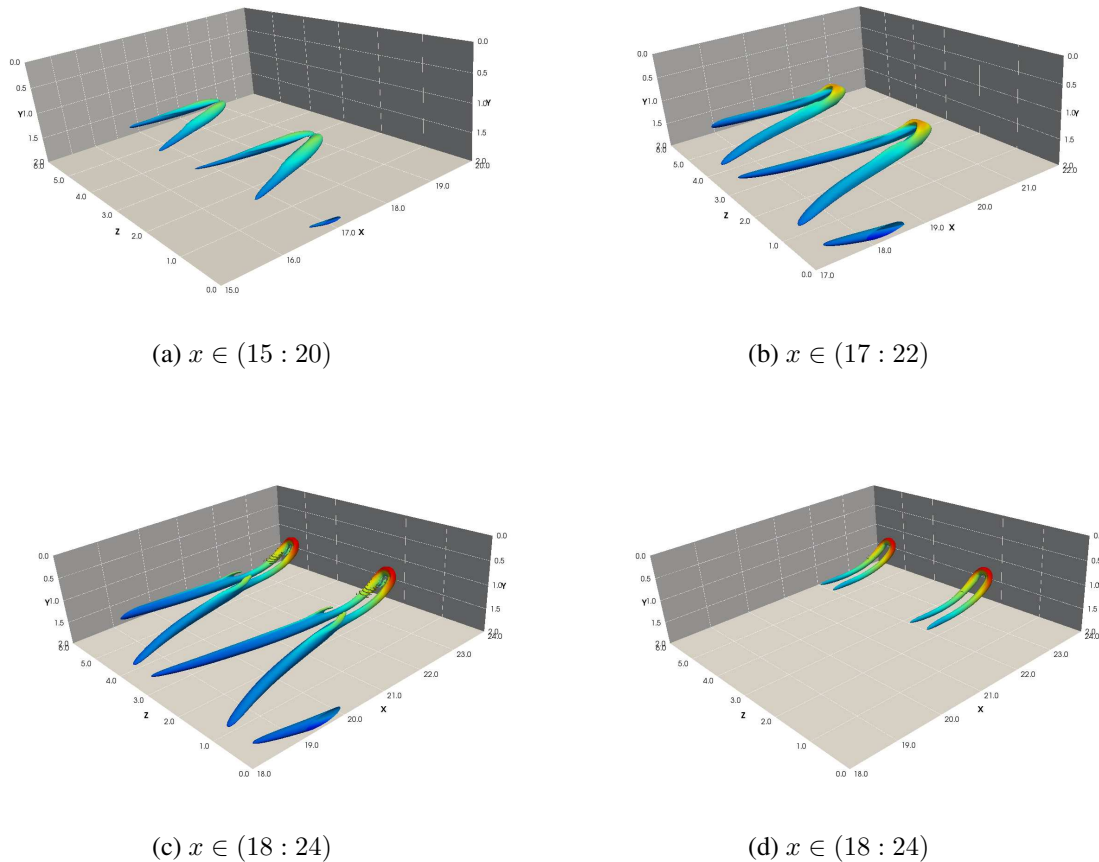


Figura 5: Formación del vórtice tipo hairpin primario. En a) se muestra el vórtice tipo Λ ($\lambda_2 = -0,1$) a $t = 60$, en b) se muestra la evolución del vórtice Λ ($\lambda_2 = -0,1$) a $t = 65$, en c) se muestra el vórtice tipo hairpin para $\lambda_2 = -0,1$ a $t = 70$ y en d) se muestra el vórtice tipo hairpin primario con $\lambda_2 = -1$ a $t = 70$. Las figuras son las isosuperficies de λ_2 coloreadas con la velocidad en la dirección x .

Se vio la formación del vórtice tipo hairpin primario (PHV). Este vórtice continúa evolucionando en el tiempo y en el espacio y forma el vórtice tipo Ω .

4.2.2. Formación del vórtice en forma Ω

El vórtice tipo hairpin primario evoluciona y la cabeza obtiene la forma Ω , esto se puede observar en la figura 6, correspondiente al tiempo $t = 75$. En este punto se muestra en la figura 6b un vórtice hairpin simétrico. Este vórtice usualmente consiste de tres partes, dos vórtices quasi-streamwise, conocidos como piernas, una cabeza de forma Ω y un cuello que une la cabeza con las piernas. Es importante mencionar que en la literatura el término vórtice tipo anillo es comúnmente usado para describir la combinación de la cabeza con el cuello (Liu y Chen, 2010; Wang et al., 2016). Los eventos asociados al vórtice tipo Λ o a las piernas del vórtice tipo hairpin son llamados *first ejection* y *first sweep* mientras que *second ejection* y *second sweep* son usados para describir los eventos relacionados al vórtice tipo anillo. Mediante ese mecanismo se generan estos vórtices en la capa límite producto de la perturbación impuesta a la entrada del canal.

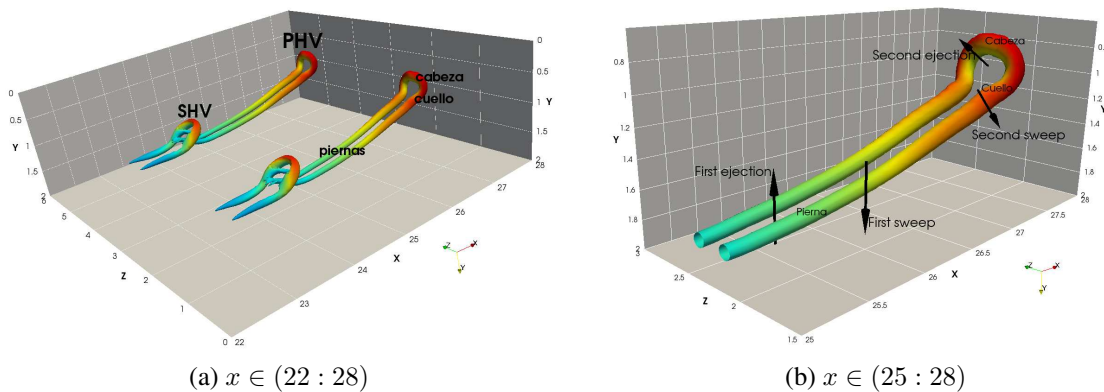


Figura 6: Formación del vórtice tipo Ω graficado para $\lambda_2 = -1$ a $t = 75$. En a) se muestra el vórtice tipo hairpin primario (PHV) y secundario (SHV) y en b) un bosquejo de un vórtice tipo hairpin simétrico.

Es importante, también, mencionar que los vórtices tipo hairpin aparecen en grupos o paquetes (Zhou et al., 1999; Adrian y Liu, 2002; Wang et al., 2016). Por ello en los siguientes apartados se muestran los vórtices tipo hairpin primario (PHV), secundario (SHV), terciario (THV), entre otros, los cuales hacen posible la autogeneración de los paquetes de vórtices tipo hairpin.

4.2.3. Paquetes coherentes de vórtices tipo hairpin

A medida que evoluciona el vórtice en la dirección de la corriente, la piernas del vórtice se juntan por la autoinducción (*ejection - sweep*) mostrando un levantamiento cerca del cuello, para formar otro vórtice tipo anillo, el vórtice tipo hairpin secundario (SHV) (Zhou et al., 1999), como se muestran en la figura 6a a $t = 75$. Conforme evoluciona el vórtice en el tiempo y en la dirección de la corriente, se aprecia al tiempo $t = 80$ un vórtice tipo anillo de menor tamaño que el secundario, el vórtice hairpin terciario (THV) (ver figura 7), que también se genera por la autoinducción de las piernas del vórtice secundario. Este proceso de formación de nuevos vórtices tipo anillo aguas arriba del vórtice primario continúa hasta que la tensión de corte no es suficientemente fuerte para generar un nuevo vórtice (Wang et al., 2016). Este proceso es conocido como el mecanismo de autogeneración de paquetes de vórtices tipo hairpin (Zhou et al., 1999), que es autosustentable y forma una estructura coherente. Es importante resaltar que, a diferencia de otros estudios (Adrian y Liu, 2002; Zhou et al., 1999, 1996; Wang et al., 2016; Liu y Chen, 2010), en el presente estudio se observa en la figura 7a que a $t = 80$ el vórtice tipo hairpin primario empieza a ser afectado por la capa límite de la pared inferior que presenta vórtices tipo Λ .

Por el levantamiento de las piernas del vórtices hairpin, se presenta a ambos lados de las piernas, cerca del THV, el vórtice *quasi-streamwise* (QSV) (Zhou et al., 1999). En el tiempo $t = 85$ (ver figura 8), se observa una estructura compleja de los vórtices tipo anillo generados por la autoinducción de las piernas del vórtice tipo hairpin primario (levantamiento de las piernas y precipitación del cuello). Wang et al. (2016) observó cerca de 5 o 6 vórtices tipo anillo en el paquete o grupo de vórtices tipo hairpin. En el presente trabajo también se observa cerca de 6 vórtices tipo anillo, donde el vórtice aguas arriba se encuentra cada vez más cerca de la pared (ver figura 8b), por lo que el vórtice tipo hairpin primario es el de mayor tamaño. Por otro lado,

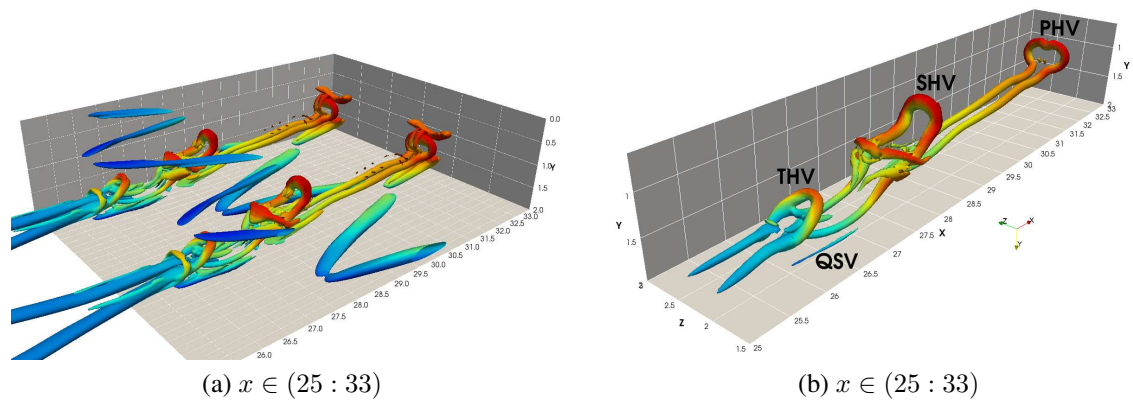


Figura 7: Bosquejo del paquete de vórtices tipo hairpin a $t = 80$. En a) se muestra las vorticidades con $\lambda_2 = -0,1$ y en b) con $\lambda_2 = -1$.

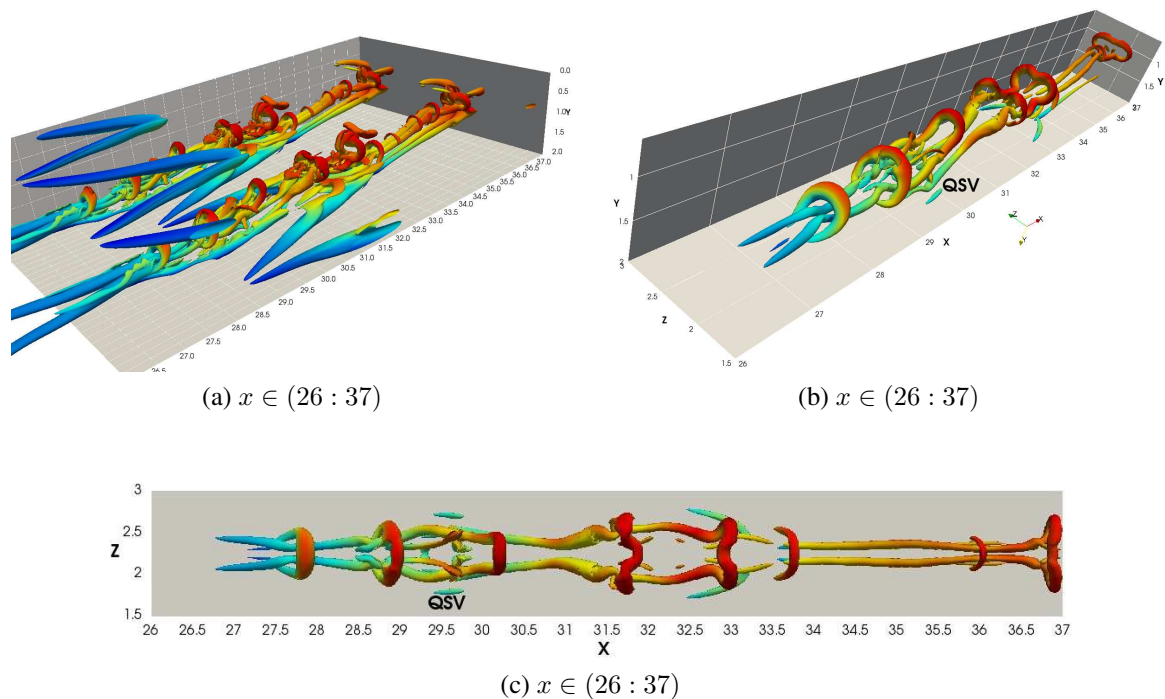


Figura 8: Quasistreamwise vortex a $t = 85$. En a) la visualización de vorticidades es con $\lambda_2 = -0,1$, y en b) y en c) con $\lambda_2 = -1$.

en el presente estudio también se ve la formación de vórtices tipo anillo de menor tamaño entre el PHV y el SHV o entre el SHV y el THV. Por ejemplo, entre el PHV y el SHV se observa unos vórtices tipo anillo cuya cabeza es de menor tamaño que el PHV y el SHV (ver figura 8a y 8b).

También se observa debajo del vórtice primario un vórtice en la dirección de la corriente pero que no se encuentra al lado de las patas (ver figura 8b y 8c) sino por debajo. Este vórtice son las piernas de un vórtice aguas abajo del vórtice primario, conocido como DHV. Según Zhou et al. (1999) el DHV es poco frecuente en los fluidos y se caracteriza por ser de menor tamaño que el PHV y cuyas piernas se encuentran alejadas de la pared. En la figura 9a se muestra al tiempo

$t = 90$ el DHV que se encuentra aguas abajo del PHV. Es importante resaltar que, para el caso del presente estudio, el DHV sigue evolucionando y aumentando de tamaño hasta superar al PHV. Esto es debido a que el DHV del estado transitorio no encuentra otras estructuras más complejas aguas abajo que le impidan evolucionar.

Se observó los distintos tipos de vórtices (PHV, SHV, THV, QSV y DHV). Este análisis es sólo en la capa límite superior, no obstante en el presente estudio también está presente la capa límite inferior. En ese sentido en el siguiente apartado se presenta la influencia de ambas capas límites en los vórtices.

4.2.4. Vórtices en las paredes

En esta parte se muestra la influencia de ambas paredes en los vórtices. Al tiempo $t = 90$ (ver figura 9a) se observa la aparición del PHV en la capa límite de la pared inferior (cercano a $y = 0$). En $t = 95$ (ver figura 9b) se observa que el paquete de vórtices de la capa límite superior presenta una estructura más compleja que el de la capa límite inferior, la cual presenta el SHV cuando el PHV ya se unió a los vórtices tipo anillo de la capa límite superior formando una estructura más compleja. En $t = 100$ (ver figura 9c) el paquete coherente de la capa límite inferior presenta el PHV, el SHV, el THV y el DHV, este último es visible aguas abajo del SHV. A tiempos mayores la interacción entre ambas capas límites da lugar a la turbulencia.

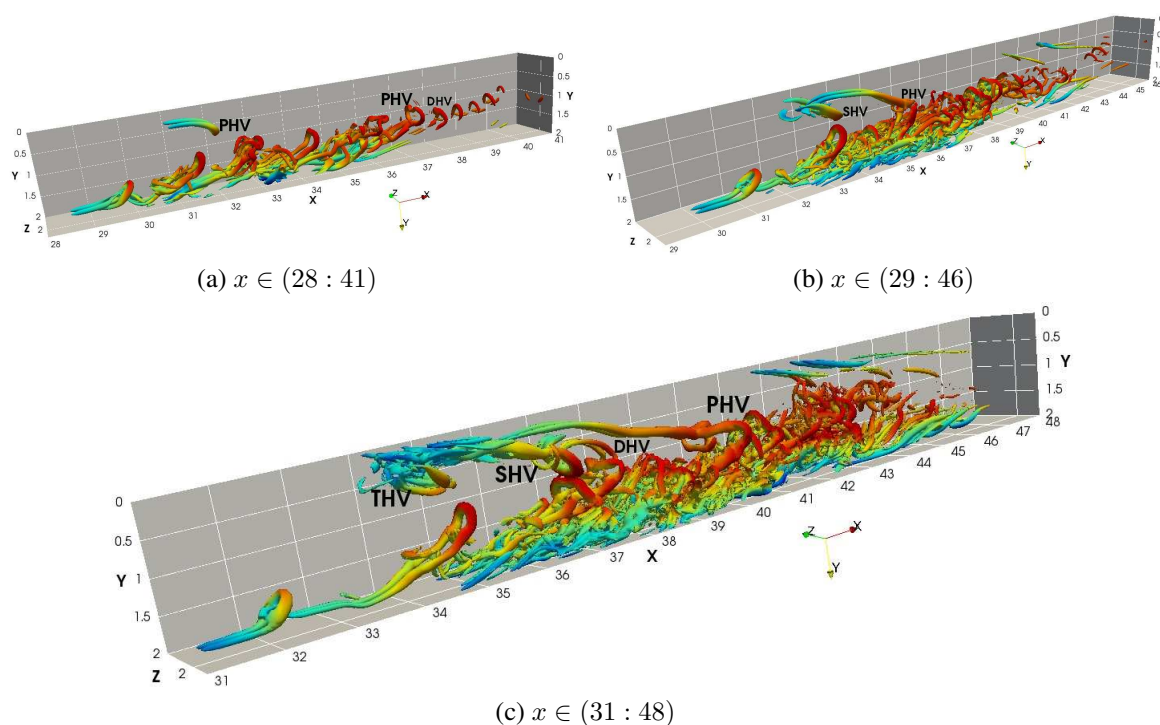


Figura 9: Vórtices en ambas paredes graficados con $\lambda_2 = -1$. En a) se grafica a $t = 90$, en b) a $t = 95$ y en c) a $t = 100$.

Entonces la interacción de los paquetes coherentes entre las dos paredes influye en el desarrollo de las vorticidades. En el caso del presente estudio, la pared superior presenta una mayor evolución de vórtices tipo anillo, mientras que la evolución de las estructuras de la pared inferior se ve afectada debido a que empieza a interactuar con el paquete coherente de la otra pared. En

la interacción se ve que el vórtice de la capa límite inferior presenta el PHV, el SHV y el THV, también se ve la generación del DHV entre el PHV y el SHV producto de la interacción con los vórtices de la capa límite superior. Esta interacción es más compleja en la transición espacial (flujo estadísticamente estacionario), como se verá en el siguiente apartado.

4.3. Estructuras de la vorticidad en flujo estadísticamente estacionario

Se estudia las estructuras de vorticidad formadas a lo largo de la dirección de la corriente para el estado estadísticamente estacionario. En la figura 10 se muestra el esquema para el canal, en el que se observa una zona laminar, una zona de transición (gobernada por las vorticidades tipo Λ y tipo *hairpin*) y finalmente una zona turbulenta a $t = 255$. Para un análisis más detallado se divide el dominio en tres partes, como se muestra en la figura 11. En la primera parte (figura 11a) se muestra la zona de la entrada donde se impone la perturbación y en la que predomina la perturbación bidimensional (posición 2), que evoluciona mediante las perturbaciones tridimensionales a las estructuras de vorticidad tipo Λ (posición 3). En la segunda parte (figura 11b) se observa el crecimiento de las estructuras de vorticidad tipo Λ que conducen a la turbulencia a través de la formación de vórtices tipo *hairpin* (posición 4). Finalmente en la figura 11c se observa el flujo turbulento (posición 5 y 6), que surgen de la combinación y crecimiento de las vorticidades tipo Λ . Estas estructuras de vorticidad son comparables con los de la figura 1 y los obtenidos con el método de LES (*Large Eddy Simulation* por Schlatter (2005)).

La formación del vórtice tipo *hairpin* y su evolución para formar el paquete coherente se da en $20 < x < 40$. En la siguiente sección se muestran los distintos tipos de vórtices que surgen del crecimiento de los vórtices tipo Λ .

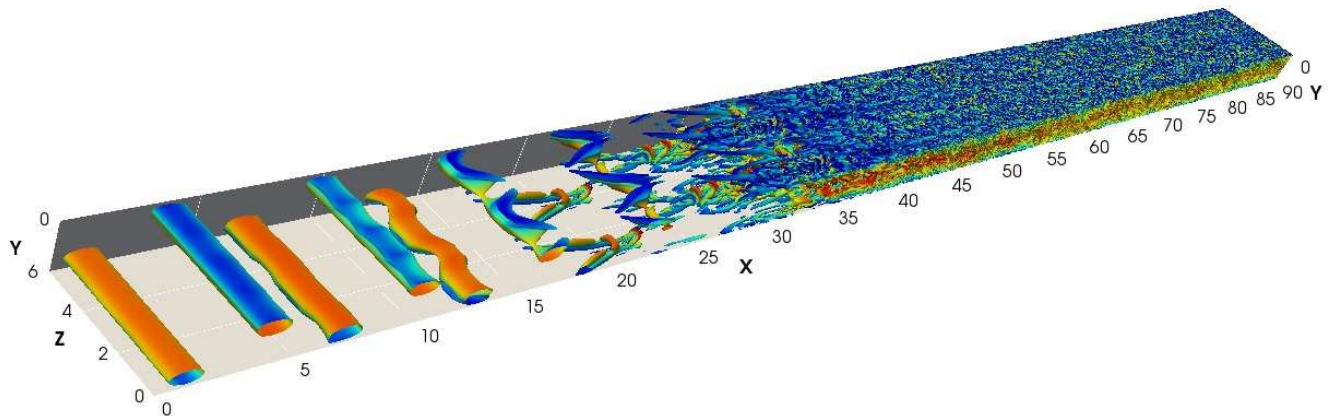


Figura 10: Crecimiento de las vorticidades a lo largo de la dirección de la corriente, graficadas para $\lambda_2 = -0,02$ al tiempo $t = 255$.

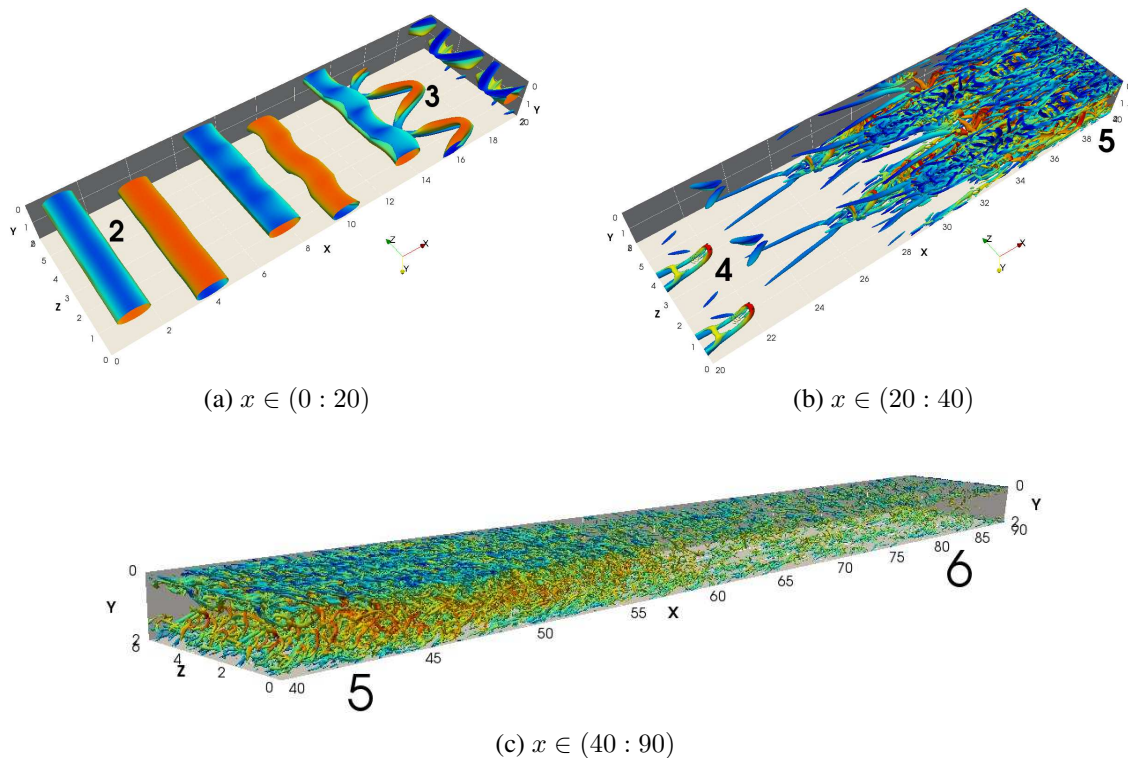


Figura 11: Crecimiento de las estructuras de vorticidad en la dirección de la corriente. En a) se grafica para $\lambda_2 = -0,02$ a $t = 245$, b) para $\lambda_2 = -0,02$ a $t = 255$ y en c) para $\lambda_2 = -2$ a $t = 255$.

4.3.1. Paquetes coherentes de vórtices tipo hairpin

Se analiza la formación de las estructuras coherentes de vórtices tipo hairpin en la transición espacial laminar-turbulenta. En este caso el objetivo es analizar la región comprendida entre la zona laminar y la turbulenta (la que corresponde a la figura 11b). Para ello se analiza la evolución de un vórtice tipo hairpin primario, el cual se muestran en la figura 12 graficada a tiempo $t = 235$. En este caso el vórtice tipo hairpin primario (PHV) presenta aguas abajo unas estructuras de vorticidad complejas en ambas capas límites que corresponden a la evolución del vórtice del periodo previo. Esto no se observa en la región transitoria debido a que se está analizando el flujo estadísticamente estacionario.

El PHV evoluciona y genera el vórtice tipo hairpin secundario (SHV) y así sucesivamente se generan los vórtices aguas arriba del vórtice primario. También se genera el QSV. Esto se ve en el tiempo $t = 240$ y $t = 245$ mostrados en las figuras 13a y 13b, respectivamente. En ambos casos es importante mencionar que la capa límite de la otra pared no influye en la evolución de estos vórtices. Los vórtices evolucionan a estructuras más complejas y empiezan a ser afectados por los vórtices de la capa límite inferior y superior del período previo (ver figura 14a a $t = 255$ y figura 14b a $t = 260$). Esto dificultó la visualización del vórtice aguas abajo (DHV).

En el estado de transición espacial laminar-turbulento, se observó las estructuras coherentes de vórtices tipo hairpin en la capa límite superior. Se observó el PHV, SHV, THV y el QSV. La visualización del DHV se dificultó debido a que el paquete coherente empieza a interactuar con el paquete coherente del periodo previo. La interacción con los vórtices de la capa límite inferior se muestra en el siguiente apartado.

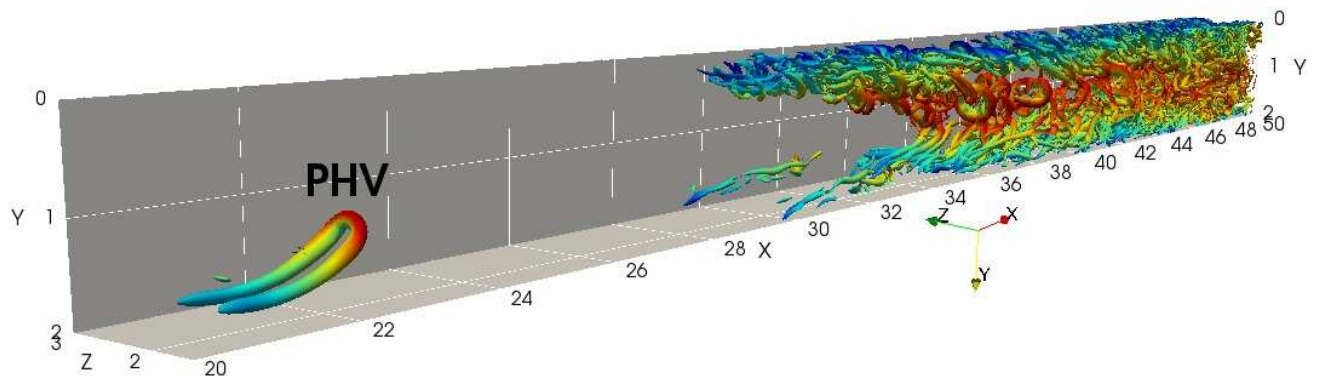
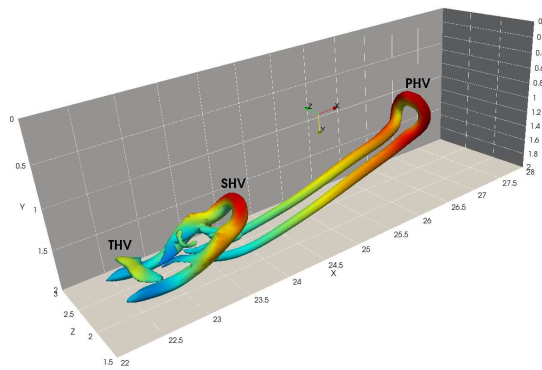
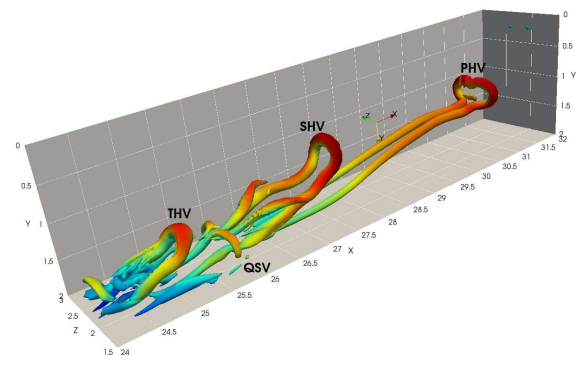


Figura 12: Vórtice tipo hairpin primario (PHV) en la región de transición espacial laminar-turbulenta. La figura es la isosuperficie de $\lambda_2 = -1$ al tiempo $t = 235$ coloreada con la velocidad en la dirección de la corriente.

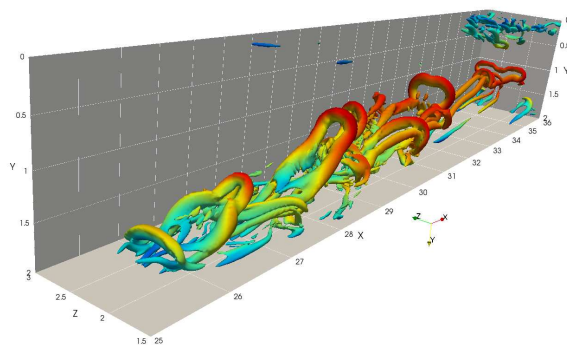


(a) $x \in (22 : 28)$

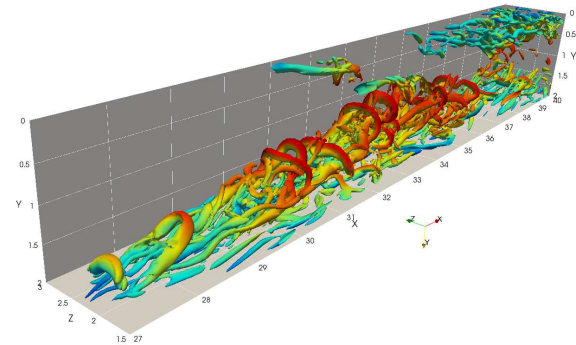


(b) $x \in (24 : 32)$

Figura 13: Estructura coherente de vórtices tipo hairpin visualizados con $\lambda_2 = -1$. En a) a $t = 240$ y en b) a $t = 245$.



(a) $x \in (25 : 36)$



(b) $x \in (27 : 40)$

Figura 14: Estructura coherente de vórtices tipo hairpin visualizados con $\lambda_2 = -1$. En a) a $t = 255$ y b) a $t = 260$.

4.3.2. Vórtices en las paredes

Conforme se avanza en el tiempo a $t = 270$ se muestra la aparición del vórtice tipo hairpin primario (PHV) en la capa límite inferior (ver figura 15) y a $t = 275$ la evolución de este vórtice.

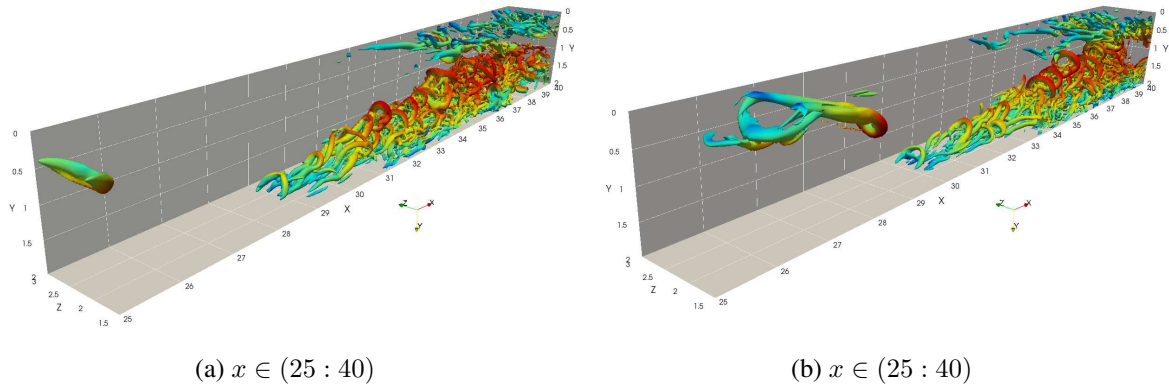


Figura 15: Estructura coherente, en ambas capas límites, de vórtices tipo hairpin visualizados con $\lambda_2 = -1$. a) a $t = 270$ y b) a $t = 275$.

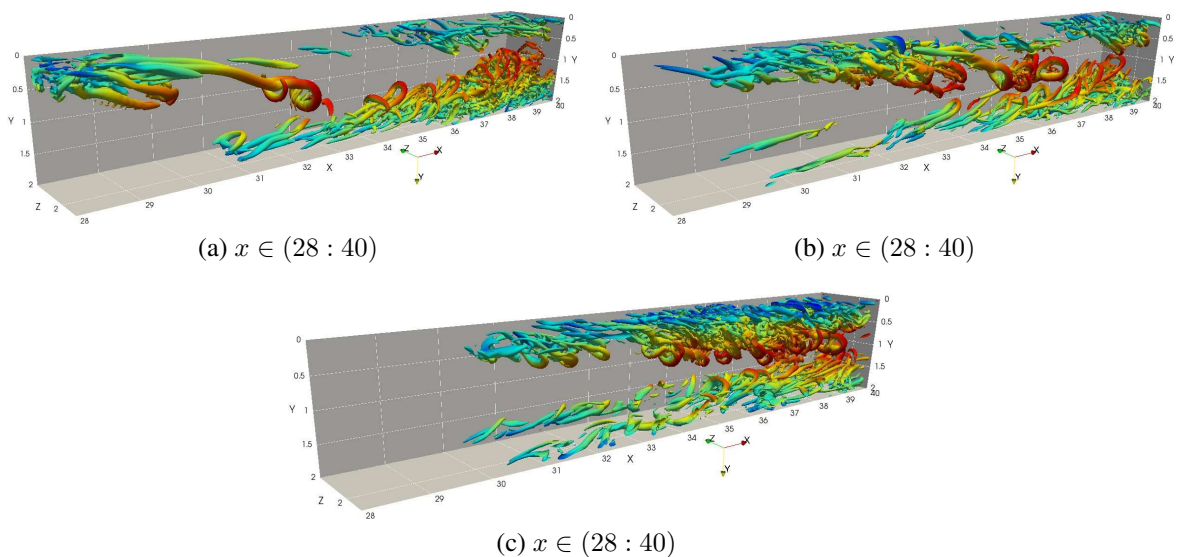


Figura 16: Interacción de los vórtices tipo hairpin de ambas capas límites visualizados con $\lambda_2 = -1$. En a) se muestra a $t = 280$, en b) a $t = 285$ y en c) a $t = 290$.

En este caso, la interacción inicial de los vórtices de ambas capas límites es más compleja que en el estado transitorio, en el sentido de que interaccionan con estructuras más complejas respecto del estado transitorio (ver figura 9 y 16), por ello no se observó el DHV entre el PHV y el SHV de la capa límite inferior producto de la interacción con la estructura coherente de la capa límite superior.

La interacción de las estructuras de vorticidad de ambas capas límites es más compleja que en el estado transitorio. Esto presumiblemente es debido a que, a diferencia del estado transitorio,

en el estado estadísticamente estacionario los paquetes coherentes de vórtices tipo hairpin son influenciados por los vórtices del periodo previo, los cuales se encuentran aguas abajo de la estructura analizada.

5. CONCLUSIONES

Se estudió en un flujo entre dos placas paralelas las estructuras de vorticidad usando la técnica de visualización de vorticidades λ_2 . El estudio se dividió en dos partes: primero se estudio en el estado transitorio (desde el inicio de la simulación hasta llegar al flujo estadísticamente estacionario) y luego en el estado estadísticamente estacionario (transición espacial laminar-turbulenta). En el primer caso se observó la formación y evolución del vórtice tipo hairpin primario (PHV) en la capa límite superior, que para el presente estudio es donde aparece por primera vez. Este vórtice surge del crecimiento del vórtice tipo Λ mediante el mecanismo de *ejection* y *sweep* producto de la cercanía de las patas del vórtice. El PHV presenta una cabeza, un cuello y dos patas. Conforme se avanza en el tiempo y en el espacio el PHV crece y se aleja de la pared, y la cabeza toma la forma tipo Ω . Luego se genera aguas arriba del PHV el vórtice tipo hairpin secundario (SHV), aguas arriba de éste el vórtice tipo hairpin terciario (THV). Mediante este mecanismo de autogeneración continúan generándose vórtices tipo hairpin aguas arriba del PHV. Se encontraron aproximadamente 6 vórtices tipo hairpin generados, esto es similar a los encontrados por Wang et al. (2016). Los nuevos vórtices tipo hairpin siempre tienen la cabeza de menor tamaño que su antecesor, siendo el de mayor tamaño el PHV. También se observó la generación del vórtice QSV, el cual se encuentra a ambos lados del THV. Finalmente se observó la generación del vórtice aguas abajo (DHV), el cual se encuentra aguas abajo del PHV. En la zona transitoria se observó que el DHV genera nuevos vórtices aguas abajo del mismo, los cuales llegan a superar el tamaño del PHV. Esto, presumiblemente, es porque en la zona transitoria el PHV no encuentra otras estructuras aguas abajo. Todas estas estructuras conforman el paquete coherente de vórtices tipo hairpin. De esta forma se encontró el paquete coherente de vórtices tipo hairpin en la zona transitoria de la capa límite superior. Adicionalmente se hizo un breve estudio de la interacción de este paquete coherente con las estructuras de vorticidad formadas en la capa límite inferior, las cuales aparecieron un instante después. En el análisis se vio que el PHV y el SHV de la capa límite inferior interaccionan con el paquete coherente de la capa límite superior. En este caso se observó aguas abajo del SHV de la capa límite inferior un vórtice tipo hairpin (DHV). A tiempos superiores, la interacción de los paquetes coherentes de ambas capas límites es más complejo.

Se analizó, además, las estructuras de vorticidad en el flujo estadísticamente estacionario. En este caso se encontraron diferencias respecto al estado transitorio. La primer diferencia encontrada fue que el DHV del estado estadísticamente estacionario no llega a generar nuevos vórtices tipo hairpin que superen el tamaño del PHV, lo cual sí pasa en el estado transitorio. Esto es porque aguas abajo del PHV se encuentran estructuras de vorticidad más complejas, las cuales corresponden al vórtice del período previo. La segunda diferencia encontrada fue en la interacción de los vórtices de ambas capas límites. En este caso la interacción de ambas estructuras es más compleja que en el estado transitorio debido a que interaccionan con un paquete coherente más complejo producto de la presencia de vórtices aguas abajo, por esto no fue visible la formación del DHV del SHV de la capa límite inferior.

REFERENCIAS

Adrian R.J. Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Physics of Fluids.*, 19:1–16, 2007.

- Adrian R.J. y Liu Z.C. Observation of vortex packets in direct numerical simulation of fully turbulent channel flow. *Journal of Visualization.*, 5(1):9–19, 2002.
- Adrian R.J., Meinhart C.D., y Tomkins C.D. Vortex organization in the outer region of a turbulent boundary layer. *Phys. Fluids*, 422:1–54, 2000.
- Chakraborty P., Balachandar S., y Adrian R.J. On the relationships between local vortex identification schemes. *J. Fluid Mech.*, 535:189–214, 2005.
- Chung Y.O. y Sung H.J. Spatial simulation of the instability of channel flow with local suction/blowing. *Phys. Fluids*, 9(11):3258–3266, 1997.
- Criminale W.O., Jackson T.L., Lasseigne D.G., y Joslin R.D. Perturbation dynamics in viscous channel flow. *J. Fluid Mech*, 239:55–77, 1997.
- Herbert T. Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances. *Phys. Fluids*, 26:871, 1983.
- Herbert T. Secondary instability of boundary layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 20:487–526, 1988.
- Jeong J. y Hussain F. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285:69–94, 1995.
- Juniper M., Henningson D., y Schmid P. Fundamentals of Flow Instability. <https://camtools.cam.ac.uk/wiki/site/c273ad86-91fe-46f8-0023-1b87d4b7eeb6/Fundamentals%20Of%20Flow%20Instability.html>, 2010. [Online; acceso Febrero-2015].
- Kao T.W. y Park C. Experimental investigations of the stability of channel flows, Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel. *J. Fluid Mech.*, 43:145–164, 1970.
- Kim K., Sung H.J., y Adrian R.J. Effects of background noise on generating coherent packets of hairpin vortices. *Physics of fluids.*, 20:1–10, 2008.
- Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., y Sargent L.M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability. *J. Fluid Mech*, 12:1, 1962.
- Kravchenko A.G. y Moin P. On the effect of numerical errors in Large Eddy simulation of turbulent flows. *J. Comp. Phys.*, 131:310–332, 1997.
- Kucala A. y Biringen S. Spatial simulation of channel flow instability and control. *J. Fluid Mech.*, 738:105–123, 2014.
- Laizet S., Lamballais E., y Vassilicos J.C. A numerical strategy to combine high-order schemes, complex geometry and parallel computing for high resolution DNS of fractal generated turbulence. *Computers and Fluids*, 39-3:471–484, 2010.
- Laizet S. y Li N. Incompat3d, a powerful tool to tackle turbulence problems with up to $O(10^5)$ computational cores. *Int. J. of Numerical Methods in Fluids*, 67-11:1735–1757, 2011.
- Lamballais E. Direct numerical simulation of a turbulent flow in a rotating channel with a sudden expansion. *J. Fluid Mech.*, 745:92–131, 2014.
- Liu C. y Chen L. Study of mechanism of ring-like vortex formation in late flow transition. En *AIAA Aerospace Science Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, páginas 1–21. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 4-7 enero, Orlando, Florida, 2010.
- Liu Z. y Liu C. Fourth order finite difference and multigrid methods for modeling instabilities in flat plate boundary layers 2D and 3D approaches. *Computers Fluids*, 23(7):955–082, 1994.
- Lundbladh A., Schmid P.J., Berlin S., y Henningson D.S. Simulations of bypass transition for spatially evolving disturbances. En *74th Fluid Dynamics Symposium on Application of Direct and Large Eddy Simulation to Transition and Turbulence held*. Chania, Crete, Greece, 1994.
- Machaca Abregu W.I. *Esquemas compactos de alto orden para el estudio de la transferencia de calor en régimen de transición*. Tesis de Maestría en Ingeniería, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, 2015.

- Meinhart C.D. *Investigation of turbulent boundary-layer structure using particle image velocimeter*. PhD thesis, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1994.
- Meinhart C.D. y Adrian R.J. On the existence of uniform momentum zones in a turbulent boundary layer. *Phys. Fluids*, 7:694–696, 1995.
- Moin P. *Fundamentals of engineering numerical analysis*. Cambridge university press, Stanford University, U.S.A., 2010.
- Orr W.M. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part I: A perfect liquid. Part II: A viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad.*, 27:9–138, 1907.
- Orszag S.A. y Patera A.T. Subcritical transition to turbulence in plane channel flow. *Physical Review Letters*, 45:989–993, 1980.
- Pope S.B. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- Reynolds O. On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, 174:953–982, 1883.
- Richards S.K., Zhang X., Chen X.X., y Nelson P.A. The evaluation of non-reflecting boundary condition for duct acoustic computation. *Journal of Sound and Vibration*, 270:539–557, 2004.
- Robinson S.K. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23:601, 1991.
- Robinson S.K. The kinematics of turbulent boundary layer structure. *NASA TM-103859*, 1993.
- Saiki E.M., Biringen S., Danabasoglu G., y Streett C.L. Spatial simulation of secondary instability in plane channel flow: comparison of K- and H-type disturbances. *J. Fluid Mech.*, 253:485–507, 1993.
- Sayadi T., Hamman C.W., y Moin P. Direct numerical simulation of H-type and K-type transition to turbulence. En *Annual Research Briefs 2011*, páginas 109–121. Center for Turbulence Research, 2011.
- Schlatter P.C. *Large-Eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow*. PhD tesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2005.
- Schlatter P.C., Stolz S., y Kleiser L. Large-eddy simulation of spatial transition in plane channel flow. *Journal of Turbulence*, 7(33):1–24, 2006.
- Schlichting H. Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. *Z. Angew. Math. Mech.*, 13:171–174, 1933.
- Schmid P.J. y Henningson D.S. A new mechanism for rapid transition involving a pair of oblique waves. *Phys. Fluids A*, 4(9):1986–1989, 1992.
- Schmid P.J. y Henningson D.S. Stability and Transition in Shear Flows. En *Applied Mathematical Sciences*, volumen 142. Springer, 2001.
- Schubauer G.B. y Skramstad H.K. Laminar boundary layer oscillations and the stability of laminar flow. *J. Aeronaut. Sci.*, 14:69–78, 1947.
- Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen. En *Atti. del 4. Congr. Internat. dei Mat. III*, páginas 116–124. Roma, 1908.
- Streett C.L. y Macaraeg M.G. Spectral multi-domain for large-scale fluid dynamics simulations. *Applied Numerical Mathematics*, 6:123–139, 1990.
- Theodorsen T. Mechanism of turbulence. En *Proc. Second Midwestern Conj. of Fluid Mechanics*, páginas 1–19. Ohio State University, Columbus, Ohio, 1952.
- Tollmien W. Über die Entstehung der Turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1:21–44, 1929.
- Trefethen N. *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, Philadelphia, U.S.A., 2000.
- Wang Y., Al-Dujaly H., Yan Y., Zhao N., y Liu C. Physics of multiple level hairpin vortex

structures in turbulence. *Physics, Mechanics and Astronomy, Science China*, 59(2):1–11, 2016.

Zhou J., Adrian R.J., y Balachantar S. Autogeneration of near-wall vortical structures in channel flow. *Physics of Fluids.*, 8(1):288–290, 1996.

Zhou J., Adrian R.J., Balachantar S., y Kendall T.M. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *J. Fluid Mech.*, 387:353–396, 1999.