

## MODELO DE CONTACTO MULTIESCALA APLICADO A COMPONENTES MECÁNICOS CON SUPERFICIES DE CONTACTO RUGOSAS

**Pablo E. Modini<sup>a</sup>, Pablo J. Sánchez<sup>b</sup>, Alberto Cardona<sup>b</sup> y Federico J. Cavalieri<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería GIMNI, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Santa Fe, Lavaise 610, 3000 Santa Fe, Argentina, gimni@frsf.utn.edu.ar, <http://gimni.frsf.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Centro de Investigación de Métodos Computacionales CIMEC, Universidad Nacional del Litoral - CONICET, Colectora Ruta Nac Nro 168 Km 0 Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, cimec@santafe-conicet.gov.ar, <http://www.cimec.santafe-conicet.gov.ar>*

**Palabras Clave:** Contacto, Rugosidad, Multiescala, Elementos Finitos, Algoritmo Mortar.

**Resumen.** En este trabajo se propone una formulación de contacto mecánico para superficies rugosas basado en técnicas de modelado multiescala. La información microscópica de dichas superficies se incorporan en descripciones macroscópicas por medio de una estrategia de homogenización o promediado. Se pretende conocer cuál es la influencia de la rugosidad en las tensiones y deformaciones a través de una ley que vincula las presiones de contacto con la distancia entre los planos medios de las superficies rugosas. Finalmente, con la ley obtenida se resolvió un ejemplo de aplicación industrial.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas que involucran el contacto mecánico tienen gran relevancia en actividades relacionadas con la ingeniería mecánica, civil, bio-ingeniería, pudiendo citarse el diseño de engranajes (Gamez-Montero et al., 2005), procesos de embutición (Bathe, 2004), fatiga por contacto (Madge et al., 2007), entre otras.

Unos de los objetivos de resolver en forma precisa el contacto, consiste en comprender cómo influye en las deformaciones y en las tensiones de un determinado componente mecánico. Por ejemplo, el proceso de desgaste que condiciona la vida de un sistema mecánico depende principalmente de la presión de contacto generada (Archard, 1953).

Estudios experimentales a escalas muy reducidas han demostrado que las características de las presiones de contacto están relacionadas con las propiedades de la compleja textura de las interfaces en contacto, condiciones de operación, dureza, tipo de materiales y tratamientos de endurecimiento superficial (Kragelsky et al., 1982).

La realización de ensayos experimentales resulta de gran utilidad para la optimización de diseños, pero no permite aislar los efectos a un nivel micro y analizarlos individualmente, lo que dificulta la predicción de las dependencias que existen entre ellos. Algunas formulaciones teóricas tales como las que se presentan en los trabajos de Greenwood y Williamson (1966), Zavarise et al. (1992) y Kragelsky et al. (1982), estudian el contacto entre dos cuerpos teniendo en cuenta la rugosidad superficial. En el caso del modelo de Greenwood y Williamson (1966), se asume que el radio de curvatura de las asperezas de las interfaces de contacto se mantiene constante. En la práctica, se utiliza un radio de curvatura promedio que se determina a partir de mediciones de la rugosidad de la superficie (McCool, 1986). Como se menciona en Majumdar y Bhushan (1990), la utilización de un solo radio de curvatura es algo ambiguo y es dependiente de la escala con que se esté midiendo el radio.

Como alternativa a los experimentos físicos y soluciones analíticas, la simulación numérica permite separar y analizar con relativa facilidad los diferentes procesos y parámetros que intervienen en el contacto, y ofrecer una visión detallada de los factores más influyentes donde las soluciones analíticas o experimentales resulten limitadas o inaplicables. Sin embargo, en el caso de que se desee estudiar macroscópicamente el contacto mecánico considerando la rugosidad, efectos de lubricación, etc., resulta una tarea difícil de ser modelada debido a que el sistema de ecuaciones resultante es altamente no lineal y puede estar mal condicionado. Un camino posible para superar estas dificultades consiste en el desarrollo de nuevos modelos fenomenológicos que incluyan un gran número de variables internas capaces de capturar macroscópicamente los mecanismos microscópicos más relevantes. La principal limitación de esta metodología radica en la dificultad asociada con la caracterización de las leyes de evolución de las variables internas adicionales y, desde el punto de vista de la mecánica computacional, una mayor cantidad de variables internas generan un aumento en la dimensión del problema que se requiere resolver, agregando mayores costos computacionales y dificultades a la solución. Una segunda alternativa consiste en la adopción de modelos de contacto mediante los cuales la información microscópica puede ser incorporada en las descripciones macroscópicas utilizando técnicas de homogeneización o promediado, similar a la que se utiliza en modelos constitutivos de materiales (Bandeira et al., 2004).

En el marco del Método de los Elementos Finitos (MEF) existen múltiples aproximaciones para el estudio del contacto. Desde un punto de vista de la descripción cinemática del contacto, una técnica ampliamente difundida es la del nodo-superficie, en la cual un nodo de la superficie de un cuerpo, al que se lo denomina esclavo, se relaciona con una superficie del otro cuerpo, al

que se lo denomina maestro (Parisich, 1989). Otra aproximación es la de los métodos superficie-superficie, que en su mayoría utilizan alguna clase de superficie intermedia, o proyección de superficie, e integran el trabajo virtual asociado al contacto con alguna interpolación en la presión. En este contexto, el método superficie-superficie tipo mortero permite obtener tensiones de contacto de variación espacial suave, con respecto a los nodo-superficie, con lo cual se mejora la precisión con que se estiman las presiones de contacto (Cavaliere et al., 2012).

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el comportamiento micro-mecánico a través del MEF y técnicas de homogeneización, con el objetivo final de obtener una ley macroscópica que relacione las presiones de contacto y la rugosidad en un determinado par bimetalico. Para ello, se propuso una geometría lo suficientemente pequeña para mantener ciertas características de rugosidad de las superficies propuestas. La superficie rugosa fue generada desplazando los nodos de la superficie de contacto del modelo por medio de un algoritmo programado en Octave (Eaton et al., 2014). Luego, mediante una aproximación de contacto tipo mortero basado en un Lagrangiano Aumentado como el que presenta Cavaliere y Cardona (2013), se registraron las presiones de contacto y la distancia a los planos medios de las superficies rugosas, donde se obtuvo una función que vincula ambas variables. Finalmente, se propuso un ejemplo de aplicación con interés industrial, el contacto entre una válvula de motor de combustión interna y su asiento. En este ejemplo se analiza la variación del campo de presiones de contacto cuando se incorpora la rugosidad.

## 2. METODOLOGÍA

### 2.1. Descripción del problema y del algoritmo de contacto utilizado

El movimiento de dos cuerpos contactores  $B^\alpha$  con  $\alpha = 1, 2$  se expresa por el mapeo,

$$\chi : \Omega^\alpha \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^3 \quad (1)$$

y la posición actual de las partículas materiales se calcula como,

$$\mathbf{x}^\alpha = \chi^\alpha(X^\alpha, t) \quad (2)$$

La porción de la frontera de contacto  $\Gamma_c$  en la configuración de referencia está dada por una intersección de las superficies  $\Gamma_c^\alpha$ , lo que sería  $\Gamma_c = \Gamma_c^1 \cap \Gamma_c^2$ , ver Fig. 1. Las mismas fronteras en la configuración actual son  $\gamma_c^1$  y  $\gamma_c^2$ . La convención adoptada en este trabajo para la definición de las superficies mortero y no mortero es la siguiente: supra-índice 1 denota la superficie no mortero o esclava, en tanto que supra-índice 2 representa la superficie mortero o maestro. La discretización del dominio se realiza mediante el Método de Elementos Finitos, de esta forma la malla de la superficie en contacto puede ser parametrizada como,

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{A=1}^{n^\alpha} N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{x}_A^\alpha \quad (3)$$

donde  $\mathbf{x}^\alpha \in \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathfrak{R}^3$ ,  $\mathbf{x}_A^\alpha \in \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathfrak{R}^3$  son las coordenadas locales,  $n^\alpha$  es el número de nodos de la malla en  $\Gamma_c^\alpha$  y  $N^\alpha : \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathfrak{R}$  son las clásicas funciones de forma y  $\boldsymbol{\xi}^\alpha$  son las coordenadas locales. Cuando los cuerpos  $B^1$  y  $B^2$  interactúan mecánicamente sobre la superficie en donde se efectúa el contacto, la energía potencial de contacto queda definida por,

$$\Pi^c = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\gamma_{c^\alpha}} \mathbf{t}^\alpha \cdot \mathbf{x}^\alpha d\gamma \quad (4)$$

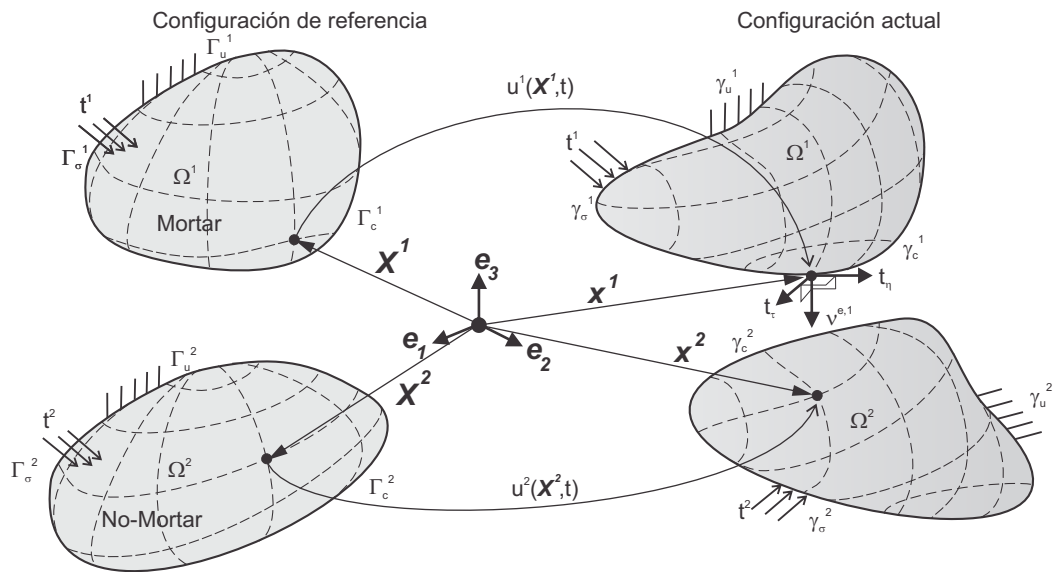


Figura 1: Notación utilizada en el método mortor para los cuerpos en contacto

donde  $\mathbf{t}^\alpha$  es el vector de tracción de Cauchy. La Ec.(4) puede reescribirse asumiendo que existe conservación de la cantidad de movimiento lineal en la interfaz de contacto  $\mathbf{t}^1 d\gamma_c^1 = -\mathbf{t}^2 d\gamma_c^2$ , entonces,

$$\Pi^c = \int_{\gamma_c^1} \mathbf{t}^1 \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\gamma \tag{5}$$

Si se incluyen las parametrizaciones de las superficies de contacto, Ec.(3), y la del vector de tracción definida como

$$\mathbf{t} = \sum_{A=1}^{n^1} N_A^1(\xi^1) \mathbf{t}_A \tag{6}$$

entonces, la energía potencial de contacto sin tener en cuenta los efectos de fricción se aproxima de la siguiente manera,

$$\Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} t_{NA} \boldsymbol{\nu}_A \cdot \left( \sum_{B=1}^{n^1} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\xi^1) N_B^1(\xi^1) d\gamma \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n^2} \int_{\gamma_c^2} N_A^1(\xi^1) N_C^2(\xi^2) d\gamma \mathbf{x}_C^2 \right) \tag{7}$$

siendo  $\boldsymbol{\nu}_A$  el vector normal a la interface de contacto no mortor del nodo  $A$  y,  $t_{NA}$  el vector tracción de Cauchy en el nodo  $A$  con dirección  $\boldsymbol{\nu}_A$ . Luego, la interpenetración  $\mathbf{g}_A$  se define como

$$\mathbf{g}_A = \sum_{B=1}^{n^1} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\xi^1) N_B^1(\xi^1) d\gamma \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n^2} \int_{\gamma_c^2} N_A^1(\xi^1) N_C^2(\xi^2) d\gamma \mathbf{x}_C^2 \tag{8}$$

Finalmente, la energía potencial de contacto escrita de forma compacta resulta

$$\Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} t_{NA} g_{NA} \tag{9}$$

donde  $g_{NA}$  es la interpenetración en la dirección de  $\boldsymbol{\nu}_A$ . La solución al problema de contacto sin fricción en el marco de una formulación de contacto tipo mortor se escribe como,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \operatorname{arginf} \left( \Pi^{\text{int}}(\mathbf{U}) + \Pi^{\text{ext}}(\mathbf{U}) + \Pi^c(\mathbf{U}) \right), \\ \text{s.t. } &g_{NA} \geq 0, \quad t_{NA} \geq 0, \quad t_{NA} g_{NA} = 0 \quad A = 1, \dots, n^1. \end{aligned} \tag{10}$$



donde  $\Pi^{\text{int,ext}}(\mathbf{U})$  es la energía potencial debido a las cargas exteriores e interiores, y  $\mathbf{U}$  es el vector global de desplazamientos. La segunda línea de la ecuación establece las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el contacto, las que se expresan en la forma discreta para el nodo  $A$ . La Ec.(10), puede regularizarse por medio de una aproximación dual mixta tal como se propone en Cavalieri et al. (2012).

## 2.2. Precedimiento de homogeneización

Para llevar a cabo el proceso de homogeneización, se proponen dos sólidos con rugosidad en la interface de contacto como se muestra en la Fig. 2. Al cuerpo superior se le impone un desplazamiento, en tanto que al cuerpo inferior se le restringen todos los movimientos en su cara inferior.

El algoritmo de contacto mortar presentado en la Sec. 2.1 y el algoritmo que resuelve el sistema de ecuaciones fue modificado para que en cada paso de tiempo se calcule la distancia entre los planos medios de las superficies rugosas aquí denotadas con la letra  $d$ , como así también la resultante de las reacciones  $R_N$  de cada nodo  $k$ , donde se impone el desplazamiento, ver Fig. 2. Entonces,

$$R_N = \sum_k R_{Nk} \tag{11}$$

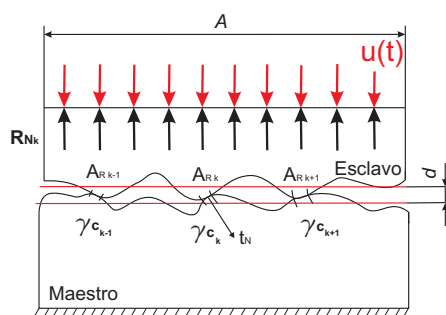


Figura 2: Interfaz de contacto.

Considerando el equilibrio entre los cuerpos, es claro que la fuerza de contacto normal  $F_N$ , donde los picos de la superficie rugosa se tocan, tiene que ser igual a las reacciones normales que se generan en la cara aparente de contacto de área  $A$ , donde el desplazamiento es impuesto, esto es,

$$F_N = R_N \tag{12}$$

Entonces, la fuerza resultante  $R_N$  puede ser utilizada junto con el área  $A$  para obtener una presión de contacto media,

$$p_N = R_N/A \tag{13}$$

Este procedimiento es conocido como homogeneización de las presiones de contacto. Luego, puesto que  $R_N$  depende de la distancia media  $d$ , entonces la presión de contacto se relaciona con  $d$  por medio de alguna ley  $p_N = p_N(d)$  que es necesario determinar.

La formulación que se propone en este trabajo es aplicable a problemas donde las fuerzas de fricción no afectan considerablemente a la distribución de presión. Esta limitación es utilizada por otros autores, por ejemplo Sfantos y Aliabadi (2007) y es válida para una amplia gama de aplicaciones de ingeniería (Johnson, 1987). La simplificación de no considerar los efectos de fricción, produce una formulación más simple con mejores propiedades de convergencia del

problema no lineal. Es claro que, el rango de aplicación de la formulación queda restringido, sin embargo, la incorporación de las ecuaciones de fricción no implica una modificación sustancial al código desarrollado.

Para la generación de una superficie de contacto rugosa, se programó un algoritmo especial en Octave (Eaton et al., 2014), ver Apéndice, donde los nodos de la interface, previamente importados de un archivo de datos generado en un programa de elementos finitos son desplazados siguiendo una determinada función. Por ejemplo, en este trabajo se propone,

$$Z'(x, y) = Z + A_m \left[ \sin \left( 350000 \frac{\pi}{180} (x + y) \right) + \cos \left( 350000 \frac{\pi}{180} (x + y) \right) \right] \quad (14)$$

donde  $Z'$  es la coordenada modificada y  $Z$  es la coordenada original de un nodo de la cara que entrará en contacto, en tanto que,  $A_m$  es la amplitud de la rugosidad. El sistema de ejes cartesianos utilizado para generar la Ec.(14) se muestra en la Fig. 4-a. La forma de la Ec.(14), puede ser modificada en función de los resultados obtenidos mediante mediciones con perfilómetros para que represente con mayor exactitud la topología de una superficie de una pieza sobre la que se desea estudiar el contacto. En particular, la Ec.(14) con un valor de  $A_m = 3[\mu\text{m}]$  representa una rugosidad periódica con una amplitud similar a la obtenida luego de un proceso de rectificado (Rodríguez Montes et al., 2006). Una gráfica de la superficie rugosa obtenida por medio de la Ec.(14) se muestra en la Fig. 3.

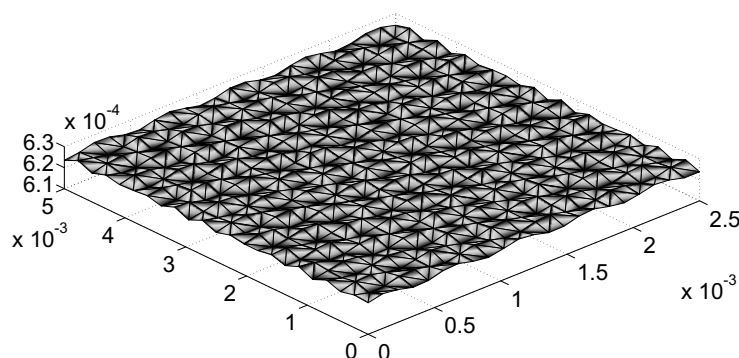


Figura 3: Interfaz de contacto

### 3. EJEMPLOS NUMERICOS

Para este trabajo, la geometría de los dos sólidos fue creada en el código de elementos finitos OOfelie (2010). Se utilizaron elementos finitos estándar hexaédricos refinando la malla en la zona de contacto. Las dimensiones de los cuerpos, la topología de la malla y las condiciones de borde son las que se muestran en la Fig. 4-a.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que las dimensiones de los cuerpos se eligen de modo de poder captar con cierta regularidad la geometría de la superficie rugosa. Para ambos cuerpos, se propuso un material del tipo acero con un comportamiento elástico lineal, módulo de elasticidad  $E = 2,1 \times 10^{11}$  [Pa] y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Las simulaciones de contacto se efectuaron posicionando un cuerpo por encima del otro, de tal forma que el cuerpo superior, se acerque al inferior con un campo de desplazamientos impuesto  $u(t)$ , ver Fig. 4-b. Notar que en los primeros 0.5 segundos el desplazamiento impuesto presenta una pendiente mucho mayor que en el resto del tiempo. Esto se debe a que hasta los 0.5 segundos, los cuerpos

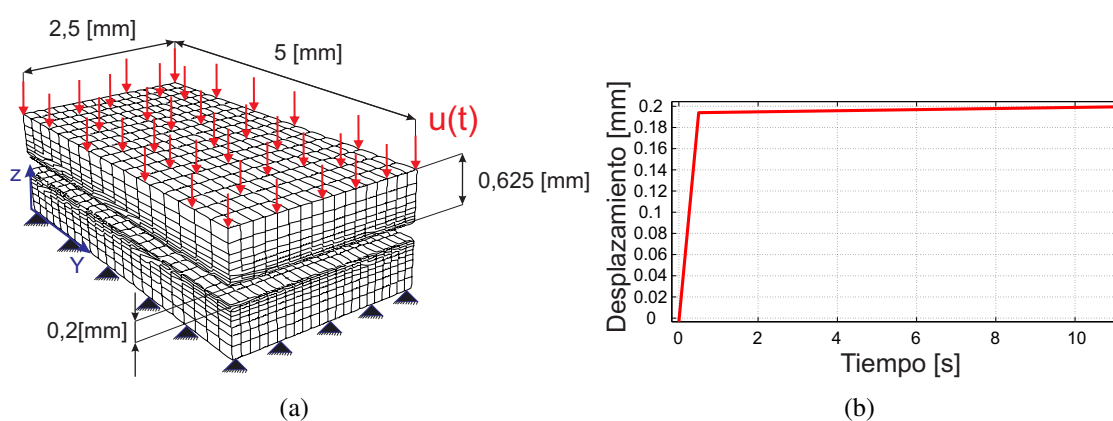


Figura 4: (a) Topología de malla y condiciones de borde propuestas. (b) Ley propuesta para el desplazamiento impuesto en la cara superior.

no entran en contacto y, para economizar tiempos y recursos computacionales, se utiliza dicha pendiente en los primeros 5 pasos de tiempos. El resto de la simulación se realizó en un intervalo de tiempo de 9 segundos con un paso de tiempo de 0.05 segundos.

### 3.1. Resultados

A partir de los resultados numéricos se observa que, la relación entre la presión media de contacto calculada según la Ec.(13) y la distancia a los planos medios  $d$ , es la que se muestra en la Fig. 5.

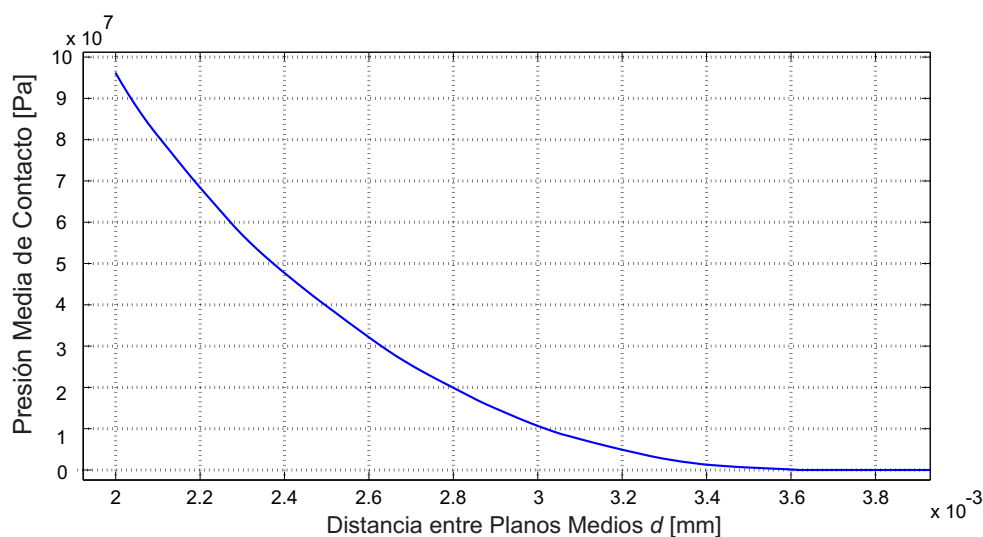


Figura 5: Relación entre presión media y distancia entre los planos medios  $d$

La curva de la Fig. 5 indica que a medida que la distancia entre los planos medios disminuye la presión de contacto se incrementa. Notar que el valor máximo de la presión media no supera la tensión de fluencia del acero (Mott, 2006), por lo que el material no plastifica y la ley de Hooke no pierde validez.

Las Figs. 6 a-b-c-d muestran las presiones de contacto para distintos pasos de tiempo. Se puede observar como a medida que los cuerpos se acercan y empieza a producirse el contacto, las zonas donde ambos cuerpos se tocan es cada vez mayor. Las presiones de contacto están

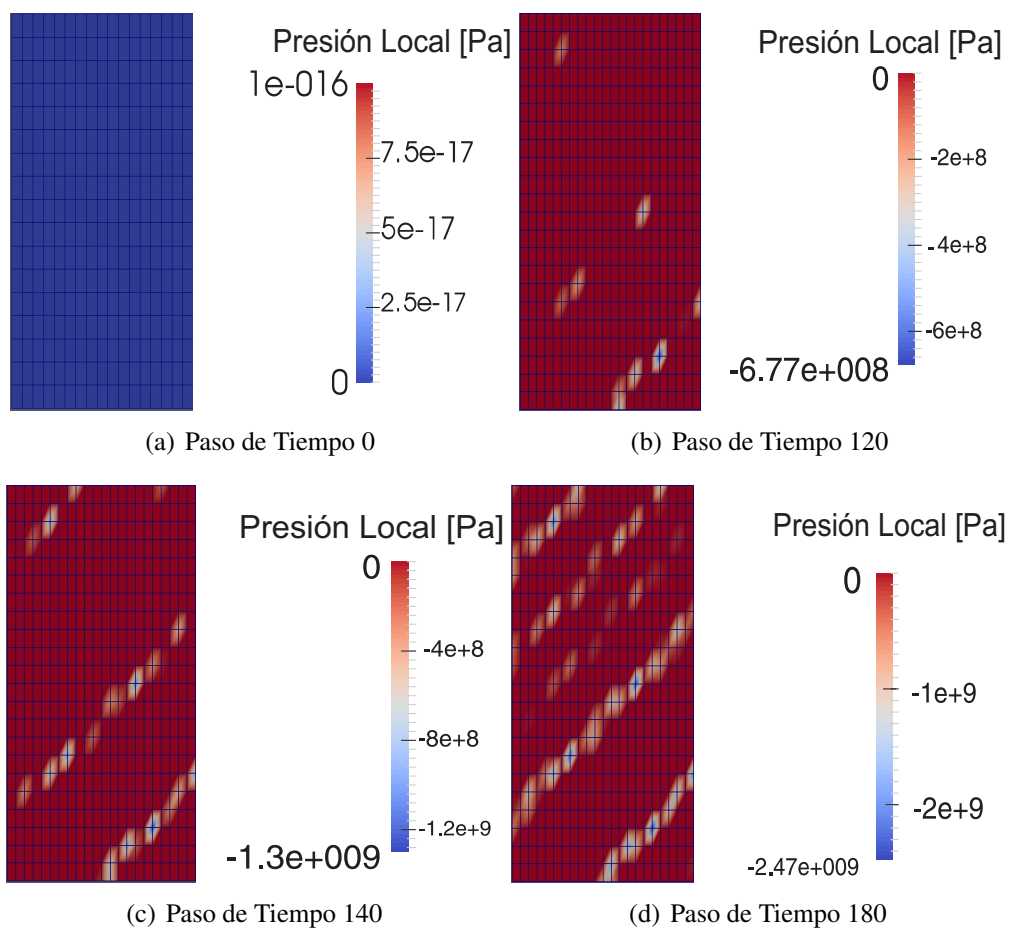


Figura 6: Presiones de contacto para distintos pasos de tiempo. (a) No existe contacto. (b) Instante inicial donde comienza el contacto. (c) Aumenta la zona de contacto. (d) Último paso, las presiones de contacto se encuentran cerca de la fluencia del material.

localizadas en dichos lugares con valores superiores a la presión media, como es de esperar. Luego, para establecer una ley cerrada que vincule la presión de contacto con la distancia entre los planos medios de las superficies rugosas de los cuerpos, se ha realizado una interpolación a la curva de la Fig. 5. La gráfica de la curva interpolante obtenida con el siguiente polinomio

$$p_N(d) = (4,395 \times 10^{13})d^2 - (3,025 \times 10^{11})d + 5,219 \times 10^8 \tag{15}$$

se muestra en la Fig. 7.

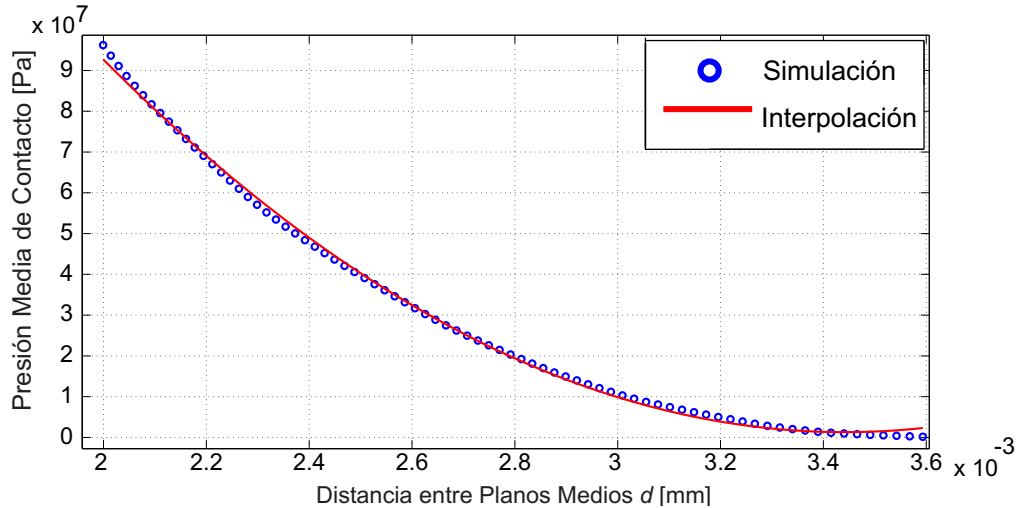


Figura 7: Relación entre presión media y distancia entre los planos medios d

### 3.2. Validación

Para la validación de los resultados obtenidos se transformó la ley obtenida  $p_N = p_N(d)$  a la forma  $p_N = p_N(g_N)$  considerando la siguiente ecuación,

$$d = \xi - g_N \tag{16}$$

donde  $\xi$  es la distancia entre los planos medios de las superficies rugosas calculado cuando se produce el primer contacto, por lo tanto, es un valor constante, ver Fig. 8.

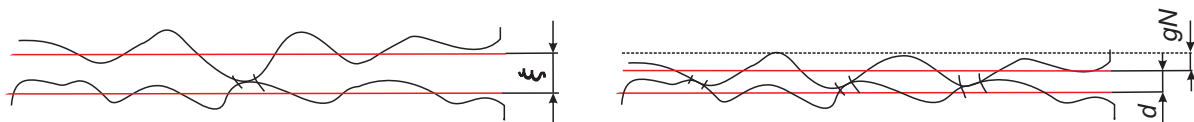


Figura 8: Nomenclatura. Interfaz de contacto

El polinomio obtenido es,

$$p_N(g_N) = (4,395 \times 10^{13})(\xi - g_N)^2 - (3,025 \times 10^{11})(\xi - g_N) + 5,219 \times 10^8 \tag{17}$$

Con la nueva relación  $p_N(g_N)$  se reprodujo el modelo con las mismas condiciones de borde que se ha presentado en el ejemplo numérico de la Sec.3; posicionando los cuerpos a la distancia inicial que había entre los planos medios de las superficies rugosas; pero en esta ocasión con las caras de contacto planas. Se utilizó un algoritmo de contacto formulado con el método de

penalidad, donde el factor de penalidad varía según la curva  $p_N = p_N(g_N)$ . Luego, se representaron las presiones de contacto medias en función del tiempo de simulación y se compararon con las que se obtuvieron en el ejemplo numérico original. Ambas curvas muestran muy buena correlación, ver Fig. 9.

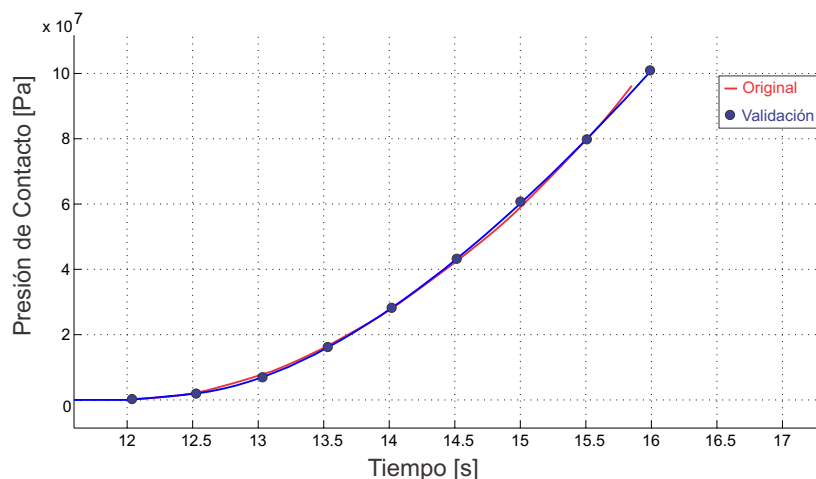


Figura 9: Validación de resultados.

#### 4. EJEMPLO DE APLICACIÓN. CONTACTO ENTRE UNA VÁLVULA DE MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA Y EL ASIENTO

El siguiente ejemplo corresponde al estudio de contacto con rugosidad entre una válvula de motor de combustión interna y su asiento. Este es un caso de interés industrial donde la consideración de la rugosidad condiciona el diseño del componente desde un punto de vista del desgaste. De igual manera que para ejemplo de validación, Sec. 3.2, se utilizó un algoritmo de contacto formulado con un método de penalidad, donde los datos del modelo de contacto micro se incorporan en el factor de penalidad del modelo de contacto macro mediante la curva  $p_N = p_N(g_N)$ . Debido a: la geometría axial, las fijaciones y las solicitaciones, se propuso un modelo de revolución de 5 grados con el objetivo de ahorrar tiempo de cálculo. La topología de malla y las condiciones de borde se detallan en la Fig. 10. Se consideraron únicamente las solicitaciones mecánicas, esto es, debida a la presión originada por el proceso de combustión. Los resultados obtenidos con esta metodología fueron comparados con los que se obtuvieron utilizando un algoritmo de contacto formulado con el método de multiplicadores de Lagrange sin consideración de la rugosidad. Las soluciones numéricas para las presiones de contacto para ambos casos se muestran en la Fig. 11-a-b. La Fig.(12) muestra una comparación de las presiones de contacto para un nodo *A* del asiento. Se puede observar que la presión de contacto en el modelo que considera la rugosidad es menor comparado con el caso de multiplicadores de Lagrange, sin consideración de la rugosidad. La razón de esta diferencia está dada por el hecho de que el área de contacto es mayor en el caso del modelo con rugosidad por efecto la regularización del algoritmo de contacto dado por la ley  $p_N(g_N)$ , Ec.(17).

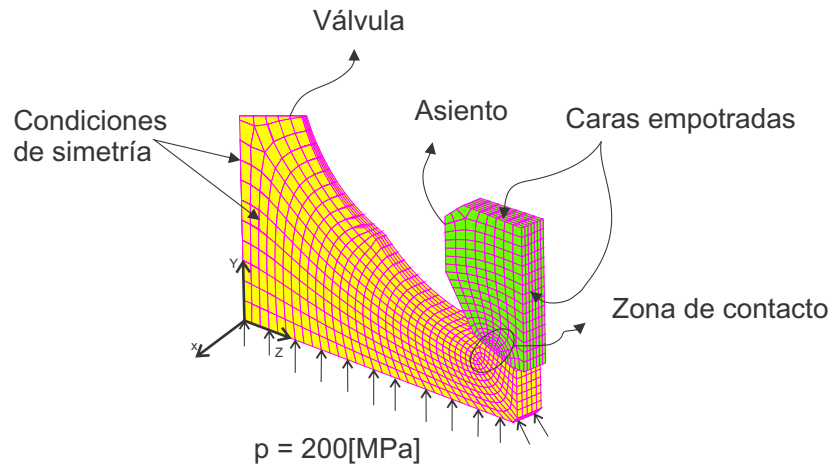
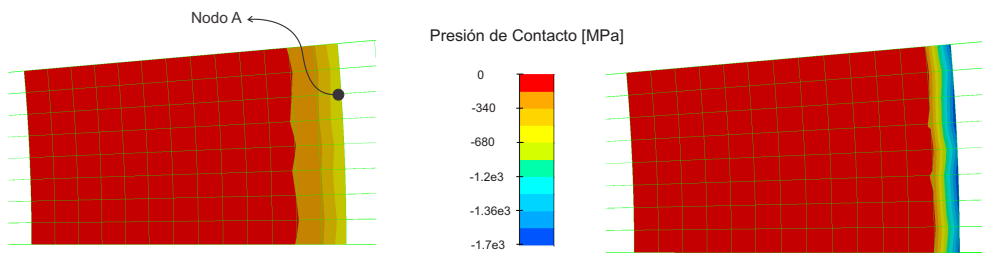


Figura 10: Topología de malla y condiciones de borde.



(a) Método de penalidad con información del modelo micro.

(b) Método de multiplicadores de Lagrange.

Figura 11: Resultados de ejemplo de aplicación en válvula de motor de combustión interna.

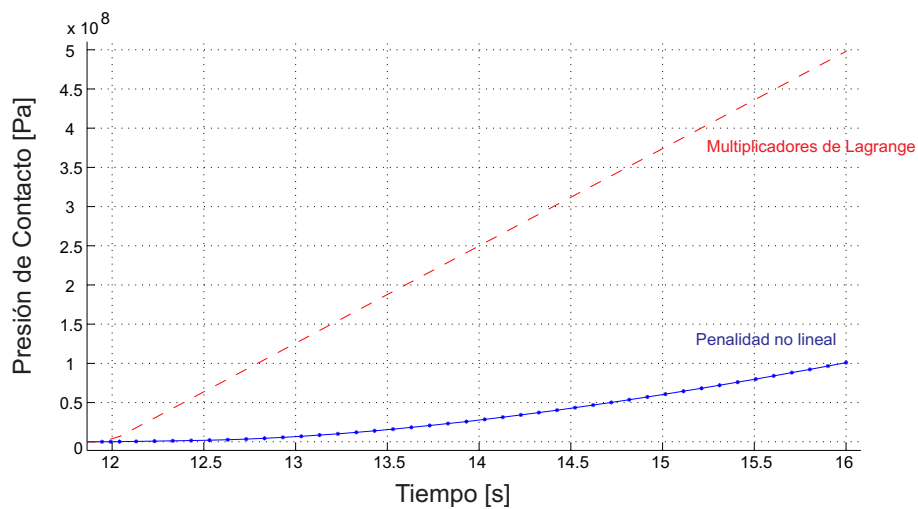


Figura 12: Validación de resultados.



## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un algoritmo de contacto tipo mortar utilizando técnicas de modelado multiescala considerando efectos de rugosidad. A partir de un proceso de homogeneización, se obtuvo una relación cuadrática entre la presión de contacto media y la distancia a los planos medios de las superficies rugosas. Luego, con esta ley, se propuso un ejemplo de aplicación industrial; el contacto de una válvula de motor de combustión interna con el asiento; donde se consideró los efectos de la rugosidad para el análisis de las presiones de contacto.

Se pretende resaltar la importancia tecnológica que tiene el conocimiento de leyes que permitan modelar la dependencia entre las presiones de contacto y la rugosidad de las superficies, ya que evitaría la generación de mallas extremadamente finas para modelar exactamente la rugosidad en toda la superficie de contacto. Esto, representa una ventaja adicional al momento de diseñar o optimizar componentes mecánicos donde los efectos de la rugosidad condiciona su vida útil. En otras palabras, se podrían evaluar las tensiones o deformaciones en componentes con distintas rugosidades sin recurrir a numerosos ensayos experimentales.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento de la Universidad Tecnológica Nacional proyecto PID-UTN-3527 y del Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) PIP 1105.

## REFERENCIAS

- Archard J. *Contact and rubbing flat surfaces*. J. Appl. Phys, 1953.
- Bandeira A.A., Wriggers P., y de Mattos Pimenta P. Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3d deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(2):173–195, 2004. ISSN 1097-0207. doi:10.1002/nme.867.
- Bathe K. On the state of finite element procedures for forming processes. En S.e.a. Glosch, editor, *Proceedings of the NUMIFOR'04, material processing and design: modeling, simulation and applications*, página 34. American Institute of Physics, Melville, 2004.
- Cavaliere F. y Cardona A. An augmented lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contact problems. 93(27):420–442, 2013.
- Cavaliere F., Fachinotti V., y Cardona A. A mortar contact algorithm for three-dimensional elasticity problems. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 28(2):80–92, 2012.
- Eaton J.W. and Bateman D., Hauberg S., y Wehbring R. GNU octave version 3.8.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations. *CreateSpace Independent Publishing Platform*, ISBN 144143006, 2014.
- Gamez-Montero P., Zárate F., Sánchez M., Castilla R., y Codina E. El problema del contacto en bombas de engranajes de perfil troncooidal. *Métodos numéricos para el calculo y diseño de ingeniería*, 21:213–229, 2005.
- Greenwood J.A. y Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 295(1442):300–319, 1966. ISSN 0080-4630. doi:10.1098/rspa.1966.0242.
- Johnson K. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- Kragelsky I., Dobychin M., y Kambalov V. *Friction and Wear*. Pergamon, 1982.
- Madge J., Leen S., McColl I., y Shipway P. Contact-evolution based prediction of fretting fatigue life: Effect of slip amplitude. *Wear*, 262:1159–1170, 2007.

- Majumdar A. y Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 112:205–216, 1990.
- McCool J.I. Comparison of models for the contact of rough surfaces. *Wear*, 107(1):37 – 60, 1986. ISSN 0043-1648. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648(86)90045-1.
- Mott R.L. *Diseño de Elementos de Máquinas*. Pearson Education, 2006.
- OOfelie. Object Oriented finite elements led by interactive executor. Open Engineering. S.A. 2010. http://www.oofelie.org.
- Parisch H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1803–1812, 1989.
- Rodríguez Montes J., Martínez Castro L., y Real Romero del J.C. *Procesos industriales para materiales metálicos*. Visión Libros, 2006.
- Sfantos G. y Aliabadi M. A boundary element formulation for three-dimensional sliding wear simulation. *Wear*, 262(5-6):672 – 683, 2007. ISSN 0043-1648. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.wear.2006.08.008.
- Zavarise G., Wriggers P., Stein E., y Schrefler B. A numerical model for thermomechanical contact based on microscopic interface laws. *Mechanics Research Communications*, 19:173–182, 1992.

## APENDICE

Para el modelado de la rugosidad se desarrolló el código que se muestra a continuación,

```

1  NodesNew=Nodes;
2  N=length(Nodes); %número de nodos.
3  c=0;
4  for i=1:N
5      if Nodes(i,4)==0.000625
6          c=c+1;
7          X=Nodes(i,2);
8          Y=Nodes(i,3);
9          Z=Nodes(i,4)+0.000003*(sin(350000*(3.14/180)*(X+Y))*
10             cos(350000*(3.14/180)*(X+Y)));
11         NodesNew(i,4)=Z;
12         A(c,1)=X;
13         A(c,2)=Y;
14         A(c,3)=Z;
15     else
16     end
17 end
18 fid = fopen('Matrizoofeliemasterplot.txt','wt');
19 for i = 1:N
20     fprintf(fid,'%d, %12.8f, %12.8f, %12.8f;\n', NodesNew(i,1),
21             NodesNew(i,2),NodesNew(i,3),NodesNew(i,4));
22 end
23 fclose(fid);
24 valorX= A(:,1);
25 valorY= A(:,2);
26 valorZ= A(:,3);
27 tri = delaunay(valorX, valorY);
28 trisurf(tri,valorX,valorY,valorZ,'FaceColor','interp',
29 'FaceLighting','phong');
```

En la primera línea se cargan las coordenadas de todos los nodos de las mallas de cada uno de los cuerpos, que se obtienen del archivo de datos generado por un programa de elementos finitos. Luego, para el número total de nodos dado en la línea 3, se realiza un bucle dentro del cual se rastrean los nodos que tengan por valor de coordenada en Z el correspondiente a la superficie a hacer contacto. Para dichos nodos, la coordenada Z es modificada en función de sus coordenadas X e Y, siguiendo la ley de la línea 8 y los resultados se sobrescriben en la matriz NodesNew. Finalmente la matriz modificada es impresa en un archivo de texto con el fin de que sustituya luego a la matriz original en el juego de datos a analizar numéricamente.