

INTERPOLACIÓN MULTIVARIABLE MEDIANTE FUNCIONES DE BASE RADIAL: UNA NUEVA TÉCNICA PARA COMBINAR EL MÉTODO DE RED DE VÓRTICES NO-ESTACIONARIO CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Marcos L. Verstraete^{a,b,c}, Sergio Preidikman^{a,c}, Luis R. Ceballos^{a,b}

^a *Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, verstraete.ml@gmail.com, <http://www.efn.uncor.edu>*

^b *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km. 601, 5800 Río Cuarto, Argentina. <http://www.ing.unrc.edu.ar>*

^c *CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917 Buenos Aires, Argentina. <http://www.conicet.gov.ar>*

Palabras Claves: Aeroelasticidad, Funciones de base radial, Elementos finitos, Método de red de vórtices.

Resumen. Los procedimientos numéricos para atacar un problema de interacción fluido-estructura pueden ser divididos, de acuerdo a la manera en que se formulan e integran las ecuaciones diferenciales gobernantes, en dos tipos de esquemas: *monolítico* y *particionado*, más recientemente denominado esquema de co-simulación. La principal motivación para la utilización de la segunda alternativa, es que esta permite implementar códigos existentes ya validados, y/o incorporar de manera casi automática al entorno de simulación nuevos códigos basados en métodos altamente especializados en cada campo de la física subyacente. Los códigos basados en un enfoque particionado habitualmente trabajan con diferentes discretizaciones temporales y espaciales, dando lugar a mallas topológicamente distintas. Esto lleva a la necesidad de buscar técnicas robustas para el eficiente intercambio de información entre las mallas que caracterizan el modelo discretizado. En este trabajo se presenta la formulación e implementación numérica de una técnica que permite transferir información entre el método de red de vórtices no-estacionario y el método de los elementos finitos. Como producto de este esfuerzo se obtuvo una herramienta general de simulación de fenómenos aeroelásticos no-lineales e inestacionarios fundada en un esquema particionado. El mecanismo de interacción entre el fluido y la estructura se introduce a través de una matriz de acoplamiento que relaciona el campo de desplazamientos de la malla de elementos finitos (o malla estructural) con el campo de desplazamientos que experimenta la red de vórtices (o malla aerodinámica). En este artículo se presenta el procedimiento, basado en el concepto de interpolación multivariable mediante funciones de base radial, para construir esa matriz de acoplamiento, la que es utilizada para transferir variables cinemáticas desde la malla estructural hacia la malla aerodinámica y fuerzas desde la malla aerodinámica hacia la estructural. En base a esa técnica se desarrolla un modelo aeroelástico que da origen a la herramienta computacional antes mencionada. Para ilustrar la aplicación de la técnica numérica desarrollada y su validación, se presenta la solución numérica de un problema clásico de aeroelasticidad. Adicionalmente se muestran y analizan resultados asociados al comportamiento aeroelástico de un modelo de ala de vehículo aéreo no-tripulado.

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la aeroelasticidad computacional es el modelado y la simulación numérica de fenómenos que surgen de la interacción entre la deformación y el movimiento de una estructura flexible y las fuerzas que le ejerce la corriente de aire que la rodea. Las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre la estructura dependen de la deformación, velocidad, y aceleración que experimenta la misma, y al mismo tiempo, estas dependen de las fuerzas aerodinámicas que la corriente de aire circundante ejerce sobre la estructura (Bazilevs *et al.*, 2013). El modelado y tratamiento numérico para abordar este acoplamiento físico no resulta una tarea sencilla.

Los procedimientos numéricos para resolver un problema de interacción fluido-estructura pueden ser ampliamente clasificados en dos enfoques principales: *enfoque monolítico* y *enfoque particionado* (Hou *et al.*, 2012; Heil *et al.*, 2008), más recientemente llamado *co-simulación* (Kalmar-Nagy y Stanciulescu, 2014).

En el *enfoque monolítico*, la dinámica de la estructura y del fluido se tratan en una misma formulación matemática dando lugar en un único sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para el problema entero, el cual es resuelto simultáneamente por un algoritmo numérico unificado. Las condiciones de fronteras establecidas entre los dominios físicos se encuentran implícitas en el procedimiento de solución (Michler *et al.*, 2004; Ryzhakov *et al.*, 2010). En el *enfoque particionado*, la estructura y el fluido son considerados dos campos computacionales que pueden ser resueltos separadamente con su respectiva discretización y algoritmo numérico. Las condiciones de fronteras establecidas entre los dominios físicos son usadas explícitamente para pasar la información entre los algoritmos.

La principal motivación en la utilización del último enfoque es que este permite implementar códigos existentes ya validados, y/o incorporar de manera casi automática al entorno de simulación nuevos códigos basados en métodos altamente especializados en cada campo de la física subyacente. Para cada una de las disciplinas se puede usar la estrategia de solución que mejor se adapte. La estructura modular, inherente de los enfoques particionados, permite reemplazar los módulos individuales sin la necesidad de modificar la estructura general. Los diferentes modos de sincronizar la información en cada paso de tiempo entre los dos algoritmos numéricos junto con la forma de intercambio de información entre ellos, lleva a diferentes procedimientos para resolver el problema de interacción fluido-estructura.

Los códigos basados en un enfoque particionado habitualmente trabajan con diferentes discretizaciones (malla estructural, malla aerodinámica, etc) que son, en general, topológicamente distintas. Esto lleva a la necesidad de buscar una alternativa para el intercambio de información entre las diferentes mallas que componen el modelo discretizado.

Con respecto a problemas de interacción fluido-estructura, en la literatura se encuentran disponibles diversas técnicas para la transferencia de información entre la malla aerodinámica (*MA*) y la malla estructural (*ME*) (Brown, 1997; Cebal y Löhner, 1997; Farhat *et al.* 1998). Algunas de las técnicas que resulta interesante mencionar son los métodos de elementos de contorno (Chen y Jadic, 1998), donde se utiliza un criterio físico para transferir la información, y las técnicas de interpolación basadas en Funciones de Base Radial o *RBFs* conocidas por su nombre en inglés; *Radial Basis Functions* (Beckert y Wendland, 2001; Rendall y Allen, 2007).

En general suele requerirse que el acoplamiento fluido-estructura (esto es la transferencia de información entre la *MA* y la *ME*) se establezca a través de relaciones lineales. La razón radica en que las relaciones no lineales introducen una mayor complejidad al problema multifísico, que la mayoría de las veces, resulta no lineal por naturaleza. Si bien existen técnicas de interpolación basadas en relaciones no lineales (Goura *et al.*, 2003), éstas poseen

un gran número de inconvenientes no deseados desde un punto de vista computacional. Una detallada descripción de métodos para el intercambio de información entre mallas puede encontrarse en el trabajo de Maza (2013).

En este trabajo se presenta el desarrollo de una técnica de interpolación multivariable que está basada en la utilización de funciones de base radial, la cual permite combinar el método de red de vórtices no-estacionario, utilizado para la predicción de cargas aerodinámicas inestacionarias sobre superficies sustentadoras, con el Método de los Elementos Finitos (FEM), ampliamente usado en la disciplina de análisis estructural computacional.

En base a la técnica antes mencionada se desarrolla un modelo aeroelástico que es implementado numéricamente dando origen a una herramienta computacional, fundada en un enfoque particionado, apropiada para la simulación numérica de fenómenos aeroelásticos no-lineales e inestacionarios. Como parte del trabajo, con el fin de validar la técnica aquí presentada e ilustrar su aplicación, se presentan resultados de simulaciones aeroelásticas correspondientes a dos casos, uno considerado un clásico en aeroelasticidad y otro referido a un modelo de ala para vehículos aéreos no-tripulados.

2 INTERPOLACIÓN MEDIANTE FUNCIONES DE BASE RADIAL

En esta sección se presenta una descripción y breve revisión de antecedentes de las funciones de base radial que son los cimientos de la técnica de intercambio de información desarrollada en el presente trabajo.

Las funciones de base radial (*RBFs*) se han convertido en una herramienta muy conocida para la interpolación de múltiples variables, tanto para datos estructurados como para no estructurados. La teoría general de *RBFs* puede encontrarse en los libros de Buhmann (2004) y Wendland (2005).

Una función radial $\phi(r)$ es una función continua, de una variable escalar, con un comportamiento radial respecto a un punto denominado centro, siendo r la distancia desde el centro hasta el punto donde se evalúa la función ϕ .

Un problema de interpolación multivariable general consiste en encontrar una función $s(\mathbf{x})$ a partir de valores conocidos de s en ciertos puntos (centros) \mathbf{x}_i para $i=1, \dots, N$.

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(r) + p(\mathbf{x}) \quad \text{siendo} \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \quad (1)$$

donde N es el número de centros, ϕ es la forma de la función adoptada, \mathbf{x} es la posición de los puntos en el espacio tridimensional, \mathbf{x}_i son las posiciones de los centros, α_i son coeficientes cuyos valores deben ser determinados, y $p(\mathbf{x})$ es un polinomio donde su utilización es opcional (Rendall y Allen, 2007).

El problema se centra encontrar los coeficientes α_i que se determinan imponiendo que la función interpolante devuelva los valores conocidos $s(\mathbf{x}_i) = s_i$.

En la literatura existe una gran variedad de funciones de base radial que pueden utilizarse, y algunas de ellas se listan en la Tabla 1.

Algunas funciones de base radial clásicas, las cuales han mostrado proveer buen comportamiento y que han sido ampliamente utilizadas para problemas en ingeniería son las funciones de Duchon o también llamadas *Thin-Plate Splines* y las funciones de Harddy denominadas *multiquadrics*. Estas son funciones de base creciente, lo que implica que aumentan su valor junto con la distancia al centro r . Esto hace que los valores de los centros \mathbf{x}_i más alejados del punto \mathbf{x} tengan más influencia sobre la función $s(\mathbf{x})$. Por otro lado se encuentran las funciones de base decreciente, las cuales tienen un comportamiento inverso a las funciones de base creciente, es decir que disminuyen su valor a medida que r crece; los centros \mathbf{x}_i en las cercanías del punto \mathbf{x} tienen más influencias sobre la función $s(\mathbf{x})$ que

aquellos que se encuentran lejos de \mathbf{x} . La función conocida como *inverse multiquadric* (Beckert y Wendland, 2001) y la función de *Gauss* son funciones del tipo de base decreciente. Con respecto al problema de interacción fluido-estructura, muy poco se conoce sobre los criterios que permitan seleccionar una *RBF* apropiada para este tipo de problema. No obstante se sugiere utilizar funciones de base decreciente en lugar de funciones de base creciente. La razón se debe a que las funciones de base decreciente permiten una transferencia de fuerza en un sentido local, lo que se corresponde mejor con la física del problema (Rendall y Allen, 2007).

La utilización de funciones de soporte compacto permite reducir aún más la influencia de fuerzas de puntos lejanos, localizando mejor la interpolación y reduciendo el número de elementos no nulos en las matrices de interpolación. Dentro de este grupo podemos citar la función *Euclid's Hat* y el conjunto de funciones de soporte compacto introducidas por Wendland (1995) para el caso bi- o tridimensional, requiriendo continuidad C^0 y C^2 .

Nombre	Funciones bases $\phi(r)$
<i>Gaussian</i>	$e^{-\alpha r^2}$
<i>Thin plate spline</i>	$r^2 \ln(r)$
<i>Hardy's multiquadrics</i>	$(p_k^2 + r^2)^{1/2}$
<i>Hardy's inverse multiquadrics</i>	$(p_k^2 + r^2)^{-1/2}$
<i>Wendland's C^0</i>	$(1-r)^2$
<i>Wendland's C^2</i>	$(1-r)^4 (4r+1)$
<i>Euclid's Hat</i>	$\pi \left(\frac{r^3}{12} - r_s^2 r + \frac{4}{3} r_s^3 \right)$

Tabla 1: Funciones de base radial.

3 EL MODELO AERODINÁMICO Y EL MODELO ESTRUCTURAL

La herramienta computacional que resulta de este esfuerzo incluye: *i*) un modelo aerodinámico no-lineal e inestacionario, *ii*) un modelo estructural lineal, y *iii*) la técnica de interpolación que permite combinar ambos modelos, la cual se desarrolla en la sección 4 del presente trabajo. En esta sección se describen brevemente los modelos citados en los puntos *i*) y *ii*).

3.1 El modelo aerodinámico

Para predecir las cargas aerodinámicas en el dominio del tiempo se utiliza el método de red de vórtices no-estacionario (UVLM). Este trabajo no tiene como finalidad exponer los detalles de este método, sin embargo se brinda una breve descripción del mismo que permite mejorar la comprensión de los temas desarrollados en la siguiente sección. El lector puede consultar mas detalles en las referencias Preidikman (1998), Katz y Plotkin (1991) y Konstadinopoulos *et al.* (1981).

El UVLM puede ser aplicado tanto a flujos bidimensionales como tridimensionales alrededor de cuerpos sustentadores o no-sustentadores, y además no tiene limitaciones en cuanto a la forma de las superficies, combadura, alabeo, ángulo de ataque, etc. La superficie del cuerpo puede sufrir cualquier tipo de deformaciones en el tiempo y el cuerpo puede ejecutar cualquier tipo de maniobras. La única restricción del método es que la separación del flujo

ocurre en los bordes afilados y que el desprendimiento vorticoso no se produce sobre la superficie del cuerpo. El fluido es considerado incompresible e irrotacional en todo el dominio fluido excepto en una delgada región adyacente al ala (capa límite) y en las estelas.

En este método, la capa límite y las estelas son representadas mediante sábanas vorticosas que se denominan sábanas adheridas (S_B) y libres (S_W) respectivamente, ver Figura 1. Estas sábanas se discretizan mediante segmentos vorticosos rectilíneos de circulación $\Gamma(t)$ espacialmente constante. Como producto de la discretización la sábana adherida queda dividida en un número finito de cuadriláteros denominados paneles. Los vértices de cada uno de estos paneles son denominados nodos aerodinámicos y el centro geométrico de estos nodos se llama punto de control (PC).

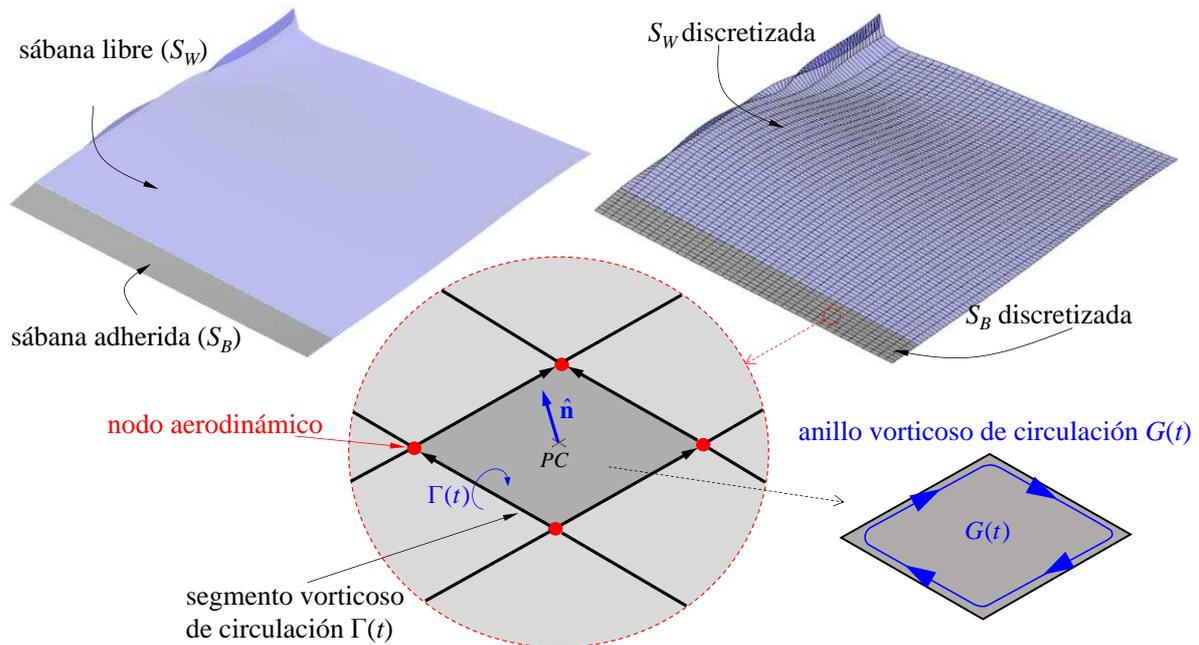


Figura 1: Discretización de las sábanas vorticosas. Panel aerodinámico típico.

Es posible considerar que cada panel está encerrado por un anillo vorticoso de circulación espacialmente constante $G(t)$. El problema consiste en encontrar las circulaciones de estos anillos, y una vez conocidas, es posible determinar la circulación $\Gamma(t)$ asociada a cada segmento. La ecuación (2) que permite determinar las circulaciones de los anillos se obtiene a través de una de las condiciones de borde del problema aerodinámico denominada condición de no penetración.

$$\sum_{j=1}^{NP} A_{ij}(t) G_j(t) = -(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_W - \mathbf{V}_S) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad (2)$$

donde $[A_{ij}](t)$ se denomina matriz de influencia aerodinámica, y se ha indicado explícitamente como una función del tiempo ya que debe actualizarse acorde a la variación temporal de la geometría del ala. El coeficiente $A_{ij}(t)$ representa la velocidad normal en el punto de control i asociada al anillo vorticoso del panel j imponiendo una circulación unitaria $G_j = 1$. \mathbf{V}_W es la velocidad de una partícula de fluido ubicada en el punto de control i asociada a S_W . \mathbf{V}_∞ es la velocidad de corriente libre y \mathbf{V}_S es la velocidad del sólido en el punto de control i . $\hat{\mathbf{n}}_i$ es el versor normal en el panel que contiene el punto de control i .

En una segunda etapa, una vez computadas las circulaciones de los anillos, se utiliza la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli (Katz y Plotkin, 1991) para calcular el salto

presión adimensional (ΔCp) en cada panel. Luego la fuerza aerodinámica actuante en un panel genérico k se computa de la siguiente manera

$$\{\mathbf{F}_k\}_A = (\Delta Cp)_k \frac{1}{2} \rho_C V_C^2 A_k \hat{\mathbf{n}}_k \quad (3)$$

siendo A_k y $\hat{\mathbf{n}}_k$ el área y el versor normal asociados al panel k , ρ_C la densidad característica (densidad del aire), V_C velocidad característica (magnitud de la velocidad de corriente libre V_∞). El área se puede escribir en términos del área adimensional $A_k = L_C^2 \hat{A}_k$, siendo L_C la longitud característica seleccionada en el problema. De esta manera la fuerza actuante en el panel k se escribe como,

$$\{\mathbf{F}_k\}_A = (\Delta Cp)_k \frac{1}{2} \rho_C V_C^2 L_C^2 \hat{A}_k \hat{\mathbf{n}}_k \quad (4)$$

Luego definiendo la fuerza aerodinámica adimensional como $\{\hat{\mathbf{F}}_k\}_A = (\Delta Cp)_k \hat{A}_k \hat{\mathbf{n}}_k$ es posible escribir,

$$\{\mathbf{F}_k\}_A = \frac{1}{2} \rho_C V_C^2 L_C^2 \{\hat{\mathbf{F}}_k\}_A \quad (5)$$

Si esto se extiende para todos los paneles de la sábana adherida se tiene,

$$\mathbf{F}_A = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{NP} \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{2} \rho_C L_C^2 V_C^2 \right) \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_k \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_{NP} \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{F}_A = \left(\frac{1}{2} \rho_C L_C^2 V_C^2 \right) \hat{\mathbf{F}}_A \quad (6)$$

Es importante mencionar que las magnitudes L_C y V_C permiten determinar el tiempo característico $T_C = L_C / V_C$, el cual vincula el tiempo adimensional \hat{t} con el tiempo físico t mediante la relación $t = T_C \hat{t}$.

3.2 El modelo estructural

El modelo estructural considerado en este trabajo consiste en un conjunto de vigas que se conectan una a la otra para conformar el “esqueleto” de la estructura de un ala. En la Figura 2, a modo de ejemplo, se muestran tres estructuras diferentes para un modelo de ala de un vehículo aéreo no-tripulado (UAV) inspirado en las alas de gaviotas, en el que se ha superpuesto la discretización de la sábana adherida (o malla aerodinámica).

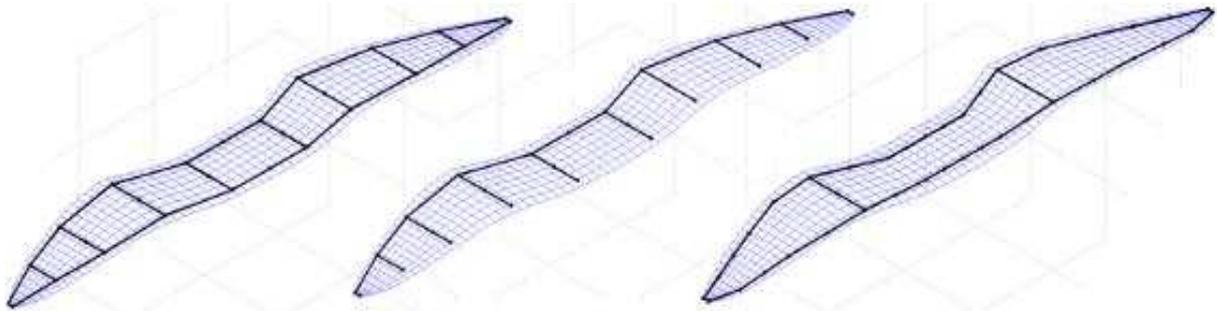


Figura 2: Diferentes tipos de estructuras para un ala de UAV inspirada en las alas de gaviota.

Cada una de las vigas que constituye la estructura alar se divide espacialmente en un número finito de elementos que están conectados en puntos llamados nodos estructurales. Los elementos y los nodos constituyen la malla de la estructura o la malla de elementos finitos. Las propiedades de las vigas se asumen constantes a lo largo de cada elemento.

Para desarrollar las ecuaciones de movimiento de la estructura se introduce un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal x, y, z (sistema global), y un sistema de coordenadas ξ, η, ζ (sistema local) fijo a la configuración no-deformada de cada elemento.

En el procedimiento de elementos finitos, en una primera etapa, las ecuaciones de movimiento se desarrollan para cada elemento de la estructura (Hughes, 2000) expresadas en el sistema de coordenadas cartesiano ortogonal (ξ, η, ζ) asociado al elemento. Luego las ecuaciones asociadas a cada elemento se reescriben en el sistema global para obtener las ecuaciones de la estructura.

3.2.1 Ecuaciones de movimiento de un elemento

En este trabajo se considera un elemento de viga de Euler-Bernoulli constituido por dos nodos, y cada nodo tiene asociado 6 grados de libertad: 3 correspondientes a desplazamientos y 3 correspondientes al giro (Bucalem y Bathe, 2011). El campo de desplazamientos dentro del elemento de viga se aproxima como el producto entre una matriz de interpolación $[\mathbf{S}]$ que contiene un conjunto de funciones dependientes de las coordenadas del sistema local ξ, η y ζ , y un arreglo \mathbf{u}_e que contiene los grados de libertad asociados a los nodos del elemento, conocido como vector de coordenadas nodales. Una vez definida la interpolación del campo de desplazamientos, se escribe la energía de deformación y la energía cinética asociada al elemento de viga, las cuales son reemplazadas en las ecuaciones de Lagrange (Shabana, 2013) para finalmente llegar a la expresión que describe la dinámica de un elemento de la malla estructural,

$$[\mathbf{M}_e] \ddot{\mathbf{u}}_e(t) + [\mathbf{K}_e] \mathbf{u}_e(t) = \mathbf{f}_e(t) \quad (7)$$

donde \mathbf{f}_e son las fuerzas generalizadas asociadas al elemento, los dos puntos sobre \mathbf{u}_e representa la derivada segunda de los grados de libertad con respecto al tiempo. $[\mathbf{K}_e]$ y $[\mathbf{M}_e]$ son respectivamente las matrices de rigidez y de masa asociadas al elemento e (Bucalem y Bathe, 2011).

3.2.2 Ecuaciones de movimiento de la estructura

Las ecuaciones de movimiento de la estructura alar se obtienen mediante un procedimiento que permite ensamblar las ecuaciones de movimiento asociadas a cada uno de los elementos que componen el sistema estructural (Hughes, 2000). Esto implica ensamblar las matrices de masa y de rigidez, y el vector de cargas nodales de cada elemento. Luego del procedimiento de ensamble se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que gobierna la dinámica de la estructura alar,

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K}] \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_E(t) \quad (8)$$

donde \mathbf{u} es el vector que contiene todos los grados de libertad de la estructura, $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$ son respectivamente las matrices de masa y de rigidez globales, y \mathbf{F} es el vector de carga que representa las fuerzas y momentos aplicados sobre los nodos de la malla de elementos finitos. El vector de grados de libertad \mathbf{u} , las matrices de masa $[\mathbf{M}]$ y de rigidez $[\mathbf{K}]$, y el vector de carga \mathbf{F}_E se encuentran expresados en el sistema (x, y, z) .

3.2.3 Reducción de dimensión de las ecuaciones de movimiento

El vector $\mathbf{u}(t)$ de (8) se puede expandir en términos de los modos de vibrar de la estructura, lo que permite considerar la cantidad de modos que son más influyentes en la respuesta estructural y consecuentemente reducir el número de ecuaciones a resolver. Para obtener los modos de vibrar se debe resolver un problema de autovalores generalizado representado por la siguiente ecuación,

$$[\mathbf{K}][\tilde{\Phi}] = [\mathbf{M}][\tilde{\Phi}][\tilde{\Lambda}] \quad (9)$$

donde $[\tilde{\Phi}]$ es la matriz modal de dimensión $m \times m$ cuyas columnas son los m modos, de la estructura $[\tilde{\Phi}] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_m]$, $[\tilde{\Lambda}]$ es una matriz diagonal de dimensión $m \times m$ de la forma,

$$[\tilde{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_m^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde ω_k^2 ($k = 1, 2, \dots, m$) son los valores propios del problema de autovalores generalizado, siendo ω_k la frecuencia natural asociada al modo ϕ_k .

La expansión de la función $\mathbf{u}(t)$ en término de los primeros n modos de vibrar se representa matemáticamente de la siguiente manera

$$\mathbf{u}(t) \cong Q_1(t)\phi_1 + Q_2(t)\phi_2 + \dots + Q_n(t)\phi_n = \sum_{k=1}^n Q_k(t)\phi_k = [\Phi]\mathbf{Q}(t) \quad (11)$$

siendo $[\Phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$ una matriz de dimensión $m \times n$ que contiene los primeros n modos de la estructura, y $\mathbf{Q}(t) = \{Q_1(t) \ Q_2(t) \ \dots \ Q_n(t)\}^T$ es un vector columna de dimensión $n \times 1$, que contiene las coordenadas generalizadas del sistema dinámico.

Es importante mencionar que $n \leq m$; la igualdad se produce al utilizar todos los modos computados por (9) para representar el movimiento de la estructura.

Introduciendo la ecuación (11) en (8) y pre-multiplicando por $[\Phi]^T$ se llega a

$$[\tilde{\mathbf{m}}]\ddot{\mathbf{Q}}(t) + [\tilde{\mathbf{k}}]\mathbf{Q}(t) = [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (12)$$

donde $[\tilde{\mathbf{m}}]$ y $[\tilde{\mathbf{k}}]$ se obtienen de la siguiente manera,

$$[\tilde{\mathbf{m}}] = [\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi] \quad [\tilde{\mathbf{k}}] = [\Phi]^T [\mathbf{K}] [\Phi] \quad (13)$$

y tienen la característica de ser matrices diagonales debido a la propiedad de ortogonalidad de los modos con respecto a la matrices de masa, $[\mathbf{M}]$, y de rigidez, $[\mathbf{K}]$.

Después de unas simples manipulaciones matemáticas la expresión (12) toma la siguiente forma,

$$\ddot{\mathbf{Q}}(t) + [\Lambda]\mathbf{Q}(t) = [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (14)$$

siendo $[\Lambda] = [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\tilde{\mathbf{k}}]$ una matriz diagonal de $n \times n$ cuyos elementos son las primeras n frecuencias naturales elevadas al cuadrado. Esta matriz es similar a la presentada en (10).

Introduciendo las variables características mencionadas en la sección anterior y un nuevo vector de coordenadas dependientes del tiempo adimensional \hat{t} de la forma $\mathbf{q}(\hat{t}) = \mathbf{Q}[t(\hat{t})]$ se llega a la siguiente ecuación,

$$\frac{d^2}{d\hat{t}^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}]\mathbf{q}(\hat{t}) = T_c^2 [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (15)$$

siendo

$$[\hat{\Lambda}] = T_C^2 [\Lambda] = \begin{bmatrix} \left(\frac{L_c \omega_1}{V_c}\right)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \left(\frac{L_c \omega_n}{V_c}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

una matriz diagonal de $n \times n$ cuyos elementos son las frecuencias adimensionales, o frecuencias reducidas, elevadas al cuadrado.

El lado izquierdo de la ecuación (15) ha sido escrito en una forma adimensional. Sin embargo, el lado derecho aún contiene términos dimensionales. Por otro lado las fuerzas generalizadas $\mathbf{F}_E(t)$ que dependen del tiempo físico provienen de la aerodinámica y se tratarán adecuadamente en la siguiente sección.

4 COMBINACIÓN DEL UVLM CON EL FEM

En esta sección se presenta el desarrollo de una técnica de interpolación multivariables basada en la utilización de funciones de base radial, la cual permite combinar el UVLM con el FEM resultando en una herramienta apropiada para el desarrollo de simulaciones aeroelásticas. Esta técnica sigue los lineamientos de la técnica desarrollada por Beckert y Wendland (2001), en base a *RBFs*, quienes presentaron un método para problemas de interacción fluido-estructura cuya formulación es particularmente desarrollada para mallas provenientes de CFD.

La utilización de un esquema particionado para abordar un problema de aeroelasticidad no resulta una tarea trivial. En todos los casos se cuenta con dos algoritmos numéricos que tienen asociadas diferentes discretizaciones; la malla aerodinámica (*MA*) y la malla estructural (*ME*). La interacción entre los algoritmos numéricos se realiza transfiriendo información entre la *MA* y la *ME*. Por un lado resulta necesario transferir el estado de cargas desde la *MA* hacia la *ME*, y por el otro es necesario transferir los desplazamientos, velocidades y aceleraciones desde la *ME* hacia la *MA*. En general estas mallas son topológicamente diferentes, lo que lleva a la necesidad de utilizar técnicas de interpolación para transferir información entre ellas.

En este trabajo, el mecanismo de interacción entre el fluido y la estructura se introduce a través de una matriz de acoplamiento que relaciona el campo de desplazamientos de la malla de elementos finitos (o malla estructural) con el campo de desplazamientos que experimenta la red de vórtices (o malla aerodinámica). La técnica consiste en determinar esa matriz de acoplamiento a través de un procedimiento de interpolación mediante el uso de *RBFs*.

A los fines de validar la técnica basada en *RBFs*, adicionalmente, se implementa en la herramienta computacional un método que ha sido utilizado para resolver problemas de aeroelasticidad (Preidikman, 1998) demostrando su robustez para comunicar adecuadamente el UVLM con formulaciones de FEM.

En la sección 4.2 se describe la técnica basada en *RBFs*, que la denominaremos primer método de transferencia (PMT) para diferenciarla del segundo método de transferencia (SMT), brevemente descrito en la sección 4.3, cuya finalidad es únicamente utilizarlo para validar el PMT.

Resulta importante aclarar que la única diferencia que existe entre el PMT y el SMT es la forma en que se obtiene la matriz de acoplamiento antes mencionada.

4.1 El concepto básico de la combinación del UVLM con el FEM

En la Figura 3 se muestra un esquema de la discretización del modelo aeroelástico, donde se observa una malla aerodinámica 2-D superpuesta con una malla estructural 1-D (elementos de viga).

Un nodo estructural i correspondiente a la ME tiene asociado 6 grados de libertad que se arreglan en un vector columna \mathbf{u}_i de la siguiente manera,

$$\mathbf{u}_i = \{u_i^x \quad u_i^y \quad u_i^z \quad \theta_i^x \quad \theta_i^y \quad \theta_i^z\}^T \quad (17)$$

donde las primeras 3 componentes representan los desplazamientos en las direcciones de los ejes x , y , z ; de acuerdo a como lo indica el supra índice. Las últimas 3 componentes representan los giros con respecto a los ejes mencionados.

Por otro lado, un panel de la malla aerodinámica tiene asociado 4 nodos aerodinámicos y un punto de control. El vector desplazamiento para un nodo aerodinámico genérico k se representa por medio de un vector columna \mathbf{w}_k . Similarmente, el vector desplazamiento de un punto de control genérico j se representa por un vector columna \mathbf{v}_j .

$$\mathbf{w}_k = \{w_k^x \quad w_k^y \quad w_k^z\}^T$$

$$\mathbf{v}_j = \{v_j^x \quad v_j^y \quad v_j^z\}^T \quad (18)$$

donde las componentes de cada vector representan los desplazamientos en las direcciones de los ejes x , y , z según lo indica el supra índice.

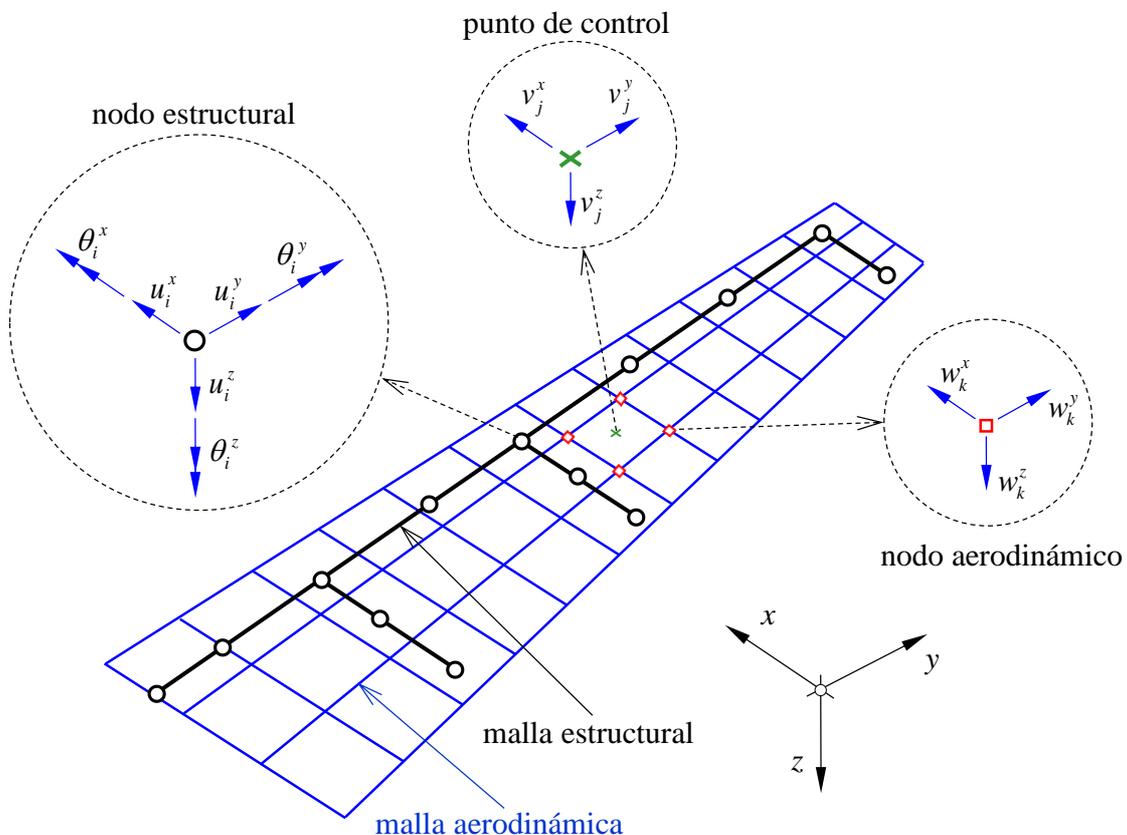


Figura 3: Malla aerodinámica y malla estructural.

Los vectores definidos en las ecuaciones (17) y (18) se pueden organizar en un vector de mayor dimensión que contenga todos los vectores asociados a cada uno de los nodos de la *MA* y de la *ME*, es decir,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{ne} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{na} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{pc} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

donde *ne* representa la cantidad de nodos estructurales, *na* representa la cantidad de nodos aerodinámicos y *pc* es la cantidad de puntos de control.

Una vez definida la organización de los vectores desplazamientos de la *MA* y los desplazamientos generalizados de la *ME*, se establece la siguiente relación entre ellos,

$$\mathbf{w} = [\mathbf{G}_{AE}^{NA}] \mathbf{u} \quad \mathbf{v} = [\mathbf{G}_{AE}^{PC}] \mathbf{u} \quad (20)$$

donde $[\mathbf{G}_{AE}^{NA}]$ es la matriz de acoplamiento fluido-estructura que vincula a los grados de libertad de los nodos estructurales con los desplazamientos de los nodos aerodinámicos, la cual se determina mediante alguna técnica apropiada (en este trabajo mediante el PMT o el SMT). $[\mathbf{G}_{AE}^{PC}]$ también es una matriz de acoplamiento que vincula a los grados de libertad de los nodos estructurales con los desplazamientos de los puntos de control. Esta última es computada una vez conocida la $[\mathbf{G}_{AE}^{NA}]$.

Las fuerzas aerodinámicas \mathbf{F}_A aplicadas sobre los puntos de control se pueden transformar a un sistema de fuerzas \mathbf{F}_E aplicadas sobre los nodos estructurales. Para ello se requiere que ambos sistemas de fuerzas sean “estructuralmente equivalentes”, lo cual significa que deben realizar el mismo trabajo para cualquier desplazamiento virtual. Esto se expresa matemáticamente como,

$$\delta \bar{W}_A = \delta \bar{W}_E \quad (21)$$

donde $\delta \bar{W}_A$ es el trabajo virtual realizado por las fuerzas aerodinámicas y $\delta \bar{W}_E$ es el trabajo virtual realizado por las fuerzas estructurales, que se computan como:

$$\delta \bar{W}_A = (\delta \mathbf{v})^T \mathbf{F}_A \quad \delta \bar{W}_E = (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{F}_E \quad (22)$$

Siendo $\delta \mathbf{v}$ y $\delta \mathbf{u}$ los desplazamientos virtuales asociados a los puntos de control y nodos estructurales.

Teniendo en cuenta las expresiones (20) a (22), después de algunas manipulaciones algebraicas se llega a

$$(\delta \mathbf{u})^T \left([\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A - \mathbf{F}_E \right) = 0 \quad (23)$$

Ecuación que se debe satisfacer para un desplazamiento virtual arbitrario, con lo que se concluye que

$$\mathbf{F}_E = [\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A \quad (24)$$

Esta última ecuación permite transferir las fuerzas aerodinámicas que están aplicadas en los puntos de control en la *MA* hacia los nodos de la *ME*.

En la siguiente sección se describe el procedimiento para obtener las matrices de acoplamiento de la ecuación (20) para el PMT, y en la sección 4.3 se describe brevemente el procedimiento correspondiente al SMT.

4.2 La técnica de interpolación multivariable basada en RBFs (PMT)

4.2.1 Determinación de la matriz $\left[\mathbf{G}_{AE}^{NA} \right]$

El principio básico de la técnica consiste en generar una interpolación que permita escribir los desplazamientos de los puntos pertenecientes a la *MA* como una combinación lineal de todos los desplazamientos asociados a los nodos de la estructura.

Un problema de interpolación puede expresarse por medio de la utilización de *RBFs* (Wendland, 2005) como,

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{ne} \alpha_i \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^e|) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^e|) + \cdots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ne}^e|) \quad (25)$$

Aquí s es la función de interpolación que se desea evaluar en el punto espacial $\mathbf{x} = \{x \ y \ z\}$, ϕ es la función de base radial seleccionada para interpolar, $\mathbf{x}_i^e = \{x_i^e \ y_i^e \ z_i^e\}$ es el vector posición del nodo estructural i , y α_i son los coeficientes a determinar.

Si la función de interpolación s es generada a través de los desplazamientos transversales, en la dirección z , de los nodos de la *ME*, entonces los coeficientes α_i se determinan imponiendo la condición de que la función s devuelva el valor de los desplazamientos en la dirección z cuando s es evaluada en los nodos estructurales, $u_i^z = s(\mathbf{x}_i^e) \ i = 1, 2, \dots, ne$; esto es,

$$\begin{aligned} u_1^z &= s(\mathbf{x}_1^e) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_1^e|) + \cdots + \alpha_i \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_i^e|) + \cdots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ &\vdots \\ u_i^z &= s(\mathbf{x}_i^e) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_1^e|) + \cdots + \alpha_i \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_i^e|) + \cdots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ &\vdots \\ u_{ne}^z &= s(\mathbf{x}_{ne}^e) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_1^e|) + \cdots + \alpha_i \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_i^e|) + \cdots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \end{aligned} \quad (26)$$

La expresión (26) constituye un sistema de ne ecuaciones algebraicas lineales con ne incógnitas que permiten determinar los coeficientes α_i , para $i = 1, \dots, ne$. Este sistema puede escribirse en forma matricial como

$$\left[\mathbf{A}_{ee} \right] \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}^z \quad (27)$$

donde,

$$\left[\mathbf{A}_{ee} \right] = \begin{bmatrix} \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_{ne} \end{Bmatrix}; \mathbf{u}^z = \begin{Bmatrix} u_1^z \\ \vdots \\ u_i^z \\ \vdots \\ u_{ne}^z \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Notar que el nuevo vector \mathbf{u}^z contiene el desplazamiento en la dirección z de todos los nodos estructurales. La solución para $\boldsymbol{\alpha}$ se puede expresar en forma simbólica como

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[\mathbf{A}_{ee} \right]^{-1} \mathbf{u}^z \quad (29)$$

Una vez resuelto el sistema lineal expresado en (29) se reconstruye la función de interpolación s . Luego se evalúa esta función en las coordenadas asociadas a los nodos aerodinámicos, $\mathbf{x}_k^a = \{x_k^a \ y_k^a \ z_k^a\}$ $k=1,2,\dots, na$, y se determinan los desplazamientos de tales nodos. Es decir,

$$\mathbf{w}^z = [\mathbf{A}_{ea}] \boldsymbol{\alpha} \tag{30}$$

donde

$$[\mathbf{A}_{ae}] = \begin{bmatrix} \phi(|\mathbf{x}_1^a - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^a - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^a - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_{na}^a - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{na}^a - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{na}^a - \mathbf{x}_{ne}^e|) \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}^z = \begin{Bmatrix} w_1^z \\ \vdots \\ w_k^z \\ \vdots \\ w_{na}^z \end{Bmatrix} \tag{31}$$

Luego reemplazando (29) en (30) se obtiene

$$\mathbf{w}^z = [\mathbf{H}] \mathbf{u}^z \quad \text{con} \quad [\mathbf{H}] = [\mathbf{A}_{ae}] [\mathbf{A}_{ee}]^{-1} \tag{32}$$

La expresión (32) permite obtener el desplazamiento de los nodos aerodinámicos “en la dirección z ” mediante los desplazamientos de traslación de los nodos estructurales “en la dirección z ”. Resulta más que importante volver a resaltar que la matriz $[\mathbf{H}]$ depende de las coordenadas de los nodos de la *ME*, de las coordenadas de los nodos aerodinámicos correspondiente a la *MA* y de la función de base radial adoptada para llevar a cabo la interpolación. Por otro lado, el procedimiento para interpolar los desplazamientos de los nodos aerodinámicos en las otras direcciones (x e y), conocidos los desplazamientos los nodos de la estructura en la dirección x e y , se materializa por medio de una relación similar a la expresión (32) que involucra a la misma matriz $[\mathbf{H}]$; con la condición que se utilice la misma función de base radial. Entonces, es posible escribir el desplazamiento de todos los nodos aerodinámicos de la *MA* en términos de los desplazamientos de todos los nodos de la estructura como

$$\begin{bmatrix} w_1^x & w_1^y & w_1^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_k^x & w_k^y & w_k^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{na}^x & w_{na}^y & w_{na}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1i} & \cdots & h_{1ne} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ h_{k1} & \cdots & h_{ki} & \cdots & h_{kne} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{na1} & \cdots & h_{ni} & \cdots & h_{nne} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^x & u_1^y & u_1^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i^x & u_i^y & u_i^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{ne}^x & u_{ne}^y & u_{ne}^z \end{bmatrix} \tag{33}$$

donde h_{ki} (para $i=1,\dots,ne$ y $k=1,\dots,na$) son los elementos de la matriz $[\mathbf{H}]$.

La ecuación (33) permite relacionar los desplazamiento de todos los nodos de la *ME* con los desplazamientos de todos los nodos de la *MA*. Sin embargo, es posible observar que la organización de las componentes asociadas a los desplazamientos es diferente a la presentada en la ecuación (19).

Utilizando la ecuación (33) se puede escribir de manera conveniente el desplazamiento del nodo aerodinámico k como

$$\begin{Bmatrix} w_k^x \\ w_k^y \\ w_k^z \end{Bmatrix} = h_{k1} \begin{Bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_1^z \end{Bmatrix} + \dots + h_{ki} \begin{Bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \end{Bmatrix} + \dots + h_{kne} \begin{Bmatrix} u_{ne}^x \\ u_{ne}^y \\ u_{ne}^z \end{Bmatrix} \quad (34)$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{Bmatrix} w_k^x \\ w_k^y \\ w_k^z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{ne} h_{ki} \begin{Bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \end{Bmatrix} \quad (35)$$

El desplazamiento del nodo aerodinámico k , expresado como combinación lineal de los desplazamientos de los nodos estructurales, se puede escribir incluyendo los giros nodales de la siguiente manera,

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^{ne} [\mathbf{G}^{wu}]_{ki} \mathbf{u}_i \quad (36)$$

donde,

$$[\mathbf{G}^{wu}]_{ki} = \begin{bmatrix} h_{ki} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{ki} & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{ki} & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_i = \{u_i^x \quad u_i^y \quad u_i^z \quad | \quad \theta_i^x \quad \theta_i^y \quad \theta_i^z\}^T \quad (37)$$

siendo $[\mathbf{G}^{wu}]_{ki}$ una sub matriz que relaciona los desplazamientos generalizados del nodo estructural i con los desplazamientos del nodo aerodinámico k .

Realizando este procedimiento para los desplazamientos de todos los nodos aerodinámicos, se puede ensamblar una matriz global que permite relacionar los desplazamientos generalizados de todos los nodos estructurales con los desplazamientos de todos los nodos aerodinámicos de la siguiente manera,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{na} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}^{NA}_{AE}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{ne} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

donde,

$$[\mathbf{G}^{NA}_{AE}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}^{wu}]_{11} & \dots & [\mathbf{G}^{wu}]_{1i} & \dots & [\mathbf{G}^{wu}]_{1ne} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathbf{G}^{wu}]_{k1} & \dots & [\mathbf{G}^{wu}]_{ki} & \dots & [\mathbf{G}^{wu}]_{kne} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathbf{G}^{wu}]_{na1} & \dots & [\mathbf{G}^{wu}]_{nai} & \dots & [\mathbf{G}^{wu}]_{nae} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Finalmente queda construida la matriz de acoplamiento fluido-estructura que relaciona los desplazamientos de los nodos aerodinámicos con los desplazamientos generalizados de la *ME*.

4.2.2 Determinación de la matriz $[G_{AE}^{PC}]$

Una vez obtenida la matriz de acoplamiento fluido-estructura presentada en la ecuación (39), a través de esta se determina la matriz de acoplamiento que relaciona los desplazamientos correspondientes a los puntos de control con los desplazamientos generalizados de los nodos de la estructura.

Para cualquier panel de la malla aerodinámica la posición de su punto de control es (en el estado inicial y durante el movimiento) el promedio de las posiciones de sus nodos aerodinámicos. Además, el desplazamiento que experimenta el punto de control es igual al promedio de los desplazamientos de los nodos aerodinámicos asociados al panel.

La Figura 4 muestra un elemento típico de la malla aerodinámica con sus correspondientes nodos aerodinámicos (m, n, o, p) y su punto de control j .

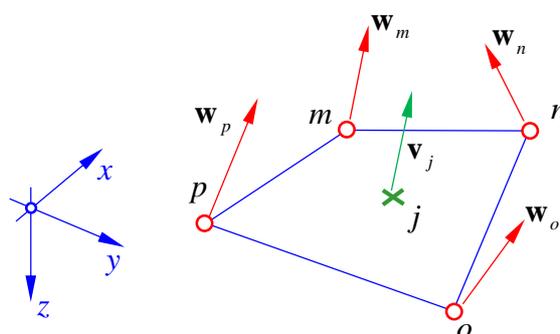


Figura 4: Relación entre los desplazamientos de los puntos de control y de los nodos aerodinámicos.

El desplazamiento \mathbf{v}_j del punto de control j , como anteriormente se mencionó, se determina como el promedio de los desplazamientos de los nodos aerodinámicos m, n, o y p , esto es,

$$\mathbf{v}_j = \frac{1}{4} (\mathbf{w}_m + \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_o + \mathbf{w}_p) \quad (40)$$

donde $\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_o, \mathbf{w}_p$ son vectores columnas de dimensión 3 que representan los desplazamientos de los nodos m, n, o y p , respectivamente. La expresión (40) puede escribirse de la siguiente manera,

$$\mathbf{v}_j = \left[\bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{T}} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_m \\ \mathbf{w}_n \\ \mathbf{w}_o \\ \mathbf{w}_p \end{Bmatrix} \quad (41)$$

donde

$$[\bar{\mathbf{T}}] = \frac{1}{4} [\mathbf{I}_3] \quad (42)$$

siendo $[\mathbf{I}_3]$ la matriz identidad de dimensión 3 x 3.

El mismo procedimiento se repite para todos los desplazamientos de los puntos de control. Luego se ensambla una matriz global $[\mathbf{T}]$ que permite relacionar los desplazamientos de todos los nodos aerodinámicos con los desplazamientos de todos los puntos de control, es decir

$$\mathbf{v} = [\mathbf{T}] \mathbf{w} \quad (43)$$

Reemplazando la primera ecuación de (20) en (43) se obtiene

$$\mathbf{v} = [\mathbf{T}] [\mathbf{G}_{AE}^{NA}] \mathbf{u} \quad (44)$$

que establece la relación entre los desplazamientos de los puntos control con los desplazamientos generalizados de los nodos estructurales. Observando la segunda ecuación de (20) y (44) se puede concluir que,

$$[\mathbf{G}_{AE}^{PC}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{G}_{AE}^{NA}] \quad (45)$$

4.3 Segundo método de transferencia (SMT)

Como antes se mencionó, con la idea de validar la técnica desarrollada, adicionalmente se implementa otra técnica que ha sido utilizada para combinar el UVLM con el FEM. Esta última técnica fue desarrollada en el trabajo de tesis de Preidikman (1998) especialmente para combinar el UVLM con un modelo estructural de un ala que consiste de una única viga, en voladizo, que se extiende a lo largo de la envergadura del ala. Luego ha sido implementada en herramientas computacionales para el desarrollo de simulaciones numéricas de UAVs con alas unidas y de gran alargamiento (Ceballos *et al.*, 2009), micro vehículos aéreos súper maniobrables (Roccia, 2013), turbinas eólicas (Gómez *et al.*, 2016), entre otras aplicaciones (Hall, 1999).

La idea básica para obtener la matriz de acoplamiento consiste en conectar rígidamente los nodos aerodinámicos de la *MA* a puntos ubicados sobre el eje elástico de la viga. Estos puntos son luego interpolados mediante los desplazamientos y giros nodales de la *ME* y utilizando las funciones de forma seleccionadas en la formulación del modelo de elementos finitos. De esta manera, el desplazamiento de un nodo de la *MA* queda expresado en términos de los desplazamientos nodales de la *ME*. Realizando este procedimiento para todos los nodos de la malla aerodinámica se establece una relación entre los desplazamientos de todos los nodos de la *MA* y de la *ME* y así finalmente se computa la matriz de acoplamiento que aparece en la primera ecuación de (20). La matriz que relaciona los desplazamientos generalizados de la estructura con los puntos de control se determina utilizando el mismo procedimiento descrito en la Subsección 4.2.2.

No es el objetivo de este trabajo entrar en profundidad con este método, para más detalles el lector puede consultar las referencias previamente mencionadas.

4.4 Acoplamiento e integración de las ecuaciones de movimiento

Introduciendo la ecuación (24) en las ecuaciones de movimiento presentadas en (15) se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}] \mathbf{q}(\hat{t}) = T_c^2 [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A(t) \quad (46)$$

Luego introduciendo (6) en (46) se llega a la ecuación (47) que describe el comportamiento dinámico de la estructura de una superficie sustentadora bajo la acción de las cargas aerodinámicas que induce el fluido, las cuales han sido contempladas en las ecuaciones en su forma adimensional.

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}] \mathbf{q}(\hat{t}) = \left(\frac{1}{2} \rho_c L_c^4 \right) [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AS}^{CP}]^T \hat{\mathbf{F}}_A \quad (47)$$

Para integrar la ecuación de movimiento (47) en el dominio del tiempo se utiliza el método predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming (Carnahan *et al.*, 1969). El primer paso consiste en escribir las n ecuaciones diferenciales de segundo orden de (47) como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1(\hat{t}) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(\hat{t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_2(\hat{t}) \\ -[\hat{\Lambda}] \mathbf{y}_1(\hat{t}) + \left(\frac{1}{2} \rho_c L_c^4\right) [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AS}^{CP}]^T \hat{\mathbf{F}}_A \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Siendo $\mathbf{y}_1(\hat{t}) = \mathbf{q}(\hat{t})$ $\mathbf{y}_2(\hat{t}) = \dot{\mathbf{q}}(\hat{t})$. El procedimiento para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden descrito en (48) se puede ver en detalles en las referencias Preidikman (1998) o Verstraete (2016).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Validación de la técnica basada en RBFs para combinar el UVLM con el FEM

En esta Subsección se resuelve numéricamente un problema clásico en aeroelasticidad estudiado por Fung (1955) que consiste en la determinación de la velocidad y frecuencia de *flutter* para un puente colgante. El modelo propuesto por Fung es bidimensional (2D) y las propiedades del puente son las siguientes:

$$\begin{aligned} b = 30 \text{ ft} \quad \omega_h^2 = 0.755 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \quad \omega_\alpha^2 = 2.410 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \\ r_\alpha^2 = 0.6222 \quad m = 269 \frac{\text{slug}}{\text{ft}} \quad \rho = 0.02378 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \end{aligned} \quad (49)$$

donde $2b$ es el ancho del puente, m es la masa por unidad de longitud, r_α es el radio de giro alrededor del eje elástico medido en semicuerdas, ρ es la densidad del aire, ω_h es la frecuencia natural de flexión y ω_α es la frecuencia natural de torsión.

Para resolver el problema se construye un modelo tridimensional (3D) que es equivalente al modelo 2D original, ver Figura 5. Este modelo, básicamente, consiste de un ala rectangular cuya relación entre la envergadura y la cuerda del ala es relativamente grande (relación de aspecto, $AR=10$), que es idealizada estructuralmente con una viga en voladizo que se extiende a lo largo de la envergadura y aerodinámicamente como una superficie plana rectangular sin espesor. Para representar la dinámica del modelo 2D, la solución se expande utilizando el primer modo en flexión y el primero en torsión. Las propiedades másicas y elásticas de la viga son seleccionadas de manera tal que se repliquen propiedades equivalentes al modelo 2D original.

Debido a que la PMT no incluye la información asociada a los grados de libertad de rotación, el modelo de la Figura 5 no es capaz de transmitir torsión a la malla aerodinámica. Por este motivo, la utilización del PMT requiere una modificación del modelo estructural para sortear este inconveniente. Se propone, entonces, la adición de elementos transversales (ver Figura 6) de gran rigidez y masa despreciable (elementos cinemáticos) con el fin de poder transmitir torsión a la malla aerodinámica.

La velocidad de *flutter* se encuentra para diferentes mallas aerodinámicas cuya discretización queda definida mediante el número de paneles a lo largo de la cuerda ($NPCH$) y el número de paneles a lo largo de la envergadura ($NPSP$).

Los resultados, que se presentan en la Tabla 2, muestran que los dos métodos de transferencia, PMT y SMT, predicen la misma velocidad de *flutter* para casi todas las mallas tratadas. Aparece una diferencia muy pequeña (0.05%) en la última malla (*Malla10*) que es relativamente pequeña. Es importante mencionar que la búsqueda de *flutter* se realizó con saltos de 0.1 *ft/seg* en V_∞ , lo que implica que los métodos podrían tener diferencias en la cuarta cifra significativa; sin embargo esas diferencias serían inferiores al 0.05%.

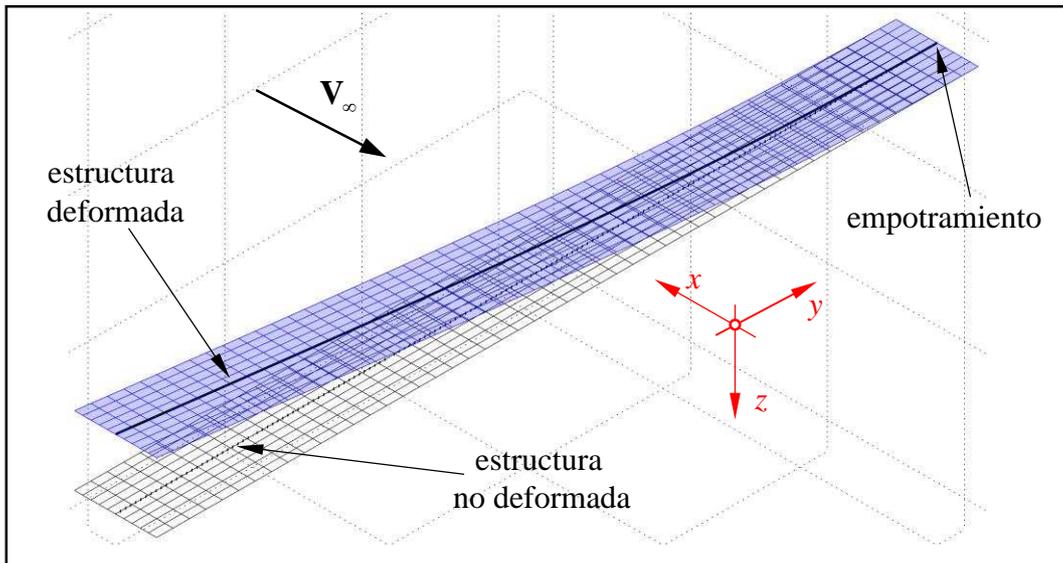


Figura 5: Modelo 3D para resolver el problema 2D del puente colgante.

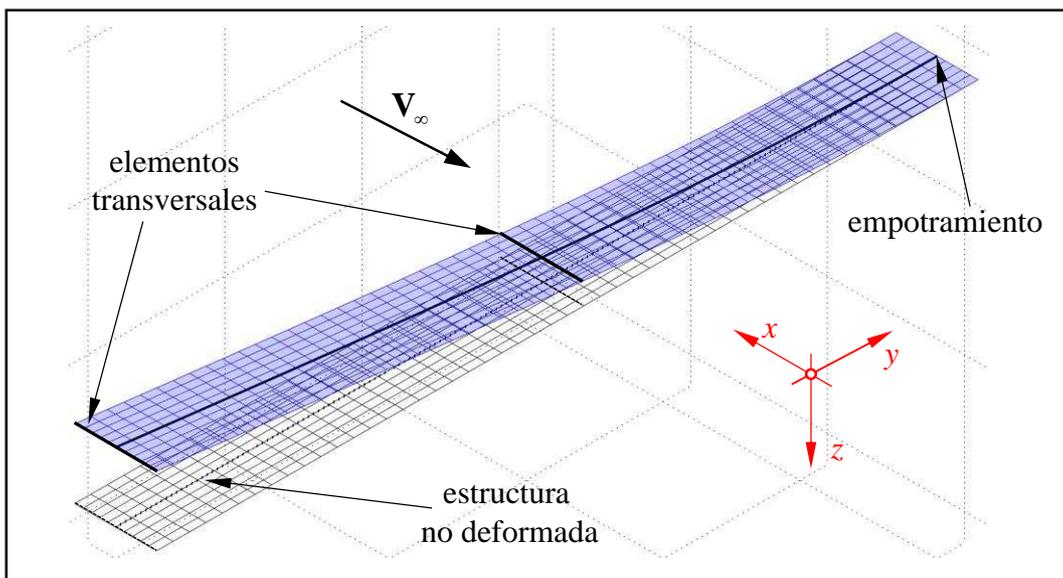


Figura 6: Inclusión de elementos transversales del modelo 3D para transferir torsión en el PMT.

<i>mall</i>	<i>NPCH</i>	<i>NPSP</i>	V_F [ft/s] para el SMT	V_F [ft/s] para el PMT
<i>mall</i> 06	6	30	164.6	164.6
<i>mall</i> 07	7	35	165.6	165.6
<i>mall</i> 08	8	40	166.4	166.4
<i>mall</i> 09	9	45	167.2	167.2
<i>mall</i> 10	10	50	167.8	167.7

Tabla 2: predicción de la velocidad de *flutter* por el PMT y el SMT para diferentes mallas.

En las dos primeras gráficas de la Figura 7 se presenta la respuesta, para la *mallaa08*, de las coordenadas modales q_1 (asociada al desplazamiento vertical) y q_2 (asociada al giro). Puede apreciarse una pequeña diferencia (del orden del 1.5%) en la amplitud de vibración entre los dos métodos. Las respuestas se superponen al principio y aparece un desfase al final de la simulación. Esto permite inferir que existe una diferencia en la frecuencia de *flutter*. El cómputo de la FFT (últimas dos gráficas de la Figura 7) muestra que ambos métodos predicen el mismo valor de frecuencia (1.26 *rad/s*). Sin embargo, las variables características ($L_C=7.5ft$ y $V_C = 166.4 ft/s$) y el número de pasos utilizados en la simulación (14000 pasos) permiten computar la frecuencia con una precisión de 0.01 *rad/s*. Esta precisión implica que, de existir, las diferencias se producirían a partir de la cuarta cifra significativa con un valor máximo asociado del 0.8%.

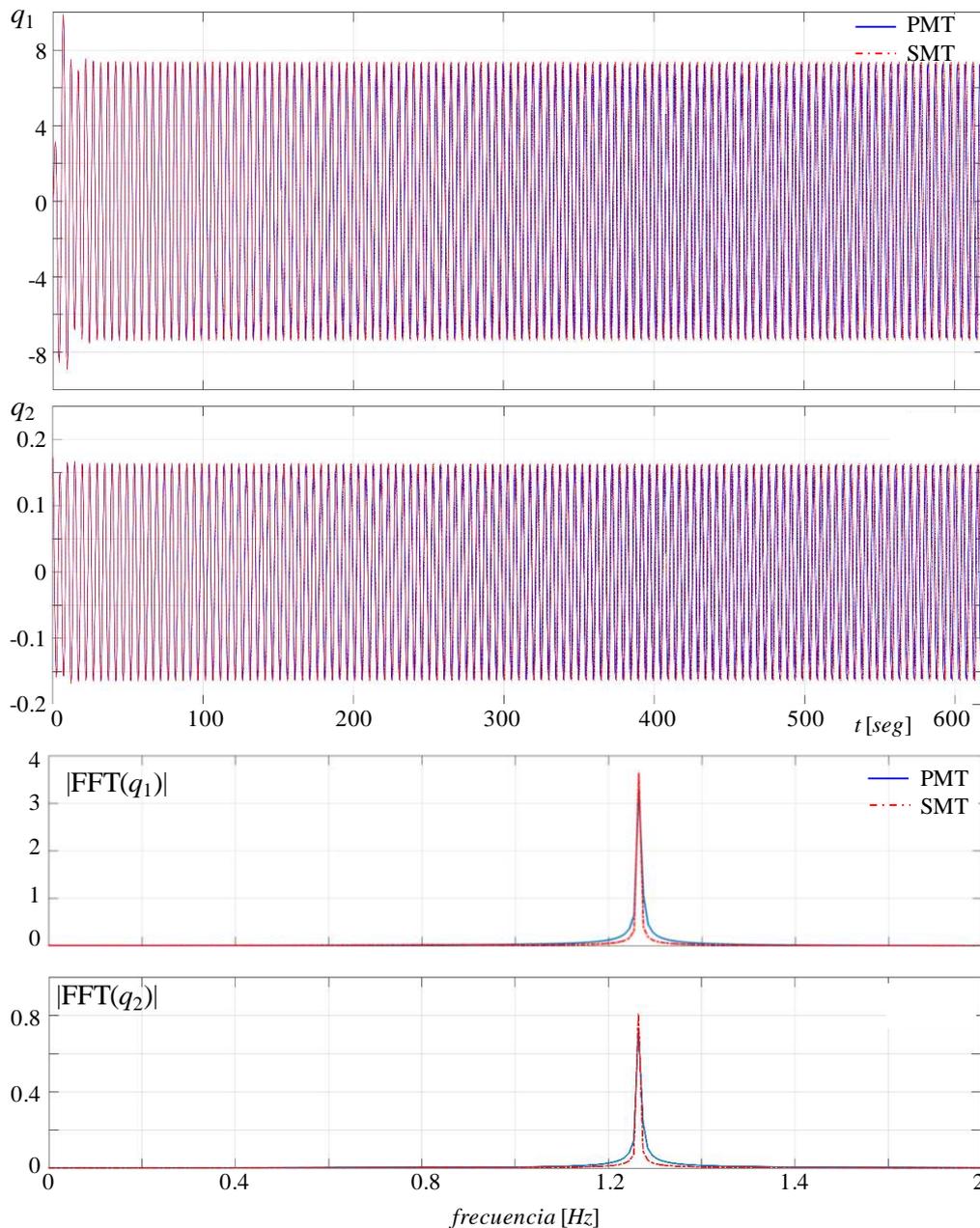


Figura 7: Comparación entre el PMT y el SMT para *mallaa08*.

Estos resultados muestran que la predicción de la velocidad de *flutter* es lo suficientemente buena, ya que tiene un error relativamente pequeño al compararla con la velocidad reportada por el modelo 2D de Fung (162 *ft/s*). La predicción considerando la malla más densa difiere en un 3.58% con la del modelo 2D. Aunque el error es relativamente pequeño, se podría intentar mejorar la predicción incrementando la relación de aspecto del ala. Por otro lado, se mostró que el PMT predice la misma respuesta que el SMT; hecho que permite inferir el correcto funcionamiento del PMT.

5.2 Comportamiento aeroelástico de un modelo de ala de UAV

Con la idea de ilustrar la aplicación de la herramienta computacional que surge como producto de la técnica presentada en este trabajo, se desarrollan simulaciones numéricas para comprender el comportamiento aeroelástico de un modelo de ala de UAV inspirado en las alas de gaviotas. El modelo estructural del ala, que se presenta en la Figura 8, está constituido por vigas de sección rectangular (*ancho*=2 *cm*, *alto*=0.6 *cm*), y el material asociado a las mismas es un acrílico cuyas propiedades son: densidad $\rho_b=1187 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidad $E = 3.18 \text{ GPa}$ y módulo de corte $G = 1.35 \text{ GPa}$. Este material ha sido utilizado en la construcción de modelos experimentales de alas de UAVs para estudiar su comportamiento aeroelástico (Wang *et al.*, 2012). El modelo de elementos finitos de la estructura cuenta con un total de 21 nodos y 21 elementos. Los dos nodos que se encuentran en la raíz del ala están empotrados. La malla aerodinámica seleccionada para realizar las simulaciones es de 8 paneles a lo largo de la cuerda y 32 paneles a lo largo de la envergadura.

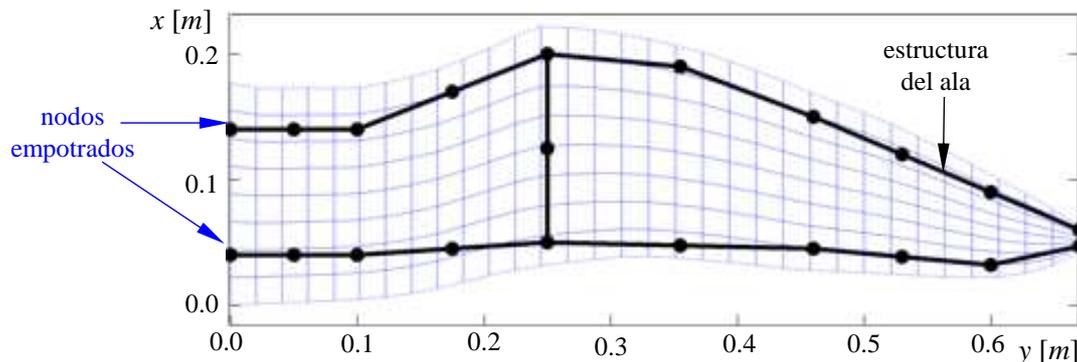


Figura 8: Modelo de elementos finitos y malla aerodinámica.

Para este modelo, los resultados revelan que el fenómeno de *flutter* aparece aproximadamente a una velocidad de corriente libre de $V_\infty = 29.66 \text{ m/s}$.

En la Figura 9 se presenta la respuesta de las coordenadas generalizadas asociadas a los seis primeros modos en función del tiempo adimensional para una velocidad $V_\infty = 18 \text{ m/seg}$ inferior a la velocidad de *flutter*. En la simulación se ha impuesto una condición inicial sobre el segundo modo de $q_2(0) = 0.08$ y el resto de las coordenadas y velocidades generalizadas son ceros. Claramente se puede observar que todos los modos, menos el tercero, tienen un comportamiento oscilatorio que se atenúa hasta alcanzar un valor que corresponde a la posición de equilibrio estático. En el modelo no se ha considerado amortiguamiento estructural, y por lo tanto la razón de este comportamiento se debe al amortiguamiento aerodinámico externo. También se puede observar que el modo 3 (el cual está asociado a la flexión en el plano *xy*) tiene un comportamiento transitorio al principio debido al acoplamiento que producen los efectos aerodinámicos, y luego de que todos los modos se estabilizan en su posición de equilibrio, el modo 3 se mantiene oscilando con una amplitud aproximadamente constante cuya frecuencia de vibración es de 19.35 *Hz* (tercera frecuencia

natural en vacío, esto es cuando $V_\infty = 0$). Este último comportamiento se debe a que el amortiguamiento en este modo es principalmente producido por los efectos viscosos, los cuales no son considerados en este modelo. El bajo amortiguamiento en la respuesta de q_3 , que no logra apreciarse, es debido a la resistencia inducida que es capturada por el UVLM.

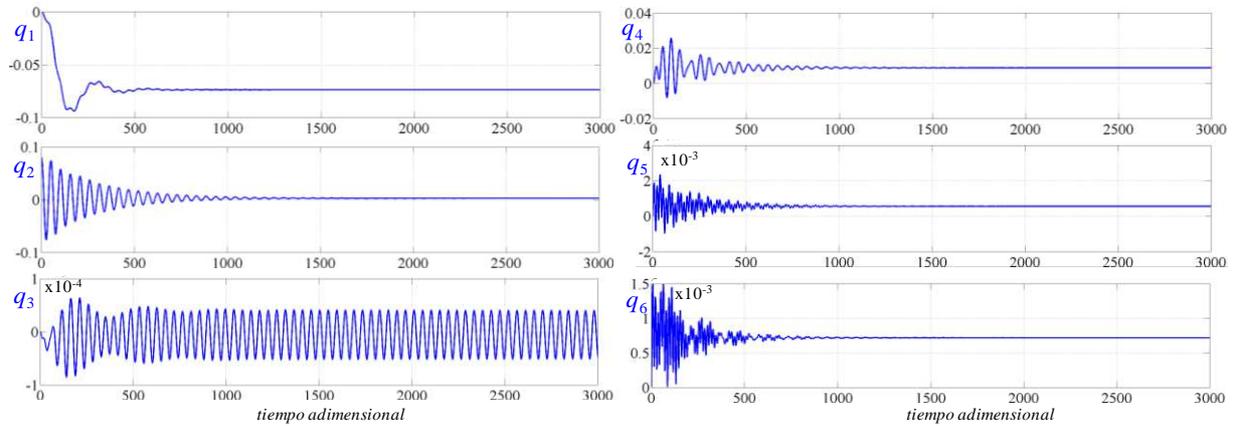


Figura 9: Respuesta aeroelastica de los primeros 6 modos para $V_\infty=18m/s$.

En la Figura 10 se presenta la respuesta de las coordenadas generalizadas asociadas a los primeros 4 modos para una velocidad muy próxima a la velocidad de *flutter* y teniendo en cuenta las mismas condiciones iniciales que en el caso anterior. Se puede observar como los modos comienzan con un transitorio y luego se acomodan para oscilar con un movimiento periódico a una determinada frecuencia (frecuencia de *flutter* $f_f = 10$ Hz). La proyección en el espacio de estado para los dos primeros modos (Figura 11) muestra que se desarrolla una oscilación de ciclo límite, lo que caracteriza al fenómeno de *flutter*.

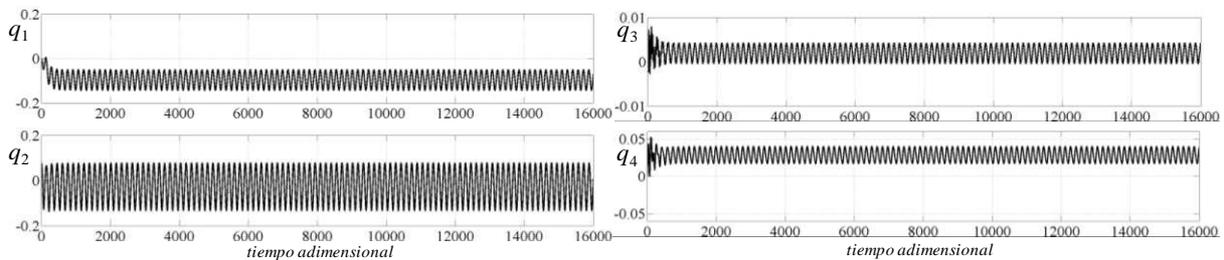


Figura 10: Respuesta aeroelastica de los primeros 4 modos para $V_\infty=29.66m/s$.

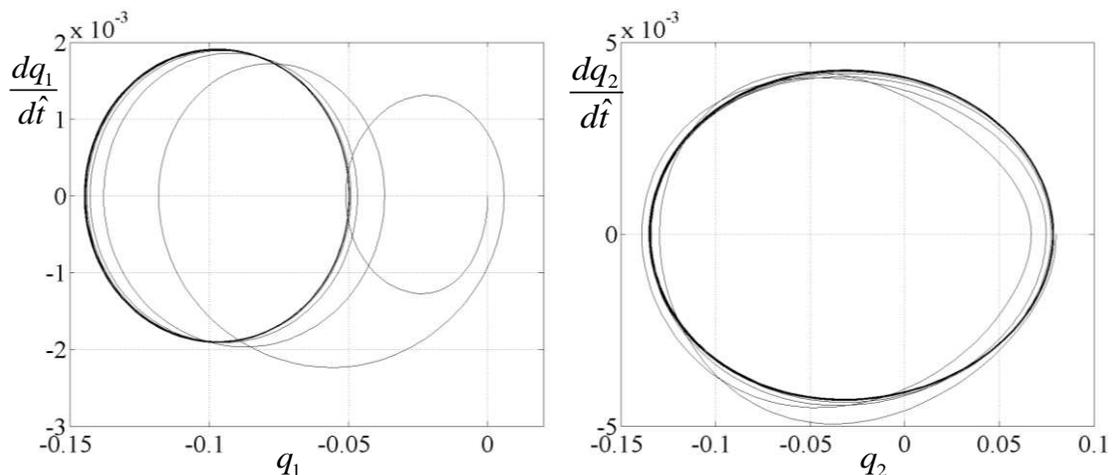


Figura 11: Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty = 29.66$ m/s).

En la Figura 12 se muestra las respuestas de los 4 primeros modos correspondientes a dos simulaciones para una velocidad ($V_\infty = 29.8 \text{ m/seg}$) superior a la velocidad de *flutter*. Para cada una de ellas se impusieron condiciones iniciales diferentes: (i) una condición inicial impuesta sobre el segundo modo $q_2(0) = 0.15$ y el resto de coordenadas y velocidades generalizadas igual a cero; y (ii) una condición inicial sobre el primer modo $q_1(0) = -0.2$ y las demás coordenadas y velocidades generalizadas igual a cero. Cada perturbación inicial provoca un comportamiento transitorio diferente en las respuestas, y luego alcanzan un movimiento periódico de igual amplitud. Aunque no se muestra la respuesta del resto de los modos, todos exhiben un mismo comportamiento cualitativo. En la Figura 13 se presenta la proyección en el espacio de estado donde se manifiesta la presencia de una oscilación de ciclo límite. Claramente, las soluciones convergen a este ciclo que por sus características resulta ser un ciclo límite estable. La trayectoria correspondiente a la primera condición inicial evoluciona acercándose al ciclo límite desde el exterior, mientras que la trayectoria asociada a la segunda condición inicial evoluciona acercándose desde el interior.

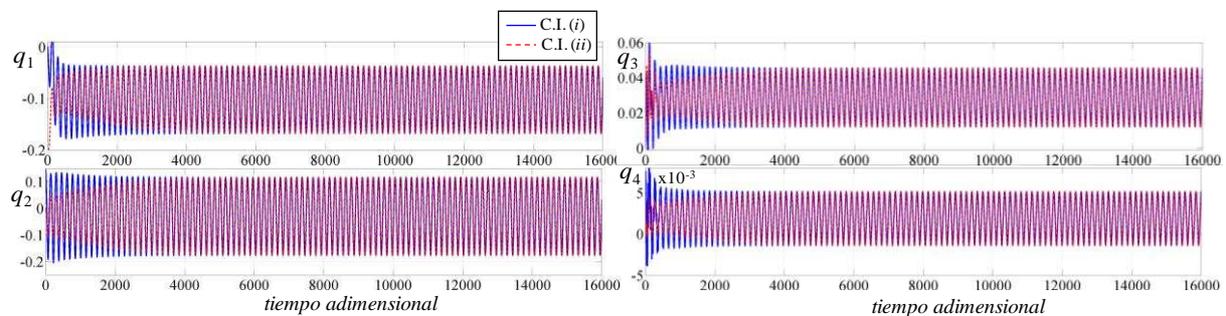


Figura 12: Respuesta aeroelastica de los primeros 4 modos para $V_\infty=29.8\text{m/s}$.

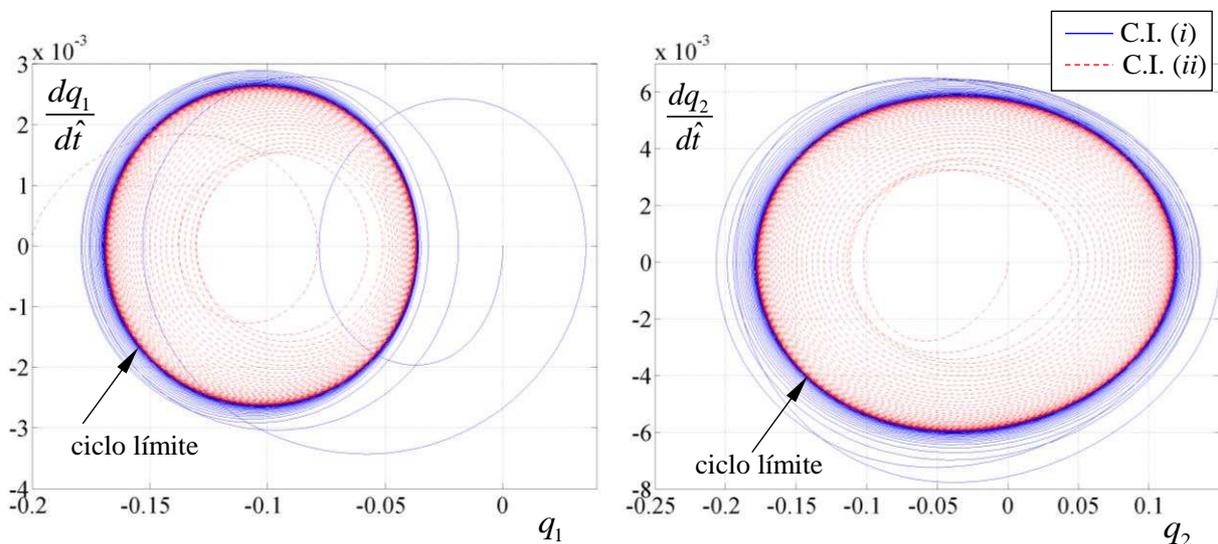


Figura 13: Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty=29.8 \text{ m/s}$).

En la Figura 14 se muestra una imagen que resulta del post-procesamiento de los resultados numéricos correspondientes a una simulación donde se manifiesta la presencia del fenómeno de *flutter*. En la imagen se puede observar, además de las alas, la forma de la estela en la que se revela la formación de los vórtices de punta de alas y una “onda” que se propaga en el seno del fluido.

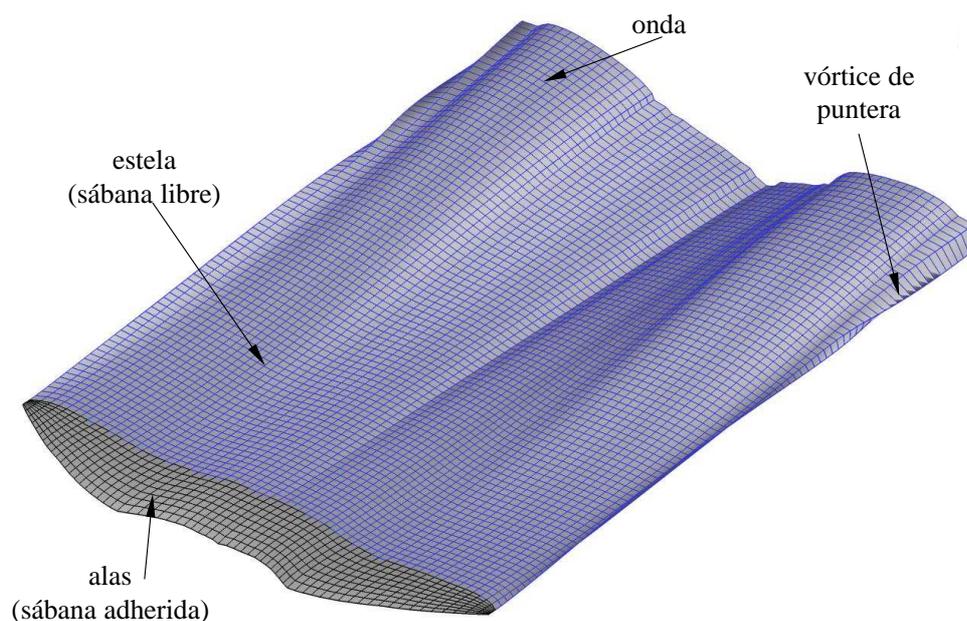


Figura 14: Forma de la estela en un instante de tiempo durante la presencia del fenómeno de *flutter*.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una técnica de interpolación, basada en la utilización de funciones de base radial, especialmente desarrollada para combinar el método de red de vórtices no-estacionario con el método de los elementos finitos. En base a esta técnica se desarrolló un modelo que fue implementado computacionalmente para obtener una herramienta apropiada para el desarrollo de simulaciones aeroelásticas. Se describieron brevemente el algoritmo del método de red de vórtices no-estacionario, el procedimiento de la formulación de elementos finitos que llevó a las ecuaciones que describen la dinámica estructural, y el acoplamiento de las ecuaciones de movimiento del sistema aeroelástico.

Se resolvió numéricamente un problema, considerado un clásico en aeroelasticidad, con la finalidad de validar la técnica aquí presentada. Este problema fue estudiado por Fung en una versión bidimensional y para comparar con sus resultados se desarrolló un modelo tridimensional equivalente. Adicionalmente para resolver este problema se implementó un método, denominado aquí como segundo método de transferencia (SMT), que ha sido utilizado para combinar el método de red de vórtices no-estacionario con el método de los elementos finitos. Los resultados obtenidos mostraron que la técnica aquí desarrollada predice la misma velocidad y frecuencia de *flutter* que el SMT. La predicción en la velocidad de *flutter* mostró una diferencia porcentual del 3.58% al compararla con los reportes encontrados en la literatura. Al resolver este problema se logró inferir en el correcto funcionamiento de la técnica propuesta en este trabajo.

Por otro lado, con el fin de ilustrar la aplicación de la herramienta computacional que implementa la técnica de interpolación basada en la utilización de funciones de base radial, se llevó a cabo un estudio computacional de un modelo de ala de vehículo aéreo no-tripulado inspirado en las alas de gaviotas. Los resultados mostraron que la herramienta es capaz de predecir la respuesta aeroelástica en las condiciones subcrítica (velocidad inferior a la velocidad de *flutter* V_F), crítica (a velocidad V_F) y supercrítica (velocidad superior a V_F). El post-procesamiento de los resultados permitió observar fenómenos que ocurren en la estela (la formación de los vórtices de punta de las alas y la presencia de una onda que se propaga en el seno del fluido).

REFERENCIAS

- Bazilevs Y., Takizawa K., Tezduyar T.E., *Computational fluid-structure interaction: methods and applications*, first edition, Wiley, United Kingdom, 2013.
- Beckert A. and Wendland H., Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions, *Aerospace Science and Technology*, vol. 5, pp.125–134, 2001.
- Brown S. A., Displacement Extrapolations for CFD+CSM Aeroelastic Analysis, 38th AIAA/ASME/ASCE/AHAIASC, Structures, Structural Dynamics and Materials, pp.291-300, 1997.
- Bucalem M.L. and Bathe K-J, *The Mechanics of Solids and Structures –Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- Buhmann M., *Radial Basis Functions*. Cambridge University Press, 2005.
- Carnahan B., Luther H. A. y Wilkes J. O., *Applied Numerical Methods*. John Wiley and Sons, 1969.
- Ceballos L., Preidikman S. y Verstraete M., Avances en el estudio del comportamiento aeroelástico de vehículos aéreos no tripulados. II Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI 2009, Rosario, Argentina, 14-16 de diciembre, 2009.
- Cebral J.R. and Löhner R., Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems, *AIAA Journal*, vol. 35, no. 4, pp. 687-692, 1997.
- Chen P.C. and Jadic I., Interfacing of fluid and structural models via innovative structural boundary element method, *AIAA Journal*, vol. 36, no. 2, pp. 282–286, 1998.
- Farhat C., Lesoinne M., and Le Tallec P. Load and motion transfer algorithms for fluidstructure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization, and application to aeroelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157:95–114, 1998.
- Fung Y. C., *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications Inc., New York, 1955.
- Gomez C. N., Preidikman S., López Mejía O.D. y Rocca B. A., Implementation of a new numerical tool to simulate the wake rupture in large-scale horizontal-axis wind turbines. Congreso Bienal IEEE Argencon, Buenos Aires, 2016.
- Goura GSL, Badcock KJ, Woodgate M.A., and Richards B.E., Extrapolation effects on coupled computational fluid dynamics/computational structural dynamics simulations, *AIAA Journal*; vol. 42, no. 2, pp. 312–315, 2003.
- Hall B. D., Numerical Simulation of the Aeroelastic Response of an Actively Controlled Flexible Wing. Master Thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1999.
- Heil M., Hazel A.L. and Boyle J., Solvers for large-displacement fluid–structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches, *Computational Mechanics*, 2008.
- Hou G., Wang J., and Layton A., Numerical Methods for Fluid-Structure Interaction— A Review, *Commun. Comput. Phys.*, vol. 12, pp. 337-377, 2012.
- Hughes T.J.R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Mineola, NY, 2000.
- Kalmar-Nagy T. and Stanculescu I., Can complex systems really be simulated?, *Applied Mathematics and Computation* 227, pp. 199–211, 2014.

- Katz K.J. and Plotkin A., *Low speed aerodynamics: from wing theory to panel methods*, McGraw-Hill, 1991.
- Konstadinopoulos P., Mook D.T., and Nayfeh A.H., A numerical method for general unsteady aerodynamics, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, August 19-21, 1981.
- Maza M., Desarrollo de herramientas numéricas para la simulación de la interacción de estructuras con un fluido a elevado número de Reynolds, Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, 2013.
- Michler C., Hulshoff S.J., van Brummelen E.H., de Borst R., A monolithic approach to fluid-structure interaction, *COMPUTERS & FLUIDS*, vol. 33, no.5-6, pp. 839-848, 2004.
- Preidikman S., Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems, Ph.D. Dissertation, Department of Engineering Science and Mechanics. Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1998.
- Rendall T. C. S., and Allen C. B., Unified fluid-structure interpolation and mesh motion using radial basis functions, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 74, pp. 1519-1559, 2007.
- Roccia B.A., Desarrollo de simulaciones numéricas para el estudio del vuelo de micro vehículos aéreos de alas batientes inspirados en la biología. Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Universidad Nacional de Córdoba 2013.
- Ryzhakov P. B., Rossi R., Idelsohn S. R. and Oñate E., A monolithic Lagrangian approach for fluid-structure interaction problems, *Computational Mechanics*, vol. 46, pp. 883-899, 2010.
- Shabana A. A., *Dynamics of Multibody Systems*, fourth edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2013.
- Verstraete M.L., Simulaciones numéricas del comportamiento aeroelástico de vehículos aéreos no tripulados con alas que cambian de forma. Tesis de Doctorado, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, 2016.
- Wang I., Gibbs S.C., and Dowell E. H., Aeroelastic Model of Multisegmented Folding Wings: Theory and Experiment, *Journal of Aircraft*, Vol. 42, No. 2, pp. 911-921, 2012.
- Wendland H., *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005.
- Wendland H., Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree, *Advances in computational Mathematics*, vol. pp. 389-396, 1995.