

## SISTEMAS PENDULARES DE MASAS MÚLTIPLES Y SU APLICACIÓN A LA EXTRACCIÓN DE ENERGÍA UNDIMOTRIZ EN EL MAR ARGENTINO

Florencia Reguera<sup>a,b,c</sup>, Franco E. Dotti<sup>a,c</sup>, Mauricio D. Sosa<sup>a</sup> y Sebastián P. Machado<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [gimap@frbb.utn.edu.ar](mailto:gimap@frbb.utn.edu.ar)*

<sup>b</sup>*Area Hidráulica, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina*

<sup>c</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras Clave:** Undimotriz, péndulo paramétrico, dinámica no lineal, energías renovables.

**Resumen.** En este artículo se estudia la posibilidad de aprovechamiento de la energía undimotriz del Mar Argentino, mediante dispositivos recolectores basados en la dinámica del péndulo paramétrico. Estos dispositivos aprovechan el movimiento de las olas, empleándolo como excitación para alcanzar rotaciones de un péndulo o sistema de péndulos. Los diseños considerados involucran péndulos de múltiples masas, lo cual brinda versatilidad a los dispositivos recolectores a la hora de situarlos en determinada zona deseada del espacio de parámetros de forzamiento. A su vez, el diseño de masas múltiples es necesario desde el punto de vista práctico, con el objetivo de alcanzar la resonancia paramétrica a partir de las bajas frecuencias observadas en el oleaje oceánico. Mediante la realización de experimentos y simulaciones numéricas, se demuestra la aplicabilidad del concepto en aguas del Mar Argentino.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los océanos contienen una enorme cantidad de energía concentrada en forma de mareas, corrientes y olas. El movimiento de las olas constituye una inagotable fuente de energía limpia que se no se aprovecha a gran escala en ninguna parte del mundo. Esta energía, denominada *undimotriz* en terminología castellana, cuenta con un altísimo potencial energético, estimado en el orden de 1 TW (Panicker, 1976) sólo para oleajes costeros de todo el mundo. Si además se considera la posibilidad de extracción en oleajes de aguas abiertas, donde podría aprovecharse la energía perdida por fricción y rompimiento, entonces el potencial undimotriz global es de un orden de magnitud mayor (10 TW, Falnes, 2007). Esto representa una cantidad comparable al consumo energético mundial total. En relación a otras energías renovables, la undimotriz presenta menor aleatoriedad en la predicción de sus procesos (Moragues, 2015), característica que la convierte en un recurso energético muy atractivo y con gran viabilidad en un futuro próximo.

A nivel global, las condiciones de oleaje más energéticas se hallan entre las latitudes de 30° a 60° en ambos hemisferios (Moragues, 2015), lo cual convierte al Mar Argentino en un potencial candidato para la utilización a gran escala de energía undimotriz. Desde el punto de vista del aprovechamiento, es conveniente proyectar dispositivos para su instalación en aguas abiertas, donde el nivel energético de las olas es más elevado. No obstante, para lograr una extracción energética económicamente sustentable, la zona de emplazamiento de dispositivos undimotrices debe cumplir con ciertos requerimientos esenciales, a saber: disponibilidad energética estable, hallarse cerca asentamientos urbanos, contar con acceso sencillo para tareas de mantenimiento, entre otros. Todo esto, generando además el menor impacto visual posible sobre el medio ambiente. Considerando los aspectos mencionados, Lifschitz y Tomazín (2016) ponderaron en un reciente estudio las costas bonaerenses por sobre las patagónicas como las más adecuadas para la instalación de dispositivos undimotrices.

Por su parte, el creciente interés en las energías del mar ha conducido a la revisión de sistemas mecánicos conocidos, en la búsqueda de dispositivos recolectores adecuados para cada necesidad. Uno de estos sistemas revisados es el péndulo paramétrico (Clifford y Bishop, 1995). Más allá de la simplicidad mecánica, lo cual conlleva la ventaja de un bajo mantenimiento, los sistemas que convierten energía undimotriz en energía cinética de un péndulo han llamado últimamente la atención de la comunidad científico-tecnológica dada la alta energía cinética que puede alcanzar un péndulo en rotación. Esto se traduce en una ventaja con respecto a otros dispositivos undimotrices, ya que un recolector de tamaño relativamente pequeño es capaz de generar una importante cantidad de energía. Por ejemplo, una unidad pendular con una masa de 1.5 Kg, longitud de varilla de 0.5 m y fricción viscosa de 0.13 Kg/s es en teoría capaz de generar unos 40 W de potencia (Nandakumar *et al.*, 2012; Najdecka *et al.*, 2015). La idea de este tipo de sistemas consiste en un péndulo montado sobre una plataforma flotante, a la cual las olas le imponen un movimiento vertical a una cierta frecuencia (promediada). Si se logra mantener rotaciones estables del péndulo con respecto a su eje pivot, un generador adosado al eje es capaz de extraer parte de la energía cinética y convertirla en eléctrica, la cual posteriormente puede ser inyectada en la red (Wiercigroch, 2010). Aunque la idea es conceptualmente simple y atractiva desde el punto de vista de la generación energética, el desarrollo de recolectores pendulares se halla en una etapa incipiente, no existiendo aún ningún prototipo instalado en el mar. Esto se debe principalmente a la complejidad en el tratamiento de la dinámica del sistema: El péndulo paramétrico presenta una dinámica no lineal, en virtud de la cual las respuestas rotacionales pueden coexistir con otras respuestas oscilatorias o caóticas, dependiendo de las condiciones

iniciales del movimiento (Dotti *et al.*, 2015). A esto debe sumarse que, aunque contenga una previsibilidad relativamente buena, el forzamiento inducido por el oleaje es de naturaleza estocástica (Najdecka *et al.*, 2015; Reguera *et al.*, 2016; Dotti y Reguera, 2016).

Ahora bien, desde el punto de vista del diseño del recolector resulta impráctica la utilización de un péndulo convencional, es decir, con una única masa rotante. Esto se debe a que su frecuencia natural depende únicamente de la distancia entre el eje pivot y el centro de gravedad, además de la gravedad de la Tierra. Así, dadas las bajas frecuencias de las olas del mar, las dimensiones de un péndulo de masa única requeridas para alcanzar la resonancia paramétrica resultarían irreales. Por ejemplo: para obtener una frecuencia natural de  $1 \text{ s}^{-1}$  la longitud del péndulo simple rondaría los 10 m; para alcanzar  $0.316 \text{ s}^{-1}$  dicha longitud se acercaría a los 100 m (Yurchenko y Aletras, 2013). Como se dijo, esto es algo irreal desde el punto de vista práctico. La consideración de un péndulo de múltiples masas concéntricas permite salvar la dificultad práctica mencionada. La ventaja de tal configuración radica en la versatilidad en lo que respecta a la sintonización de frecuencia natural, ya que la misma no depende en este caso sólo de la distancia al centro de gravedad sino también del momento de inercia del sistema pendular y de las relaciones entre longitudes y entre masas. En este artículo se comprueba que un sistema pendular de cuatro masas concéntricas es el diseño de dispositivo que más se adapta para su aplicación en aguas del Mar Argentino.

El artículo se organiza de la siguiente manera. La Sección 2 se dedica al modelado matemático del péndulo paramétrico, con foco en la influencia de las masas múltiples en la frecuencia natural del sistema y en la obtención de respuestas rotatorias estacionarias. La Sección 3 corresponde a un estudio sobre el forzamiento que puede proporcionar el Mar Argentino al recolector pendular; se selecciona la zona geográfica de instalación y se estudian los parámetros de excitación del oleaje. En la Sección 4 se presentan los resultados del trabajo, los cuales corresponden a la construcción de cartas de diseño de los dispositivos recolectores y a una comprobación experimental del modelo teórico. Por último, en la Sección 5, se resumen los aspectos más importantes de la investigación.

## 2 MODELO MATEMÁTICO

### 2.1 Ecuación del movimiento para el sistema sin fricción

La Figura 1 muestra un esquema del sistema pendular propuesto como recolector de energía undimotriz. El diseño cuenta con cuatro masas ubicadas en forma concéntrica y equidistante, opuestas de a pares. El ángulo  $\theta$  denota la posición relativa a la vertical y se mide con respecto al brazo de longitud  $l_1$  y masa  $m_1$ . Se asume que no puede haber una varilla con longitud mayor que  $l_1$  ni una masa de magnitud mayor que  $m_1$ . Al eje pivot del sistema se le impone un movimiento  $Y(t)$ . Si no se consideran las pérdidas por fricción, la ecuación diferencial del movimiento de este sistema puede establecerse mediante la ecuación de Lagrange para sistemas conservativos de un grado de libertad. Ésta se expresa como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dT}{d\theta} + \frac{dV}{d\theta} = 0, \quad (1)$$

donde  $(\bullet)'$  indica derivación con respecto al tiempo y  $T$  y  $V$  representan la energía cinética y potencial del sistema, respectivamente. Siendo  $g$  la gravedad,  $T$  y  $V$  corresponden a

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_1 (Y' + l_1 \dot{\theta} \sin \theta)^2 + m_2 (Y' + l_2 \dot{\theta} \cos \theta)^2 + m_3 (Y' - l_3 \dot{\theta} \sin \theta)^2 + m_4 (Y' - l_4 \dot{\theta} \cos \theta)^2 \right], \quad (2)$$

$$V = g \left[ m_1 (l_1 - l_1 \cos \theta) + m_2 (l_1 + l_2 \sin \theta) + m_3 (l_1 + l_3 \cos \theta) + m_4 (l_1 - l_4 \sin \theta) \right].$$

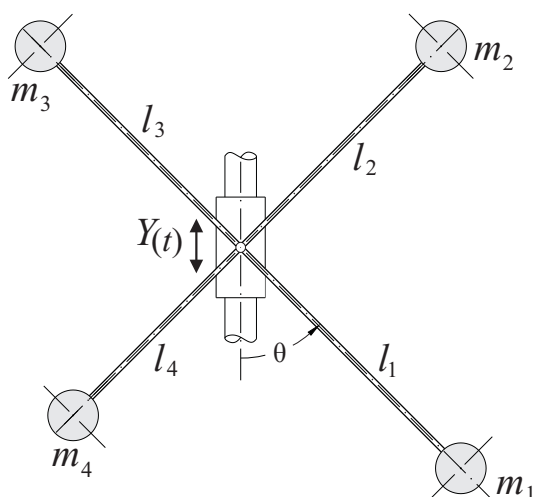


Figura 1: Esquema del tetra-péndulo paramétrico.

Introduciendo (2) en (1), y resolviendo las correspondientes derivadas, la ecuación de movimiento del sistema queda expresada como

$$I\theta'' + (Y'' + g)[(l_1m_1 - l_3m_3)\sin\theta + (l_2m_2 - l_4m_4)\cos\theta] = 0, \quad (3)$$

donde el momento de inercia del sistema se ha definido como  $I = \sum_{i=1}^4 l_i^2 m_i$ . Mediante consideraciones elementales de trigonometría, (3) puede reescribirse de la siguiente manera

$$I\theta'' + (Y'' + g)\sqrt{(l_1m_1 - l_3m_3)^2 + (l_2m_2 - l_4m_4)^2} \sin\left(\theta + \arctan\frac{l_2m_2 - l_4m_4}{l_1m_1 - l_3m_3}\right) = 0. \quad (4)$$

Si la fricción es despreciable, algo deseable para un sistema que debe ser de naturaleza autónoma, (4) permite estudiar el comportamiento dinámico del tetra-péndulo paramétrico de la Figura 1, para un movimiento impuesto dependiente del tiempo  $Y(t)$  de carácter arbitrario.

## 2.2 Ecuación del movimiento para el sistema con fricción

La fricción es muy importante en el diseño de recolectores dada su estrecha relación con el consumo de energía y, en consecuencia, con la eficiencia del sistema. De hecho, para el caso de recolectores pendulares, Nandakumar *et al.* (2012) han remarcado que por encima de ciertos valores de fricción no es posible extraer energía de un movimiento rotatorio. En la modelación del péndulo, es común suponer una única fuerza de fricción debida a la resistencia del aire, definida como proporcional a la velocidad tangencial del péndulo (Leven *et al.*, 1985; Clifford y Bishop, 1995). Esta elección es atractiva debido a su simplicidad matemática, aunque este enfoque de fricción debe aplicarse con precaución ya que a menudo no puede representar con precisión el comportamiento de péndulos reales (Squire, 1986; Horton *et al.*, 2008; Dotti *et al.*, 2017a). Esto ocurre principalmente porque un péndulo real involucra superficies deslizantes o rodantes, como rodamientos de bolas, donde la fricción seca puede jugar un papel importante. Además, si el movimiento del péndulo presenta un alto número de Reynolds, la fricción viscosa puede incluir un término cuadrático o hasta ser puramente cuadrática (Nelson y Olsson, 1986).

Para obtener el torque de fricción viscosa a ser considerado en la ecuación (5) se propone una fuerza de arrastre que incluye un término lineal y uno cuadrático de la velocidad tangencial. Así, se asume que para cada rama  $i$  del tetra-péndulo esta fuerza viene dada por

$$F_{V,i} = aV_i^2 \operatorname{sgn} \theta' + bV_i, \quad (5)$$

donde  $V_i$  es la velocidad tangencial de la masa  $i$ . Se han definido los coeficientes de fricción viscosa  $a$  y  $b$ , como independientes de la forma de las masas asumiendo que estas son similares entre sí. La función signo,  $\operatorname{sgn} \theta'$ , se debe a que ambas componentes de fricción deben oponerse al movimiento. Con  $V_i = l_i \theta'$ , el torque de fricción viscosa estará dado por

$$T_V = \sum_{i=1}^4 l_i F_{V,i} = a(\theta')^2 \operatorname{sgn} \theta' \sum_{i=1}^4 l_i^3 + b\theta' \sum_{i=1}^4 l_i^2. \quad (6)$$

El torque de fricción seca o de Coulomb se considera como constante y opuesto a la dirección del movimiento, de forma similar a como lo hacen [Horton et al. \(2008\)](#). Así

$$T_C = c \operatorname{sgn} \theta', \quad (7)$$

siendo  $c$  el coeficiente de fricción seca. Considerando  $T_V$  y  $T_C$  en (4) se obtiene

$$I\theta'' + a(\theta')^2 \operatorname{sgn} \theta' \sum_{i=1}^4 l_i^3 + b\theta' \sum_{i=1}^4 l_i^2 + c \operatorname{sgn} \theta' + \sqrt{(l_1 m_1 - l_3 m_3)^2 + (l_2 m_2 - l_4 m_4)^2} \operatorname{sen} \left( \theta + \arctan \frac{l_2 m_2 - l_4 m_4}{l_1 m_1 - l_3 m_3} \right) (Y'' + g) = 0. \quad (8)$$

La ecuación del movimiento (8) permite estudiar la dinámica del sistema de la [Figura 1](#), bajo una excitación  $Y(t)$  de carácter arbitrario y considerando un enfoque de fricción completo.

### 2.3 Forzamiento recíprocante y forzamiento sinusoidal

La mayoría de los estudios sobre el péndulo paramétrico presentes en la literatura científica considera el caso clásico de forzamiento senoidal ([Dotti et al., 2015](#)), esto es, asumiendo

$$Y(t) = -r \cos \Omega t. \quad (9)$$

En este trabajo se considera un forzamiento recíprocante pues los ensayos experimentales se realizan empleando un excitador con mecanismo biela-manivela. Tal excitación corresponde a

$$Y(t) = r(1 - \cos \Omega t) + L(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \Omega t}), \quad (10)$$

siendo  $r$  el radio de manivela y  $L$  la longitud de la biela. Además, se ha definido en (10) la relación adimensional biela-manivela como

$$\lambda = r/L. \quad (11)$$

Notar que (10) corresponde a una senoide cuando  $\lambda = 0$ , es decir, recupera el forzamiento del péndulo paramétrico clásico (Para un estudio más completo acerca de la influencia de  $\lambda$  en la dinámica del péndulo paramétrico, los autores recomiendan referirse al trabajo de [Dotti et al., 2017b](#)). Considerando el forzamiento (10) en la ecuación del movimiento (8), se obtiene

$$I\theta'' + a(\theta')^2 \operatorname{sgn} \theta' \sum_{i=1}^4 l_i^3 + b\theta' \sum_{i=1}^4 l_i^2 + c \operatorname{sgn} \theta' + \sqrt{(l_1 m_1 - l_3 m_3)^2 + (l_2 m_2 - l_4 m_4)^2} \left\{ r\Omega^2 \cos \Omega t + L \left[ \lambda^4 \Omega^2 \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} + \lambda^2 \Omega^2 \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right] + g \right\} \operatorname{sen} \left( \theta + \arctan \frac{l_2 m_2 - l_4 m_4}{l_1 m_1 - l_3 m_3} \right) = 0, \quad (12)$$

donde se ha definido

$$\Lambda_1 = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \Omega t}, \quad \Lambda_2 = \cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t, \quad \Lambda_3 = \cos^2 \Omega t \cdot \sin^2 \Omega t. \quad (13)$$

Si  $\lambda = 0$  la ecuación gobernante (12) se convierte en la ecuación gobernante del péndulo paramétrico clásico (Clifford y Bishop, 1995).

## 2.4 Ecuación adimensional del movimiento

Con el objeto de que el comportamiento dinámico del prototipo experimental sea comparable con el del dispositivo a instalarse en el mar, se requiere realizar un escalamiento previo. Esto implica determinar las magnitudes del sistema experimental que producen una dinámica comparable a la del sistema real. La adimensionalización de la ecuación diferencial del movimiento introduce generalidad al problema y permite determinar aquéllos sistemas físicos con parámetros adimensionales idénticos y por lo tanto también con una dinámica idéntica. Así, la forma adimensional de (12) se expresa como

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta}^2 \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \beta \dot{\theta} + \chi \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \left\{ R \left[ \cos \omega t + \lambda^3 \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1^3} + \lambda \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right] + 1 \right\} \sin(\theta + \arctan \varphi) = 0, \quad (14)$$

donde los parámetros adimensionales de forzamiento  $\omega$  y  $R$  se han definido como

$$\omega = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad R = \gamma^2 \frac{r \omega^2}{l_1}, \quad \gamma = \frac{\sqrt[4]{(1 - L_3 M_3)^2 + (L_2 M_2 - L_4 M_4)^2}}{\sqrt{\bar{I}}}, \quad (15)$$

los parámetros adimensionales de fricción  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\chi$  como

$$\alpha = \frac{a l_1}{m_1} \frac{1 + \sum_{i=2}^4 L_i^3}{\bar{I}}, \quad \beta = \frac{b}{m_1 \omega_0} \frac{1 + \sum_{i=2}^4 L_i^2}{\bar{I}}, \quad \chi = \frac{c}{\bar{I}}, \quad (16)$$

y el ángulo de fase  $\varphi$ , dado por

$$\varphi = \frac{L_2 M_2 - L_4 M_4}{1 - L_3 M_3}. \quad (17)$$

En (15) y (16) se ha definido además la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ , dada por

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \quad (18)$$

el momento de inercia adimensional  $\bar{I}$ , dado por

$$\bar{I} = \frac{I}{l_1^2 m_1} = 1 + \sum_{i=2}^4 L_i^2 M_i, \quad (19)$$

y las relaciones adimensionales de masas  $M_i$  y de longitudes  $L_i$ , correspondientes a

$$M_i = \frac{m_i}{m_1}, \quad L_i = \frac{L_i}{L_1}, \quad 2 \leq i \leq 4, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Por su parte, los puntos superpuestos sobre algunos símbolos en (14) indican derivación con respecto al tiempo adimensional  $\tau = \omega_0 t$ .

La resolución de (14) empleando las definiciones (15-20) junto con las condiciones

iniciales  $\theta_0 = \theta(0)$  y  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$ , permite obtener las historias temporales de posición angular  $\theta(\tau)$  y velocidad angular  $\dot{\theta}(\tau)$  del tetra-péndulo paramétrico. La adimensionalización de la ecuación física permite conducir estudios eminentemente matemáticos. Esto quiere decir que, sin conocer las constantes de un sistema físico en particular, puede realizarse un estudio teórico generalizado sobre la dinámica del sistema pendular. Así, (14) contiene como caso particular la ecuación adimensional del péndulo paramétrico clásico (Clifford y Bishop, 1995; Dotti *et al.*, 2015), la cual puede recuperarse considerando  $\lambda = 0$  y  $\varphi = 0$ . Es interesante notar que no se requiere  $M_i = 0$  y  $L_i = 0$  para recuperar dicha ecuación, por lo que todos los estudios adimensionales realizados para el péndulo paramétrico clásico son válidos para el sistema de masas múltiples, siempre que se respete que  $\lambda = 0$  y  $\varphi = 0$ .

Al igual que para el péndulo paramétrico clásico, las respuestas estacionarias del sistema de masas múltiples pueden clasificarse en cuatro tipos diferentes: oscilaciones, rotaciones, caos y posición de reposo. A su vez, pueden obtenerse oscilaciones y rotaciones de manera combinada en una misma respuesta periódica (Garira y Bishop, 2007). La obtención de cada una de estas respuestas dependerá de la configuración del sistema dinámico, es decir, de los distintos valores que adopten los parámetros de forzamiento (11) y (15) y fricción (16), que a su vez dependen de las relaciones de masas y longitudes (20). Además, dada la naturaleza no lineal de (14), estas respuestas pueden coexistir para una misma configuración físico-geométrica, siendo la obtención de una u otra respuesta determinada por la elección de las condiciones iniciales.

## 2.5 Sobre la frecuencia natural de los sistemas multi-pendulares

La expresión (18) admite comparación directa con la frecuencia natural del péndulo simple, la cual viene dada por la conocida expresión  $\sqrt{g/l}$ . Siendo  $0 \leq M_i \leq 1$  y  $0 \leq L_i \leq 1$  (con la restricción  $L_3 \cdot M_3 < 1$ ), es sencillo comprobar mediante (18) que  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

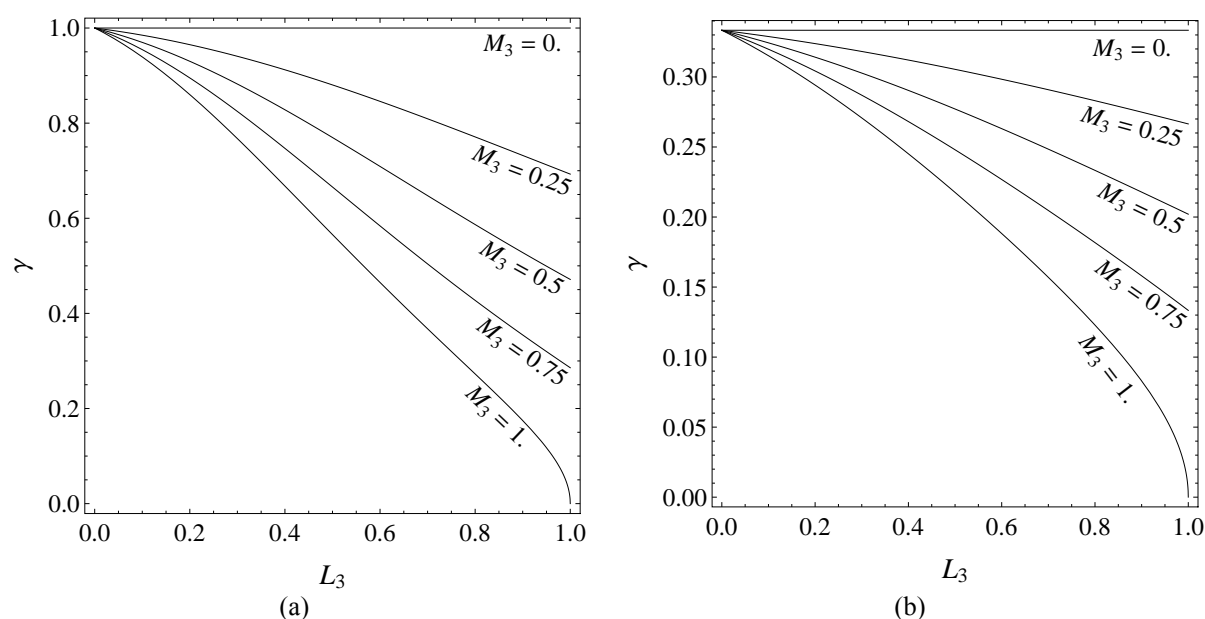


Figura 2: Comportamiento de la frecuencia natural del sistema pendular al variar los parámetros  $L_3$  y  $M_3$ , considerando (a)  $M_2 \cdot L_2 = 0$  y  $M_4 \cdot L_4 = 0$ ; (b)  $M_2 \cdot L_2 = 1$  y  $M_4 \cdot L_4 = 1$ .

Por lo tanto, la consideración de más de una masa en el sistema pendular conduce

necesariamente a una reducción en la frecuencia natural con respecto a la del péndulo simple (Yurchenko y Alevras, 2013). La Figura 2 ilustra esta situación. Para dos configuraciones de sistema pendular distintas entre sí, se muestra el comportamiento de  $\gamma$  al variar los parámetros  $L_3$  y  $M_3$ , mientras que se mantienen fijos  $M_2 \cdot L_2$  y  $M_4 \cdot L_4$ . En el caso de la Figura 2a, el sistema corresponde a un péndulo de dos masas opuestas  $m_1$  y  $m_3$ . Se observa que el máximo valor que puede adoptar  $\gamma$  es 1, cuando  $M_3 = 0$  ó  $L_3 = 0$ , es decir en el caso de un péndulo simple. La Figura 2b corresponde a un tetra-péndulo con tres masas iguales ( $m_1 = m_2 = m_4$ ) y equidistantes al centro de giro ( $l_1 = l_2 = l_4$ ), y una masa de menor valor ( $m_3 < m_1$ ) ubicada a una menor distancia ( $l_3 < l_1$ ). Esta configuración produce un mayor valor  $I$ , y por lo tanto permite una mayor reducción de la frecuencia natural en comparación con el caso de dos masas de la Figura 2a. Además, en la Figura 2b, el máximo valor que puede adoptar  $\gamma$  es  $1/3$ , en el caso límite en que  $L_3 = 0$  ó  $M_3 = 0$ , lo cual corresponde a un péndulo de tres masas iguales y no equidistantes. Si se permite también la variabilidad de los parámetros  $M_2$ ,  $L_2$ ,  $M_4$  y  $L_4$  resulta evidente la versatilidad del tetra-péndulo a la hora de sintonizar la frecuencia natural del sistema en virtud de los requerimientos de forzamiento externo.

## 2.6 Rotaciones puras en el espacio paramétrico $R$ - $\omega$

Se conoce como “rotación pura” a la respuesta estacionaria del péndulo paramétrico en la cual la velocidad angular nunca pasa por cero, lo cual implica que ángulo  $\theta$  es siempre creciente o siempre decreciente. Esta definición se debe a Garira y Bishop (2007), quienes también clasificaron todos los movimientos periódicos combinados oscilatorio-rotatorios posibles. A los efectos de la recolección de energía y siendo el péndulo paramétrico un sistema de pozo potencial (Thompson y Stewart, 2002), el movimiento deseable es el de rotación pura por tratarse del más energético. Así, cuando se habla de “rotación” en este ámbito, se está haciendo referencia estricta a la rotación pura.

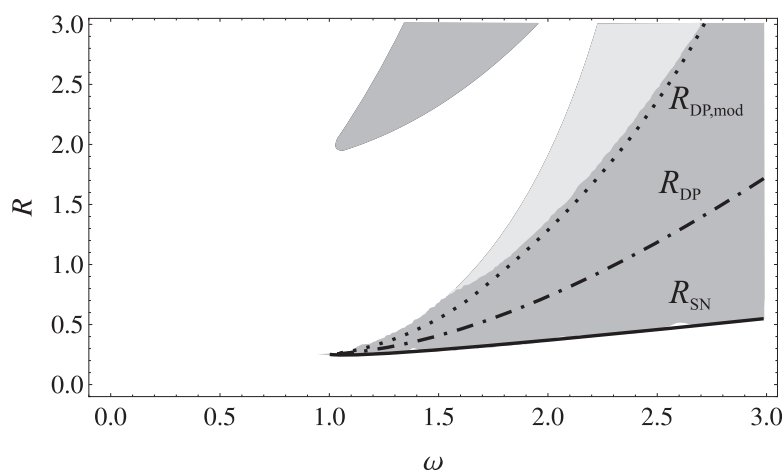


Figura 3: Zonas de rotaciones en el espacio de parámetros  $R$ - $\omega$  obtenido al resolver (14) empleando los parámetros del péndulo paramétrico clásico ( $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\chi = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $M_i = 0$ ,  $L_i = 0$ ,  $\varphi = 0$ ) y predicciones de (21-23). Referencia: ■: Zona de rotaciones de período 1, ■: zona de rotaciones de período mayor que 1.

Para el péndulo paramétrico clásico, Clifford y Bishop (1995) determinaron mediante un estudio numérico las zonas del espacio de parámetros  $R$ - $\omega$  para las cuales es posible obtener rotaciones puras, considerando únicamente el término lineal de fricción viscosa ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\chi = 0$ ). Así, en las zonas sombreadas de la Figura 3, las rotaciones coexisten con otras soluciones posibles y sólo pueden ser obtenidas si las condiciones iniciales son las adecuadas. En las zonas en blanco, las rotaciones no son respuestas posibles, y por lo tanto no pueden ser obtenidas, independientemente de las condiciones iniciales. Por su parte, Lenci *et al.* (2008)



obtuvieron expresiones analíticas para demarcar la zona mayor de rotaciones, cerca de la resonancia principal ( $\omega = 2$ ). Estas expresiones corresponden a la curva de inicio de rotaciones mediante una bifurcación *fold* o silla-nodo  $R_{SN}$ , dada por

$$R_{SN}(\omega, \beta) = \frac{2\beta(1 + \omega^2 + \omega^4)}{\omega + \omega^3}, \quad (21)$$

y a la curva de fin de rotaciones de período 1, que se produce mediante una bifurcación *flip* o de doblamiento de período  $R_{DP}$  dada por

$$R_{DP}(\omega, \beta) = R_{SN}(\omega, \beta) \omega^{3/4} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{\pi}{\omega}}{\omega \int_0^\pi \frac{d\theta}{[f_0(\theta)]^3} \int_0^\pi f_0(\theta) d\theta} \right\}^2}, \quad (22)$$

donde  $f_0(\theta)$  es la solución clásica del péndulo no forzado (Baker y Blackburn, 2005). En la Figura 3 se muestran, junto a las zonas de rotación de Clifford y Bishop (1995), las predicciones de (21) y (22). Se observa que (21) presenta una muy buena correspondencia con los resultados numéricos, mientras que (22) subestima el límite de doblamiento de período. Se ha encontrado que una expresión modificada de (22), dada por

$$R_{DP,mod}(\omega, \beta) = \omega^{3/4} R_{DP}(\omega, \beta), \quad (23)$$

produce mejores resultados a la hora de predecir la bifurcación *flip*. La predicción de (23) también se muestra en la Figura 3. Las expresiones (21-23) y las zonas de rotación de la Figura 3 fueron obtenidas para el péndulo paramétrico clásico, considerando únicamente fricción viscosa lineal. No obstante, su carácter adimensional las hace directamente aplicables a cualquier sistema gobernado por (14) que cumpla con las siguientes restricciones:

- $\lambda = 0$ , lo cual corresponde al forzamiento de la Teoría de olas lineal o de Airy (Chakrabarty, 2005). El forzamiento del mar se analiza en la Sección 3;
- $\alpha = 0$ , o sea que se desprecia el término cuadrático de fricción viscosa, algo razonable según el trabajo de Dotti *et al.* (2017a).
- $\chi = 0$ , o sea que se desprecia el término de fricción seca. Esto es razonable si se considera un sistema mecánico con extremadamente baja fricción en los rodamientos, algo buscado en un dispositivo que debe ser autónomo.
- $\varphi = 0$ , lo cual restringe el análisis a los diseños en los que se cumple  $M_2 \cdot L_2 = M_4 \cdot L_4$ . Este equilibrio no representa un problema ya que el agregado de masas responde únicamente a la necesidad de disminuir la frecuencia natural.

### 3 FORZAMIENTO DEL OLEAJE EN EL MAR ARGENTINO

#### 3.1 Zona de instalación propuesta

Se denomina “Mar Argentino” al sector del Océano Atlántico que cubre la plataforma continental adyacente a las costas de nuestro país. Es por lo tanto un mar epicontinental y se extiende desde la boca del estuario del Río de la Plata ( $35^\circ$  S) hasta la Isla de los Estados ( $56^\circ$  S), y desde la costa argentina hasta la isobata de 200 m de profundidad, incluyendo a las Islas Malvinas (Urien y Ewing, 1974). Aunque el Mar Argentino es muy extenso, contando con un área que ronda los  $10^6$  Km<sup>2</sup>, su aptitud para el aprovechamiento de la energía undimotriz depende de la localización geográfica.

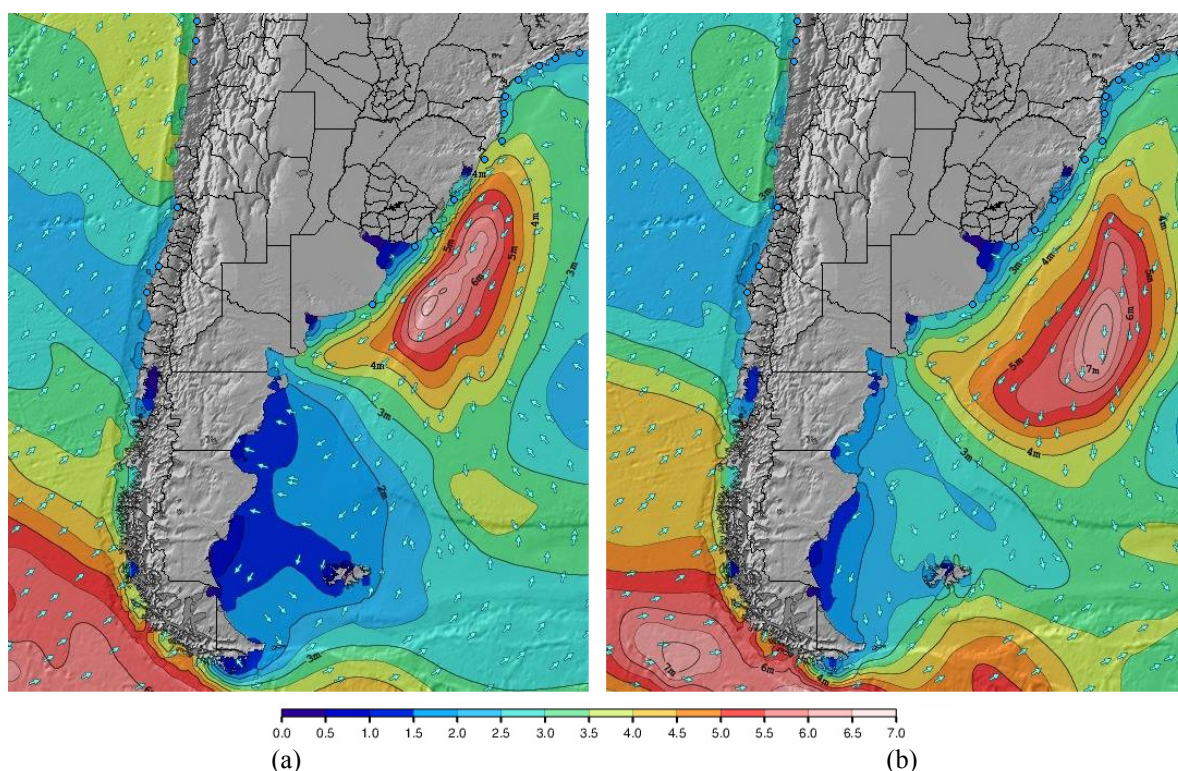


Figura 4: Mapas de altura significativa de olas  $H_S$  en el Mar Argentino, medida en metros, correspondiente a (a) viernes 19 de mayo de 2017 y (b) sábado 20 de mayo de 2017. Fuente: [www.surf-forecast.com](http://www.surf-forecast.com).

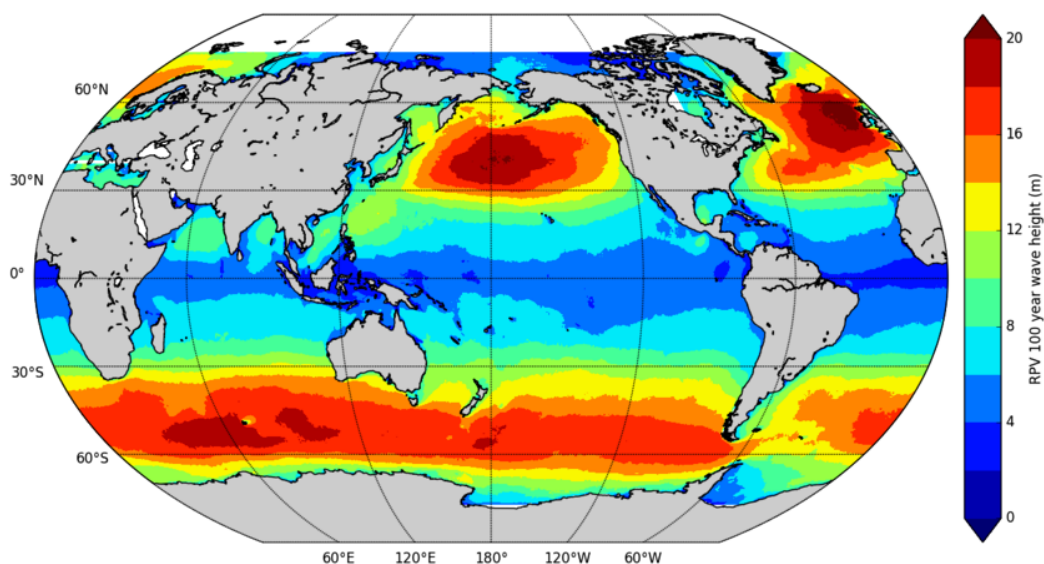


Figura 5: Período de recurrencia mundial de la altura de olas significativa  $H_S$  para los 100 años comprendidos entre 1916 y 2016. Fuente: [www.metocean.co.nz](http://www.metocean.co.nz).

Un factor primordial asociado a dicha aptitud es la altura significativa de olas  $H_S$ , definida como la altura media del tercio mayor de todas las olas observadas. Se desea un valor alto de  $H_S$  dado que es proporcional a la energía del oleaje. La Figura 4 muestra dos mapas típicos de  $H_S$  en el Mar Argentino, donde se observa que las costas bonaerenses se hallan cercanas a niveles altos. En contraparte, la zona patagónica presenta una mayor calma, debido a la preponderancia del viento del oeste y a la escasa profundidad de la plataforma continental. Los mapas de la Figura 4 corresponden a mediciones diarias de mayo de 2017, no obstante

guardan coherencia con las medias anuales de provistas por *MetOcean* (<https://hindcast.metoceanview.com/>) y con la recurrencia a cien años de la [Figura 5](#).

Además de contar con una mayor cercanía a oleajes de alto  $H_S$ , las costas bonaerenses también aventajan a las patagónicas en otro aspecto importante: se hallan más cerca de grandes asentamientos urbanos (Buenos Aires, Mar del Plata, La Plata). Por ello, se concluye que las costas bonaerenses son las más aptas para el aprovechamiento de energía undimotriz. Estos y otros requerimientos, como la frecuencia de olas de tormentas, fueron considerados por [Lanfredi et al. \(1992\)](#) y [Lifschitz y Tomazín \(2016\)](#) para arribar a una conclusión similar.

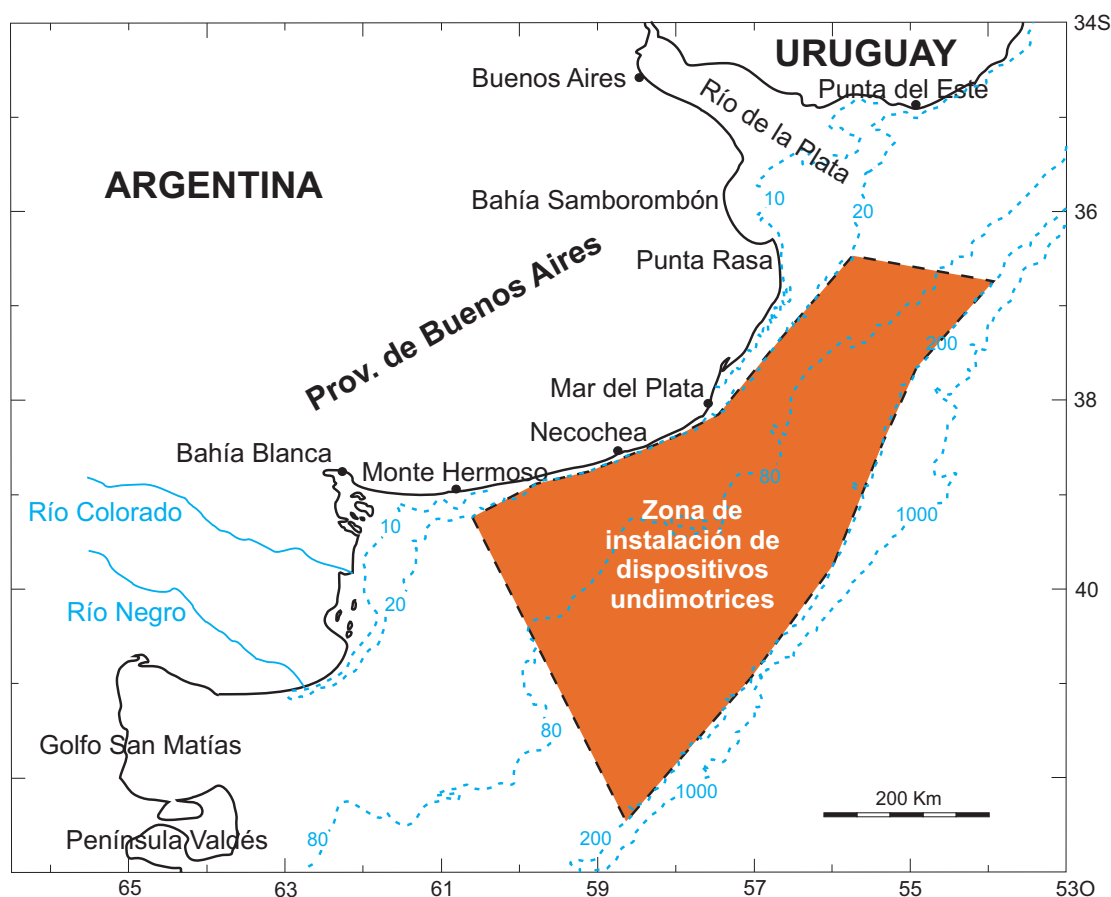


Figura 6: Zona propuesta para la instalación de recolectores pendulares en las costas de la Provincia de Buenos Aires. Los datos de batimetría corresponden a [Lucas et al. \(2005\)](#).

La [Figura 6](#) muestra la zona propuesta para la instalación de recolectores en las cercanías de las costas bonaerenses. Se ha asumido en la elección de dicha zona una distancia máxima a la costa de alrededor de 400 Km y que la altura significativa de olas tenga valores considerables. Para el caso se tiene que, de manera aproximada,  $0.5 \text{ m} < H_S < 2.5 \text{ m}$ , según datos de la [Figura 4](#). Ahora bien, considerando además la batimetría de la [Figura 6](#), se asume para el modelado del oleaje la siguiente hipótesis

$$\begin{aligned} 20 \text{ m} \leq d \leq 80 \text{ m} &\rightarrow 0.5 \text{ m} \leq H_S \leq 1.5 \text{ m}, \\ 80 \text{ m} \leq d \leq 200 \text{ m} &\rightarrow 1.5 \text{ m} \leq H_S \leq 2.5 \text{ m}, \end{aligned} \quad (24)$$

siendo  $d$  la profundidad del mar. Según [LeMéhauté \(1976\)](#), el período de una ola es

$$T = \sqrt{\frac{2\lambda\pi}{g \tanh(2\pi d/\kappa)}}, \quad (25)$$

donde  $\kappa$  es la longitud de onda de la ola. Por su parte, [Garrison y Ellis \(2013\)](#) proponen que para olas generadas por viento puede considerarse aproximadamente

$$60 \text{ m} \leq \kappa \leq 200 \text{ m}. \quad (26)$$

Las ecuaciones (24-26) establecen las características de forzamiento del oleaje a emplear en el diseño de un dispositivo recolector pendular a ser instalado en la zona indicada en la [Figura 6](#).

### 3.2 Modelado del oleaje

Los distintos escenarios de forzamiento considerados en (24-26) pueden representarse en el diagrama adimensional de [LeMéhauté \(1976\)](#), como muestra la [Figura 7](#).

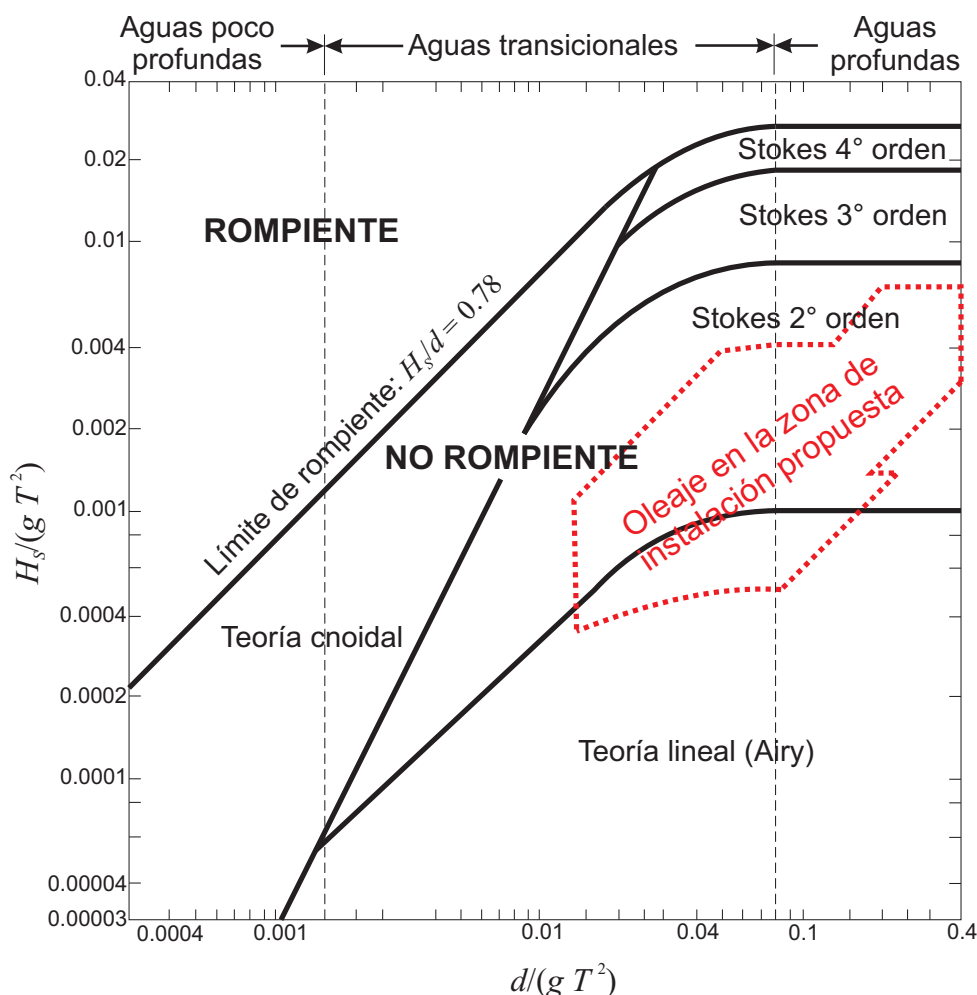


Figura 7: Características del oleaje en la zona propuesta para la instalación de recolectores pendulares, ubicadas en el diagrama de [LeMéhauté \(1976\)](#).

De allí se verifica que la instalación se proyecta para aguas transicionales y profundas, y que el oleaje correspondiente puede ser modelado por la teoría de Stokes de Segundo Orden o por la teoría de Airy, dependiendo el caso ([Chakrabarty, 2005](#)). El modelo de Stokes de Segundo Orden prevé una elevación de la superficie del agua dada por

$$Y_{S2}(t) = -H_S (\cos \Omega_S t + T_S \cos 2\Omega_S t), \quad (27)$$

donde

$$T_S = \frac{\pi H_S [3 - \tanh^2(2\pi d/\kappa)]}{2\kappa \tanh^3(2\pi d/\kappa)}. \quad (28)$$

y  $\Omega_S = 1/T$ . La Teoría Lineal o de Airy contempla sólo la componente sinusoidal principal, es decir

$$Y_A(t) = -H_S \cos \Omega_S t, \quad (29)$$

lo que corresponde al forzamiento del péndulo paramétrico clásico, es decir a la ecuación (9) si se toma  $r = H_S$  y  $\Omega = \Omega_S$ .

Ahora bien, si se emplea (29) en la modelación de todos los escenarios de forzamiento propuestos, el máximo error que se comete es de un 12%, como se muestra en la Figura 8. Así, a efectos prácticos, se considera apropiada la simplificación mencionada, empleándose el modelo de Airy en todos los casos.

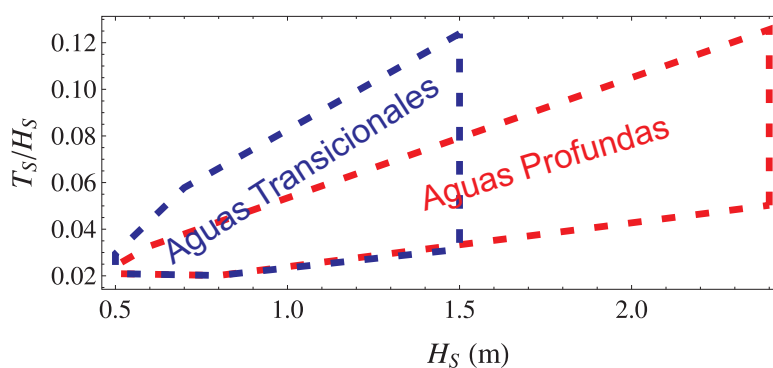


Figura 8: Diagrama indicativo del error que se comete al emplear la teoría de Airy en lugar de la teoría de Stokes de Segundo Orden para los escenarios planteados en (24-26). Como medida del error se emplea la magnitud  $T_S/H_S$ , la cual representa el porcentaje de influencia del término  $\cos 2\Omega_S t$  en (27).

Por último, es necesario un comentario sobre la naturaleza estocástica del oleaje. Las teorías de Airy y Stokes son frecuentemente utilizadas en ingeniería oceánica en el diseño de estructuras costeras y *offshore*. La hipótesis de una frecuencia única del oleaje es atractiva, porque permite arribar a conclusiones generales que pueden volcarse en cartas de diseño. No obstante, la hipótesis de movimiento armónico constituye una fuerte simplificación de un fenómeno que, si bien cuenta con una frecuencia predominante, es en realidad de naturaleza estocástica. En el caso de recolectores pendulares, las cartas de diseño basadas en la teoría de Airy permiten estimar las dimensiones del dispositivo para las cuales *es posible* el movimiento rotatorio. Así, una carta de diseño no asegura la rotación continua del péndulo bajo el forzamiento del oleaje, ya que la misma puede perderse debido a la variabilidad de la excitación. Dado este inconveniente, el recolector pendular requiere indefectiblemente de una acción de control activo que permita iniciar y mantener las rotaciones. Para diseñar un sistema de control se requiere una representación mucho más realista de la historia temporal del oleaje que la lograda con la teoría de Airy. Esta precisión puede lograrse empleando una composición de ondas sinusoidales con frecuencias determinadas mediante un espectro. Así lo han hecho Najdecka *et al.* (2015) y Reguera *et al.* (2016), empleando el enfoque de Pierson (1955) junto al método de Shinozuka y Jan (1972) para procesos aleatorios. El diseño de sistemas de control no se aborda en este trabajo.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Introducción

En esta sección se estudia la posibilidad de instalación de recolectores pendulares de energía undimotriz en aguas del Mar Argentino, desde el punto de vista teórico y experimental. En primer término se construyen cartas de diseño cuyo objetivo es determinar aquellas configuraciones del dispositivo recolector que posibiliten la obtención de rotaciones bajo la excitación del oleaje. Estas cartas son construidas en base a la formulación matemática del péndulo (Sección 2) y a las características del forzamiento del Mar Argentino (Sección 3). Las cartas se presentan en un espacio dimensional  $H_S$ - $\Omega_S$  en lugar de un espacio adimensional  $R$ - $\omega$ ; esto se realiza para lograr una mejor comprensión de las gráficas, ya que así la zona factible de excitación del oleaje se mantiene inalterada al considerar distintos sistemas físicos (La relación entre ambos espacios se obtiene de (15), considerando  $\Omega = \Omega_S$  y  $r = H_S$ ). Con el objeto de comprobar las predicciones, se realizan experimentos en un prototipo a escala y se comparan dichos resultados con los obtenidos mediante el modelo matemático presentado en la Sección 2.

### 4.2 Cartas de diseño de recolectores pendulares

Las cartas de diseño consisten en superponer el espacio dimensional  $H_S$ - $\Omega_S$  asociado al sistema pendular, con las características del forzamiento del mar de la Figura 6. Así, se pretende determinar las configuraciones del dispositivo recolector que posibiliten la obtención de rotaciones estacionarias bajo tal excitación. El forzamiento del mar, definido mediante (24-26) y (29), es una excitación física caracterizada por  $H_S$  y  $\Omega_S$ ; es establecida a priori y no puede ser modificada. Por lo tanto, lo que debe adecuarse son las dimensiones del dispositivo recolector. Puntualmente, esto corresponde a sintonizar la frecuencia natural  $\omega_0$  de tal manera que exista una intersección entre las zonas de rotación del péndulo paramétrico y las zonas de forzamiento del mar.

Bajo este precepto se presentan las cartas de las Figuras 9-15. Las curvas de  $R_{SN}$  y  $R_{DP,mod}$  delimitan, al igual que en la Figura 3, la zona principal de rotación del sistema pendular. Así, el área ubicada a la derecha de  $R_{SN}$  y  $R_{DP,mod}$  corresponde a la zona de parámetros donde es posible obtener rotaciones. Las Figuras 9 y 10 presentan un sistema de dos masas opuestas  $m_1$  y  $m_3$ , siendo  $m_2 = m_4 = 0$ . Puede observarse que es factible obtener rotaciones con este sistema, aunque el empleo de elevados valores de  $l_1$  (de hasta 3 m) podría resultar impráctico en un medio tan hostil como el mar.

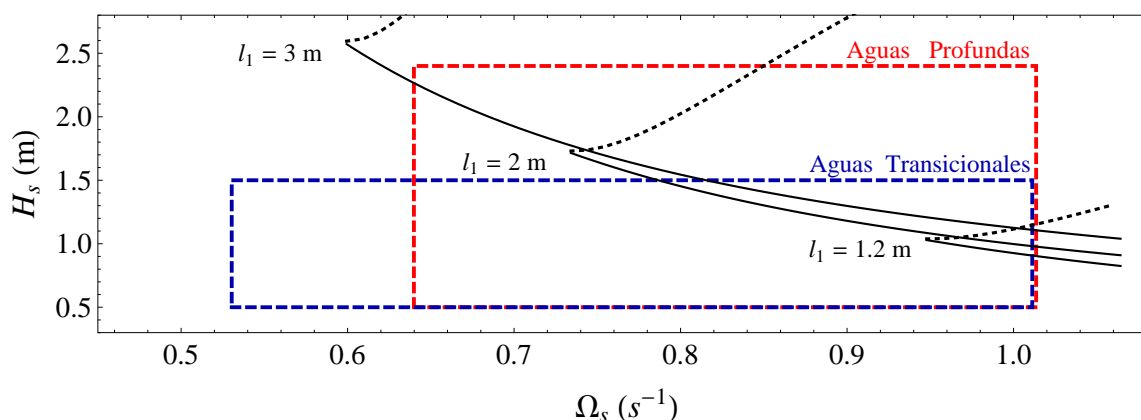


Figura 9: Carta de diseño para dispositivo pendular de dos masas, con la siguiente configuración:  $L_2 = 0$ ,  $M_2 = 0$ ,  $L_3 = 0.9$ ,  $M_3 = 0.9$ ,  $L_4 = 0$  y  $M_4 = 0$ . Fricción:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.03$  y  $\chi = 0$ . Referencia: —:  $R_{SN}$ , ....:  $R_{DP,mod}$ .

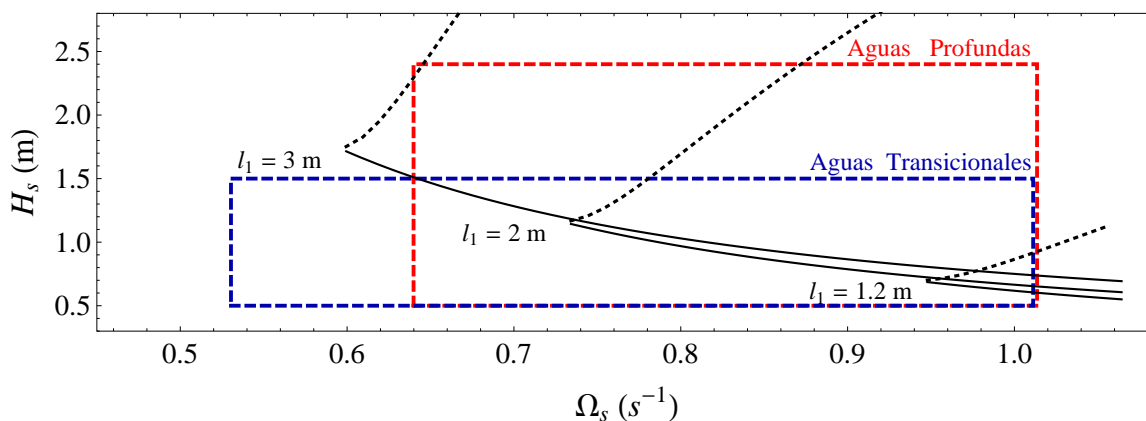


Figura 10: Carta de diseño para dispositivo pendular de dos masas, con la siguiente configuración:  $L_2 = 0, M_2 = 0, L_3 = 0.9, M_3 = 0.9, L_4 = 0$  y  $M_4 = 0$ . Fricción:  $\alpha = 0, \beta = 0.02$  y  $\chi = 0$ . Referencia: - :  $R_{SN}$ , ---- :  $R_{DP,mod}$ .

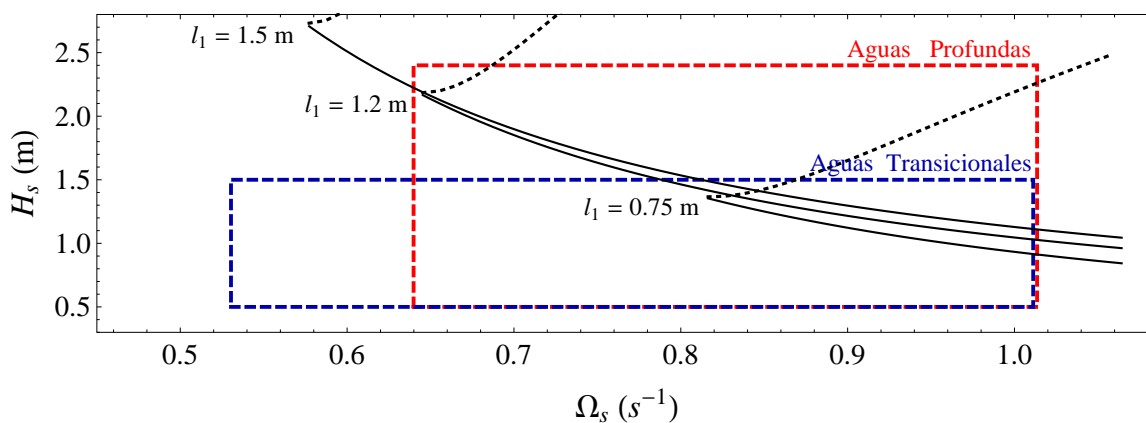


Figura 11: Carta de diseño para dispositivo pendular de cuatro masas, con la siguiente configuración:  $L_2 = 1, M_2 = 1, L_3 = 0.9, M_3 = 0.9, L_4 = 1$  y  $M_4 = 1$ . Fricción:  $\alpha = 0, \beta = 0.03$  y  $\chi = 0$ . Referencia: - :  $R_{SN}$ , ---- :  $R_{DP,mod}$ .

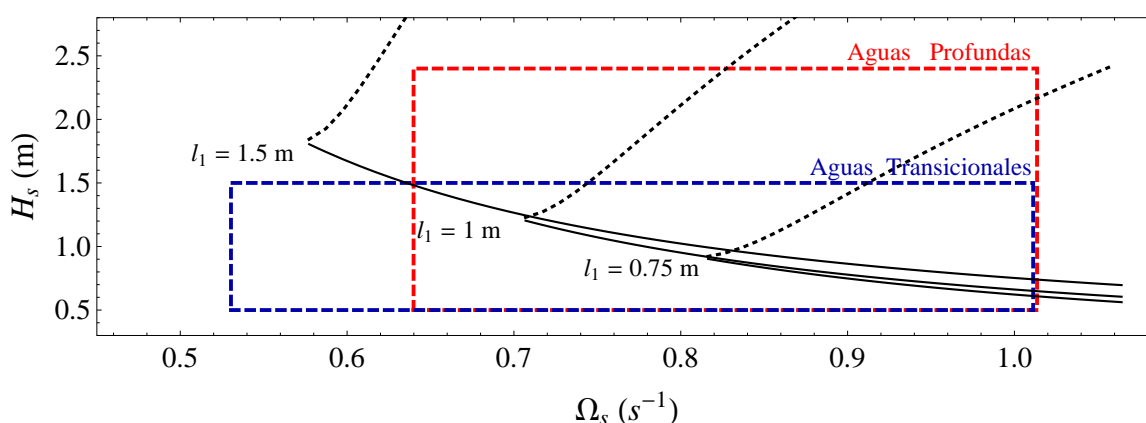


Figura 12: Carta de diseño para dispositivo pendular de cuatro masas, con la siguiente configuración:  $L_2 = 1, M_2 = 1, L_3 = 0.9, M_3 = 0.9, L_4 = 1$  y  $M_4 = 1$ . Fricción:  $\alpha = 0, \beta = 0.02$  y  $\chi = 0$ . Referencia: - :  $R_{SN}$ , ---- :  $R_{DP,mod}$ .

La importancia de la fricción puede evidenciarse comparando las Figuras 9 y 10: un aumento en la fricción mueve hacia arriba las zonas de rotación dificultando en algunos casos la extracción energética, especialmente en aguas transicionales. No obstante, la fricción puede convertirse en una variable de diseño, en el caso de que se desee centrar la zona de rotación en valores altos de  $H_s$ . Por ejemplo, en la Figura 9, si se deseara emplear un sistema con  $l_1 = 1.2$

m en aguas profundas de  $H_S = 2$  m, una solución factible sería aumentar la fricción del sistema. El fenómeno de corrimiento de curvas debido a la fricción también se comprueba en las Figuras 11 y 12, correspondientes a un péndulo de cuatro masas ( $m_1 \neq 0$ ,  $m_3 \neq 0$ ,  $m_2 = m_4 = 0$ ).

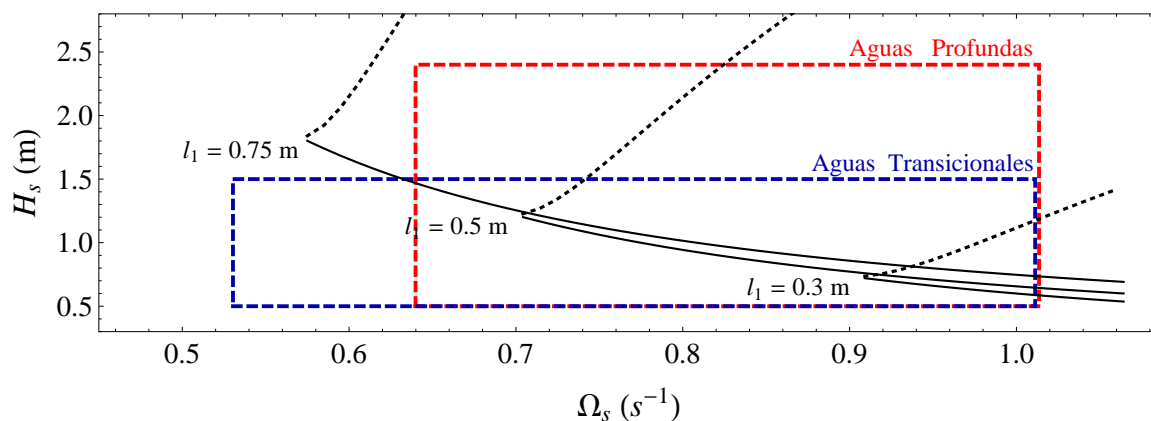


Figura 13: Carta de diseño para dispositivo pendular de cuatro masas, con la siguiente configuración:  $L_2 = 1$ ,  $M_2 = 1$ ,  $L_3 = 0.95$ ,  $M_3 = 0.95$ ,  $L_4 = 1$  y  $M_4 = 1$ . Fricción:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.02$  y  $\chi = 0$ . Referencia: —:  $R_{SN}$ , .....:  $R_{DP,mod}$ .

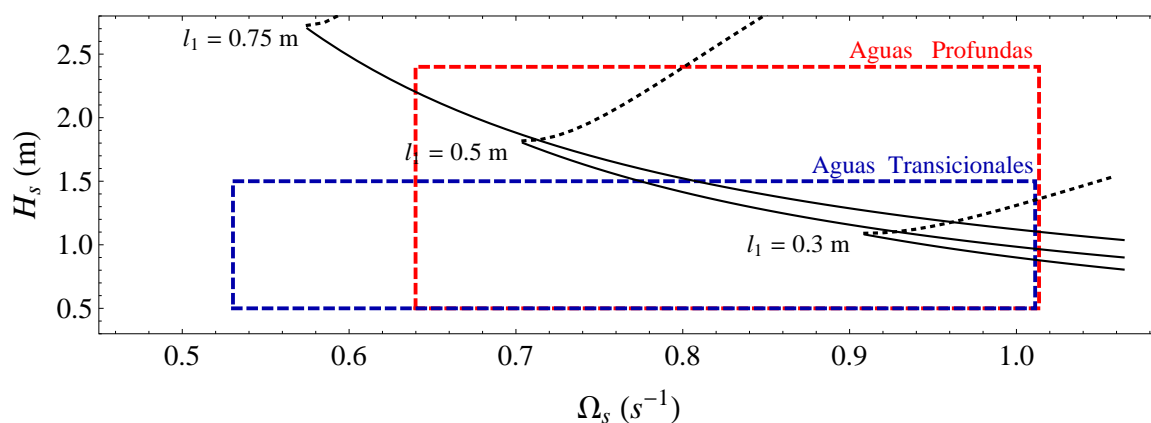


Figura 14: Carta de diseño para dispositivo pendular de cuatro masas, con la siguiente configuración:  $L_2 = 1$ ,  $M_2 = 1$ ,  $L_3 = 0.95$ ,  $M_3 = 0.95$ ,  $L_4 = 1$  y  $M_4 = 1$ . Fricción:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.03$  y  $\chi = 0$ . Referencia: —:  $R_{SN}$ , .....:  $R_{DP,mod}$ .

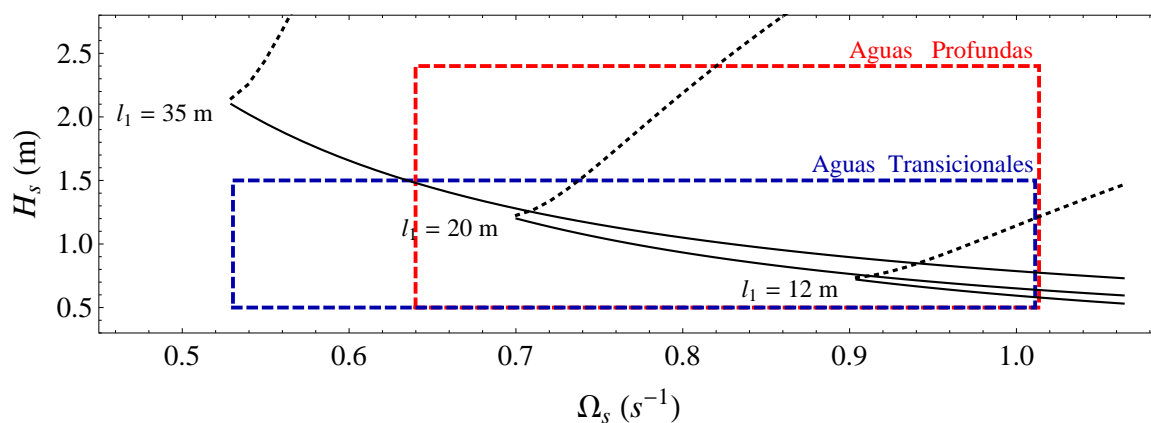


Figura 15: Carta de diseño para dispositivo pendular de una masa, con la siguiente configuración:  $L_2 = 0$ ,  $M_2 = 0$ ,  $L_3 = 0$ ,  $M_3 = 0$ ,  $L_4 = 0$  y  $M_4 = 0$ . Fricción:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.02$  y  $\chi = 0$ . Referencia: —:  $R_{SN}$ , .....:  $R_{DP,mod}$ .

Comparando las Figuras 9 y 10 con las Figuras 11 y 12 se verifica que empleando cuatro



masas, la intersección entre zonas de rotación y de forzamiento se logra con valores menores de longitudes (del orden de 1 m) que empleando dos masas (del orden de 2 m). La versatilidad del recolector de cuatro masas permite bajar más aún las longitudes de varilla, como se verifica comparando las Figuras 12 y 13: si bien la Figura 13 corresponde a un caso extremo ( $M_3 = L_3 = 0.95$ ), se muestra que podrían alcanzarse rotaciones en algunas zonas de aguas transicionales y profundas con valores tan pequeños como  $l_1 = 0.3$  m. Mientras que la Figura 14 tiene el único propósito de completar la oferta de cartas de diseño, la Figura 15 muestra la imposibilidad práctica de emplear un recolector de masa única. En tal caso, las longitudes requeridas para recolectar energía resultarían inmensamente grandes.

### 4.3 Descripción del sistema experimental

El dispositivo experimental consta de un prototipo de sistema pendular y de un excitador o *shaker* mecánico, sobre el cual va montado. El excitador funciona a partir de un mecanismo biela-manivela y le impone al sistema pendular un movimiento alternativo vertical. El movimiento de rotación del excitador es producido por un motorreductor eléctrico de 0.75 HP, que proporciona una velocidad de  $19 \text{ s}^{-1}$  a una polea reductora múltiple. El excitador permite quince posibilidades de forzamiento, combinando sus cinco velocidades  $\Omega$ :  $5.15 \text{ s}^{-1}$ ,  $7.48 \text{ s}^{-1}$ ,  $9.64 \text{ s}^{-1}$ ,  $12.08 \text{ s}^{-1}$  y  $14.80 \text{ s}^{-1}$ , con sus tres carreras  $r$ : 205 mm, 106.5 mm y 72.5 mm. No obstante ello, sólo la carrera de 72.5 mm puede ser considerada, ya que las dos carreras mayores producen un alto valor de  $\lambda$ , generando una dinámica que se aparta demasiado de la producida por una excitación sinusoidal (Dotti *et al.*, 2017b). La biela del excitador tiene una longitud fija  $L = 575$  mm. La velocidad impuesta varía levemente con la carga y los ajustes del *shaker*, y por lo tanto es chequeada durante cada experimento mediante un sensor láser.

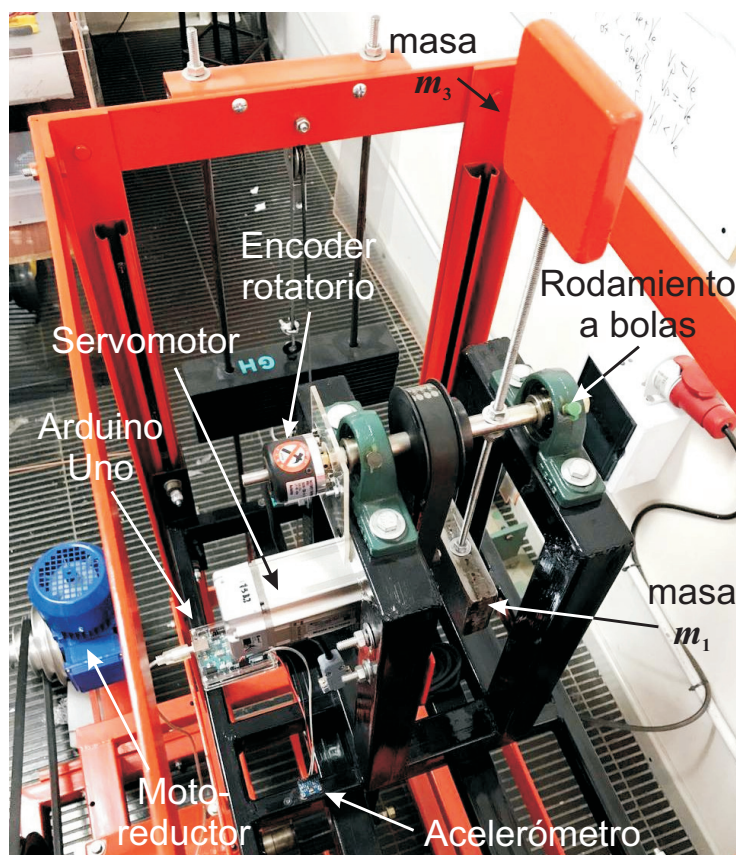


Figura 16: Dispositivo experimental, montado sobre el excitador mecánico en el laboratorio del GIMAP.

El dispositivo pendular ensayado se muestra en la [Figura 16](#). Cuenta con dos masas opuestas  $m_1 = 1.460$  Kg y  $m_3 = 0.745$  Kg ( $m_2 = m_4 = 0$ ), siendo los límites prácticos de las longitudes  $l_1$  y  $l_3$  de entre 140 mm y 270 mm. Dadas estas posibilidades, la frecuencia natural puede sintonizarse en el rango  $3.43 \text{ s}^{-1} < \omega_0 < 5.02 \text{ s}^{-1}$ . Todos los valores que puede adoptar  $\omega_0$  se presentan en la gráfica de la [Figura 17](#). Las varillas del péndulo se hallan unidas rígidamente a un eje que, a su vez, está soportado por dos rodamientos de bolas P203 al bastidor de soporte. El eje también tiene un acoplamiento de poleas y correa dentada con un servomotor, capaz de proporcionar un par de control al péndulo (no utilizado en el presente estudio). Se considera la presencia de fricción viscosa debido al rozamiento con el aire y seca debido a los rodamientos y a la presencia del servomotor. Las constantes de fricción se estiman a partir de ensayos sin excitación externa, empleando el método de [Horton et al. \(2008\)](#) y corresponden a  $a \approx 0$ ,  $b \approx 0.13$  Kg/s y  $c \approx 0.06$  Nm (ver [Dotti et al., 2017a](#), para mayor información sobre la estimación de estos parámetros). En términos generales, las dimensiones del prototipo son similares a las empleadas por [Najdecka et al. \(2015\)](#).

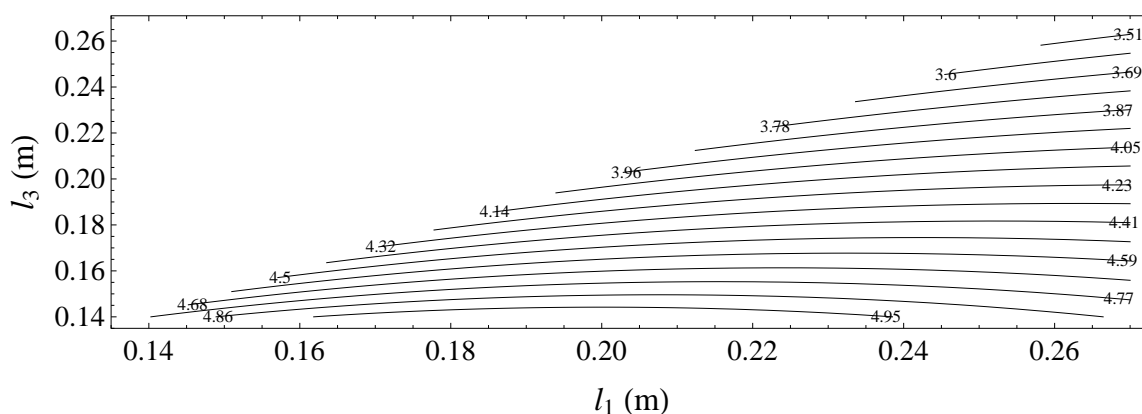


Figura 17: Posibles sintonizaciones de la frecuencia natural  $\omega_0$ , en  $\text{s}^{-1}$ , para el dispositivo pendular ensayado. Datos del dispositivo experimental:  $m_1 = 1.460$  Kg,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 0.745$  Kg,  $m_4 = 0$ .

Del posible universo de experimentos, se consideran en el presente trabajo las dos configuraciones de la [Tabla 1](#) (Set 1 y Set 2), asociadas a las cinco condiciones de forzamiento de la [Tabla 2](#), establecidas por las velocidades posibles del excitador.

	$m_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$l_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$\omega_0$	$\alpha$	$\beta$	$\chi$
<b>Set 1</b>	1.46 Kg	0	0.51	0	0.255 m	0	0.57	0	$4.84 \text{ s}^{-1}$	0	0.02	0.05
<b>Set 2</b>	1.46 Kg	0	0.51	0	0.2 m	0	1	0	$3.99 \text{ s}^{-1}$	0	0.03	0.04

Tabla 1: Configuraciones del sistema pendular empleadas en la experimentación. Ambos casos corresponden a un sistema de dos masas.

	<b>Experimento 1</b>	<b>Experimento 2</b>	<b>Experimento 3</b>	<b>Experimento 4</b>	<b>Experimento 5</b>
	$\Omega = 5.15 \text{ s}^{-1}$	$\Omega = 7.48 \text{ s}^{-1}$	$\Omega = 9.64 \text{ s}^{-1}$	$\Omega = 12.08 \text{ s}^{-1}$	$\Omega = 14.80 \text{ s}^{-1}$
<b>Set 1</b>	$R = 0.196$ $\omega = 1.064$	$R = 0.413$ $\omega = 1.545$	$R = 0.687$ $\omega = 1.991$	$R = 1.078$ $\omega = 2.495$	$R = 1.619$ $\omega = 3.057$
<b>Set 2</b>	$R = 0.196$ $\omega = 1.291$	$R = 0.413$ $\omega = 1.876$	$R = 0.687$ $\omega = 2.417$	$R = 1.078$ $\omega = 3.029$	$R = 1.619$ $\omega = 3.711$

Tabla 2: Definición de los experimentos posibles en virtud de los parámetros adimensionales de forzamiento  $R$  y  $\omega$  asociados a las distintas velocidades del excitador. En todos los casos,  $\lambda = 0.126$ .

Cada experimento se inicia manualmente por el operador. Una vez que el péndulo está en movimiento, se enciende el excitador mecánico. La adquisición de datos se realiza utilizando componentes de bajo costo. La medición de la posición angular  $\theta$  corresponde a un codificador incremental Autonics E40H8-1024-6L5 adosado al eje pivot del péndulo (Figura 16). Mientras tanto, la aceleración impuesta  $\ddot{Y}$  se mide mediante un acelerómetro InvenSense MPU-6050 situado en la mesa del *shaker*. Las señales de ambos sensores son recogidas por una tarjeta Arduino Uno y los datos se envían a una computadora dedicada, donde se realiza el procesamiento posterior empleando *Wolfram Mathematica*. El tiempo inicial se ajusta en el primer pico positivo de  $\ddot{Y}$ , lo que asegura que no hay corrimiento de fase con respecto al modelo, es decir con respecto a (12) ó (14). Las condiciones iniciales  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$  son medidas por el sistema de adquisición de datos, por lo que sus valores son conocidos aunque no se pueden imponer exactamente a priori.

#### 4.4 Sobre el escalamiento del modelo experimental

Debido a una cuestión práctica, la máquina excitadora no puede producir amplitudes tan grandes como las proporcionadas por el oleaje. Esto implica que  $r$  resulta ser bastante menor que  $H_S$ : en rigor, un orden de magnitud menor, ya que  $r = 0.0725$  m mientras que  $0.5 \text{ m} \leq H_S \leq 2.5$  m. Ahora bien, para que un experimento sea representativo, sus parámetros de forzamiento y fricción deben ser tales que lo ubiquen dentro de la zona de rotación principal del espacio de parámetros adimensional  $R$ - $\omega$ . Esto quiere decir que, para iguales parámetros de fricción, el sistema real y el modelo experimental deben producir valores de  $R$  y  $\omega$  similares para resultar comparables. Así, en vista de (15) y teniendo en cuenta que  $0 \leq \gamma^2 \leq 1$ , para lograr un  $R$  similar en el experimento la baja amplitud  $r$  debe ser compensada con un bajo valor de  $l_1$  y/o con un alto valor de  $\Omega$ . También por esta situación, es conveniente un prototipo experimental con una configuración de dos masas por sobre una de cuatro: un tetrapéndulo produce un bajo valor de  $\gamma$ , y por lo tanto un bajísimo valor de  $\gamma^2$  y en consecuencia también de  $R$ , bajo el forzamiento del *shaker*. Esto dificulta la obtención de rotaciones.

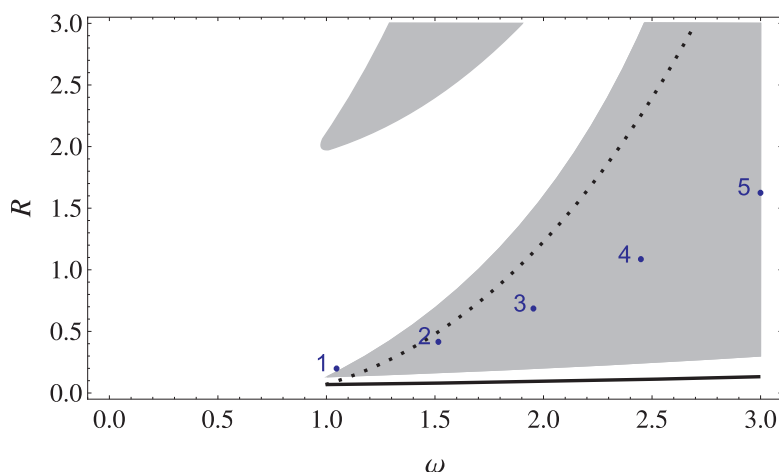


Figura 18: Experimentos posibles para el Set 1 (Ver Tablas 1 y 2) ubicados en el espacio de parámetros  $R$ - $\omega$  y predicciones de las expresiones (21) y (23). Referencia: ■: Zona de rotaciones de período 1, ■: zona de rotaciones de período mayor que 1, -:  $R_{SN}$ , ....:  $R_{DP,mod}$ .

En virtud de la discusión anterior, los valores experimentales de  $l_1$  en la Tabla 1 se establecen en el orden de 0.2 m, contra los propuestos en las Figuras 9-14 que son del orden de 1 m. Asimismo, las frecuencias del excitador de la Tabla 2 (del orden de  $10 \text{ s}^{-1}$ ) son considerablemente mayores a las del oleaje, presentadas también en las Figuras 9-14

(inferiores a  $1 \text{ s}^{-1}$ ). Las Figuras 18 y 19 presentan los experimentos de la Tabla 2 en el espacio  $R$ - $\omega$ , correspondientes al Set 1 y al Set 2, respectivamente. Los experimentos 2, 3 y 4 del Set 1 junto a los 2 y 3 del Set 2 se ubican en el seno de la zona de rotación. Considerando estos experimentos, se evita la cercanía a los límites de la zona de rotación, donde las cuencas rotatorias son pequeñas y la rotación es muy difícil de lograr (Lenci *et al.*, 2012). También se pretenden valores de  $\omega < 2.5$ , para evitar una alta velocidad lineal de la mesa del *shaker*, que pueda influir en los ensayos y también resultar perjudicial para los mecanismos.

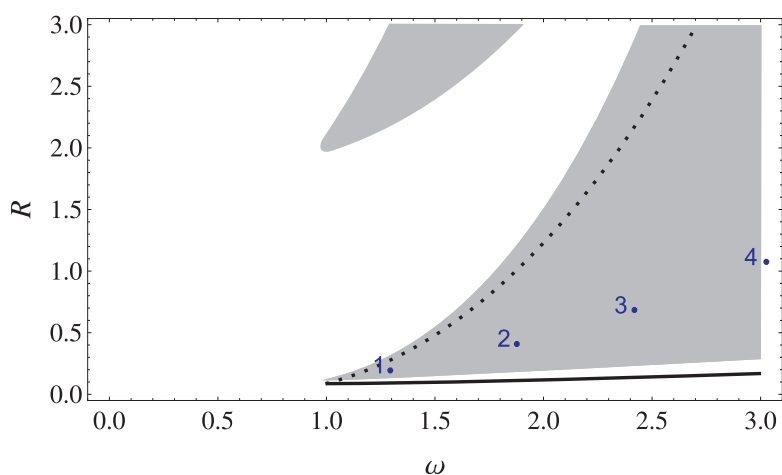


Figura 19: Experimentos posibles para el Set 2 (Ver Tablas 1 y 2) ubicados en el espacio de parámetros  $R$ - $\omega$  y predicciones de las expresiones (21) y (23). Referencia: ■: Zona de rotaciones de período 1, ▨: zona de rotaciones de período mayor que 1, -:  $R_{SN}$ , ···:  $R_{DP,mod}$ .

Por último, un comentario con respecto a las curvas analíticas (21) y (23) en las Figuras 18 y 19. Las predicciones de  $R_{SN}$  y  $R_{DP,mod}$  no resultan certeras como en el caso clásico de la Figura 3. Esto se debe principalmente a que ambas fórmulas desprecian la fricción seca ( $\chi = 0$ ), la cual ha resultado ser de magnitud considerable en el prototipo construido en el laboratorio (se espera lograr  $\chi \approx 0$  en un próximo prototipo y en el sistema real mediante la refinación del proceso constructivo). Además, (21) y (23) también asumen  $\lambda = 0$ , cuando en los ejemplos en cuestión es  $\lambda = 0.126$ . Así, conviene en las Figuras 18 y 19 guiarse por las zonas de rotación sombreadas en gris, obtenidas mediante cálculos numéricos.

#### 4.5 Cuencas de atracción

En las Figuras 20-22 se muestran resultados de tres de los experimentos realizados. Estos resultados se presentan mediante comparaciones entre cuencas de atracción, teóricas y experimentales. Las cuencas de atracción son gráficas que indican, para una cierta configuración de los parámetros del sistema, aquéllas respuestas estacionarias posibles de obtener en función de las condiciones iniciales impuestas  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$ .

En los resultados numéricos de la Figura 20a se observan cinco cuencas de atracción bien delimitadas: dos de oscilación, una de rotación horaria, una de rotación antihoraria y una de la posición de reposo. Las rotaciones experimentales resultan relativamente fáciles de obtener, contrario a lo que podría esperarse a partir del estudio numérico, el cual predice cuencas de rotación muy pequeñas. Esta diferencia se atribuye al error en la estimación de los parámetros de fricción, los cuales son muy influyentes en la dinámica del sistema (Dotti *et al.*, 2017a). En las zonas fractales del mapa, la incertidumbre en la definición de las condiciones iniciales es mayor que el tamaño de cada cuenca, incluso con mediciones extremadamente precisas. Así, puede obtenerse de manera aleatoria cualquiera de las respuestas posibles –oscilación,

rotación o reposo—, alcanzándose el estado estacionario luego de largos transitorios caóticos (Szemplinska-Stupnicka *et al.*, 2000). El caos estacionario no es posible según la predicción teórico-numérica, coincidiendo con los experimentos donde tampoco ha sido obtenido.

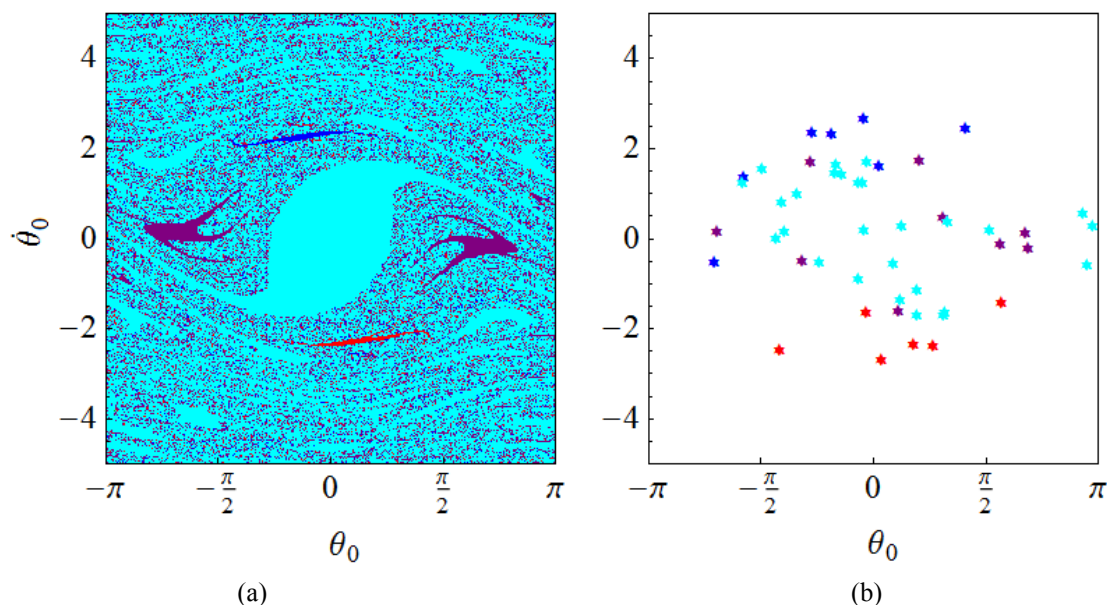


Figura 20: Cuencas de atracción del Experimento 2, empleando la configuración Set 1: (a) Cuenca teórica y (b) cuenca experimental. Referencia: ■: Rotación horaria, ■: Rotación antihoraria, ■: Oscilación, ■: Cero.

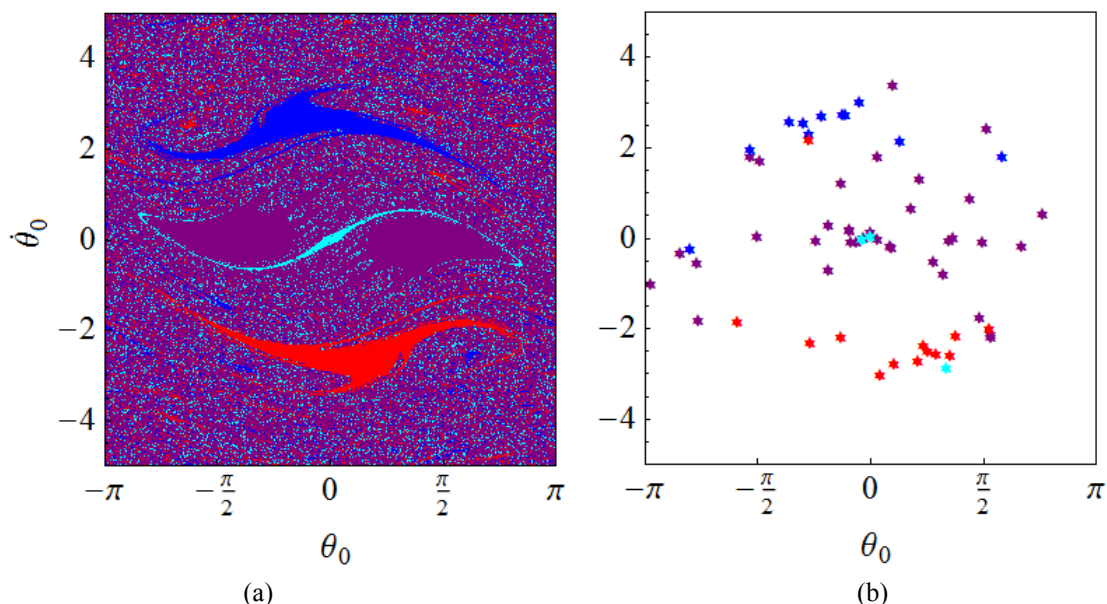


Figura 21: Cuencas de atracción del Experimento 3, empleando la configuración Set 1: (a) Cuenca teórica y (b) cuenca experimental. Referencia: ■: Rotación horaria, ■: Rotación antihoraria, ■: Oscilación, ■: Cero.

La Figura 21 muestra una situación muy cercana a la resonancia principal, siendo  $\omega = 1.991$ . Presenta las mismas soluciones y cuencas posibles del caso anterior, como se ve en la Figura 21a. En este caso, la Figura 21b muestra que la experimentación produce respuestas estacionarias esperables si las condiciones iniciales se hallan en el seno de cada cuenca. La solución de reposo resulta difícil de obtener experimentalmente dadas las pequeñas dimensiones de la cuenca asociada. Resultados experimentales aparentemente anómalos fuera

de las cuencas, como por ejemplo el caso del estado de reposo en  $(\theta_0, \dot{\theta}_0) \approx (3\pi/8, -3)$ , se obtienen debido a la aleatoriedad ya mencionada de las zonas fractales.

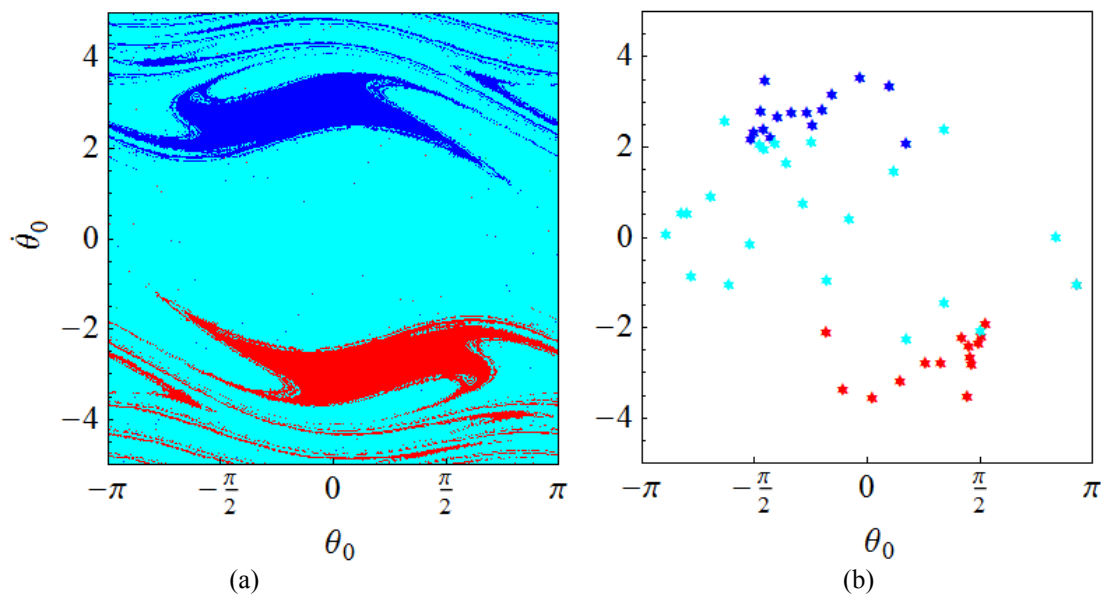


Figura 22: Cuencas de atracción del Experimento 3, empleando la configuración Set 2: (a) Cuenca teórica y (b) cuenca experimental. Referencia: ■: Rotación horaria, ■: Rotación antihoraria, ■: Cero.

Por último, la Figura 22 muestra un escenario de alta velocidad ( $\omega = 2.417$ ), donde no hay casi fractalización para velocidades iniciales bajas. En la Figura 22a la solución oscilatoria se muestra imposible de obtener, lo cual se confirma experimentalmente en los resultados de la Figura 22b. Al ser mínima la fractalidad, las cuencas se hallan bien delimitadas y tanto las rotaciones estacionarias como el reposo se obtienen luego de un pequeño transitorio que no presenta caos.

## 5 CONCLUSIONES

En este artículo se demuestra la factibilidad de la extracción de energía undimotriz en el Mar Argentino mediante dispositivos recolectores pendulares basados en la dinámica del péndulo paramétrico. Esto se logra a partir de un estudio teórico-experimental sobre la dinámica no lineal de un sistema pendular de masas múltiples, en conjunto con la aplicación de la teoría de olas y el análisis de mapas de altura significativa de olas, batimetría y frecuencias de oleaje del Mar Argentino.

Las cartas de diseño presentadas muestran que es posible alcanzar rotaciones estables del sistema pendular bajo la excitación del oleaje en zonas cercanas a las costas bonaerenses. Estas zonas emergen por sobre las costas patagónicas como las más adecuadas para la extracción de energía undimotriz en el Mar Argentino. Las cartas permiten además determinar que un sistema pendular de cuatro masas opuestas y equidistantes presenta ventajas prácticas y constructivas con respecto a su equivalente de dos masas y a un sistema de masa única. Se concluye además que este último sistema contaría con dimensiones irreales en el caso de una hipotética aplicación en el mar bonaerense. El recolector tetra-pendular presenta gran versatilidad en lo que respecta a posibilidades de configuración. Esta es una característica muy deseable, ya que permitirá lograr un diseño profundamente refinado del recolector pendular una vez que se cuenten con mediciones estadísticas precisas de las características del oleaje.

La experimentación realizada verifica los resultados del modelo teórico propuesto. Así, se demuestra que es posible predecir teóricamente de manera precisa el comportamiento dinámico del sistema pendular de múltiples masas. Esto es trascendental en el diseño ya que permite definir a priori si una configuración físico-geométrica del sistema admite o no movimiento rotatorio estacionario bajo una excitación dada. Además, dado que el recolector real deberá necesariamente lidiar con condiciones variables de forzamiento, contar con un modelo preciso es importante a la hora de complementar mediciones durante un proceso de control activo del sistema.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, el CONICET, el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica. El Profesor Franco E. Dotti desea dedicar este trabajo a la querida memoria de su abuela paterna Natividad González (1917-2017).

## REFERENCIAS

- Baker, G.L. y Blackburn, J.A., *The pendulum – A case study in physics*. Oxford University Press, 2005.
- Chakrabarty, S.K., *Handbook of offshore engineering*, volume I, Elsevier, 2005.
- Clifford, M. y Bishop, S., Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A*, 201:191–196, 1995.
- Dotti, F. y Reguera, F., Energy consumption optimization for rotation control of a parametric pendulum with variable length. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Engineering Optimization*, EngOpt 2016, 2016.
- Dotti, F., Reguera F. y Machado, S., A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> Pan-American Congress on Computational Mechanics*, PANACM 2015, 1516–1529, 2015.
- Dotti, F., Reguera F. y Machado, S., Damping in a parametric pendulum with a view on energy harvesting. *Mechanics Research Communications*, 81:11–16, 2017a.
- Dotti, F., Reguera F. y Machado, S., Rotations of the parametric pendulum excited by a reciprocating motion with a view on energy harvesting. *Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, DINAME 2017, 2017b.
- Falnes, J., A review of wave-energy extraction. *Marine Structures*, 20:185–201, 2007.
- Garrison, T. y Ellis, R., *Oceanography, an invitation to marine science*. Cengage Learning, 2013.
- Garira, W. y Bishop, S.R., Rotating solutions of the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 263:233–239, 2007.
- Horton, B., Wiercigroch, M. y Xu, X., Transient tumbling chaos and damping identification for parametric pendulum. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 366:767–784, 2008.
- Lanfredi, N., Pousa, L., Mazio, C. y Dragani, W., Wave-power potential along the coast of the Province of Buenos Aires, Argentina. *Energy*, 17(11):997–1006, 1992.
- Lenci, S., Brocchini, M. y Lorenzoni, C., Experimental rotations of a pendulum on water waves. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 7: 011007-1–011007-9, 2012.
- Lenci, S., Pavlovskaja, E., Rega, G. y Wiercigroch, M., Rotating solutions and stability of parametric pendulum by perturbation method. *Journal of Sound and Vibration*, 310:243–259, 2008.

- LeMéhauté, B., *An introduction to hydrodynamics and water waves*. Springer, 1976.
- Leven, R., Pompe, B., Wilke, C. y Koch, B., Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum. *Physica D*, 16:371–384, 1985.
- Lifschitz, A. y Tomazín, N., Energía undimotriz: Evaluación de zonas de interés para la captación de energía de las olas. *Anales de II Congreso Argentino de Energías Sustentables*, CES 2016, 369–378, 2016.
- Lucas, A., Guerrero, R., Mianzán, H., Acha, E., Lasta, C., Coastal oceanographic regimes of the Northern Argentine Continental Shelf (34-43°S). *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 65:405–420, 2005.
- Moragues, J., Núcleo Socio-Productivo Estratégico. Energías del mar. Documento de referencia. *Plan de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva Argentina Innovadora 2020*, 5–6, 2015.
- Nandakumar, A., Wiercigroch, M. y Chatterjee, A., Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43:7–14, 2012.
- Najdecka, A., Narayanan, S. y Wiercigroch, M., Rotary motion of the parametric and planar pendulum under stochastic wave excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 71:30–38, 2015.
- Nelson, R., Olsson, M., The pendulum – Rich dynamics from a simple system. *American Journal of Physics*, 54(2):112–121, 1986.
- Panicker, N., Power resource estimate of ocean surface waves. *Ocean Engineering*, 3:429–439, 1976.
- Pierson, W., Wind generated gravity waves. *Advances in Geophysics*, 2:93–178, 1955.
- Reguera, F., Dotti y F., Machado, S., Rotation control of a parametrically excited pendulum by adjusting its length. *Mechanics Research Communications*, 72:74–80, 2016.
- Shinozuka, M., Jan, C., Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibrations*, 25(1):111–128, 1972.
- Squire, P., Pendulum damping. *American Journal of Physics*, 54(11):984–991, 1986.
- Szemplinska-Stupnicka, W., Tyrkiel, E. y Zubrzycki, A., The global bifurcations that lead to transient tumbling chaos in a parametrically driven pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(9):2161–2175, 2000.
- Thompson, J., Stewart, H., *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, 2002.
- Urien, C. y Ewing, *Recent sediments and environment of southern Brazil, Uruguay, Buenos Aires and Rio Negro continental shelf*. The geology of continental margins. Springer-Verlag, Burk, C. y Drake, C. editores, 157–177, 1974.
- Wiercigroch, M., A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum. *UK Patent Application*, 2010.
- Yurchenko, D. y Alevras, P., Dynamics of the N-pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control*, 1:290–299, 2013.