

## TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN Y RADIACIÓN TÉRMICA COMBINADAS EN UN MEDIO SEMITRANSARENTE

**Daniel Rebollo, Marisol Velasco, Federico Bocca y Rodolfo Rodrigo**

*Universidad Nacional de San Juan, Facultad de Ingeniería, Departamento de Electromecánica,  
Av. Libertador San Martín (Oeste) 1109, J5400ARL, San Juan, Argentina,  
drebollo.de.fi.unsj@gmail.com*

**Palabras clave:** Radiación Térmica, Cavidades Irregulares, Medio Participante, Volúmenes Finitos

**Resumen.** En este trabajo se ha resuelto numéricamente un proceso de transferencia de calor por conducción y radiación térmica combinadas en una cavidad de forma arbitraria rellena con un medio que absorbe, emite y dispersa anisotrópicamente la radiación térmica. Para resolver el problema planteado se ha desarrollado un código computacional basado en el método de los volúmenes finitos. En trabajos anteriores se analizó el proceso de transferencia de calor por conducción y radiación térmica combinadas en cavidades cilíndricas y esféricas con diferentes configuraciones térmicas y variadas condiciones de borde. En este trabajo la formulación en coordenadas cartesianas se extiende al análisis a cavidades bidimensionales irregulares y tridimensionales ortogonales, rellenas con un medio gris conductor, absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante. Las superficies de la cavidad son opacas, grises, difusas e isotérmicas y la emisión es difusa desde la frontera. Se analiza la influencia de la conductividad térmica, coeficiente de absorción, coeficiente de dispersión, dimensiones de la cavidad y reflectividad de las paredes. Se ha efectuado un exhaustivo y detallado análisis de error y los resultados obtenidos fueron comparados con resultados disponibles. El análisis permite concluir que la metodología de cálculo desarrollada en este trabajo, se puede aplicar con un amplio margen de seguridad.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen muchos ejemplos de procesos donde el transporte de energía por conducción y radiación se desarrollan en forma combinada. Esta situación ha recibido mucha atención, por parte de los investigadores, en aplicaciones prácticas de transporte de energía en medios semitransparentes, en las que la conducción de calor y la radiación térmica ocurren simultáneamente. La importancia del transporte combinado de energía térmica puede ser apreciable en los hornos de fundición de vidrio. En estos fenómenos la radiación térmica juega un rol muy importante por lo que existe un gran interés en desarrollar modelos de análisis que permitan obtener resultados en forma rápida, precisa y económica.

Existe una gran cantidad de trabajos relacionados al estudio de la conducción y la radiación térmica combinadas en geometrías irregulares, la mayoría de ellos son simulaciones numéricas donde se aplica una gran variedad de métodos numéricos. Estos métodos se caracterizan por su capacidad de manejar una gran variedad de configuraciones geométricas y térmicas. A continuación se hace una revisión bibliográfica de los trabajos publicados en los cuales se han considerado problemas estacionarios de conducción y radiación combinadas en coordenadas cartesianas adaptadas a geometrías irregulares. Uno de los primeros trabajos en radiación y conducción combinadas fue el de [Viskanta y Grosh \(1962\)](#) considerando el efecto de la emisividad de la superficie en la distribución de temperatura utilizando soluciones de tipo iterativas de la ecuación integral, no lineal, de la transferencia radiante en un medio plano absorbente y emisor. [Yuen y Takara \(1988\)](#) consideraron la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en una cavidad bidimensional combinando dos procedimientos exitosos, utilizados previamente, para resolver problemas de radiación pura bidimensional y conducción pura unidimensional, asegurando la precisión de resultados cuando se los utiliza en forma combinada. [Kim y Baek \(1991\)](#) aplicaron el Método de las Ordenadas Discretas (MOD) para resolver la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en una cavidad rectangular rellena con un medio absorbente, emisor y dispersante. [Siewert y Thomas Jr. \(1991\)](#) y [Siewert \(1995\)](#) aplicaron el método de las armónicas esféricas junto con splines cúbico de Hermite en el método iterativo de Newton para resolver el problema de conducción y radiación combinadas en un medio con absorción, emisión y dispersión anisotrópica en estado estacionario. [Sakami et al. \(1996\)](#) presentaron una modificación del método de las ordenadas discretas para el cálculo de la intensidad radiante en una cavidad bidimensional de forma arbitraria rellena con un medio semitransparente absorbente, emisor, dispersante y conductor del calor con superficies grises. [Abulwafa \(1999a, 1999b\)](#) resolvió el problema de la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en un medio plano paralelo absorbente, emisor con dispersión anisotrópica y fronteras que reflejan en forma difusa y especular, utilizando una técnica de Galerkin iterativa. [Vargas y De Vilhena \(1999\)](#) presentaron una solución para el problema de la conducción del calor y la radiación térmica combinadas en una placa plana utilizando una técnica de descomposición, en la cual la ecuación de la conducción del calor se integra, obteniendo expresiones para la temperatura de términos de un flujo de calor angular, el cual es reemplazado en la ecuación no lineal de la transferencia radiante y resuelta por el método  $LTS_N$ , que combina el método de las ordenadas discretas y la transformada de Laplace. [Krishnaprakas et al. \(2001\)](#) analizaron la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en un medio plano gris con dispersión anisotrópica no lineal limitado por superficies paralelas que reflejan en forma difusa y especular, la ecuación de la energía fue resuelta usando el método de Numerov y la ecuación de la transferencia radiante fue resuelta usando el método de las ordenadas discretas de Chandarsekhar junto con el método de Crank-Nicholson. [Lacroix et al. \(2002\)](#) resolvieron el problema de conducción del calor y la

radiación térmica combinadas en un medio bidimensional no gris, homogéneo y puramente absorbente utilizando el método de las ordenadas discretas con una cuadratura de orden  $S_8$ . Talukdar y Mishra (2002) compararon las soluciones obtenidas con el método de la dimensión colapsada, el método de la transferencia discreta y el método exacto en un medio plano unidimensional absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante. Tan et al. (2004) combinaron el método de traceo de rayos y el método de las zonas de Hottel, para la radiación, y el método de los volúmenes finitos, para la conducción, combinadas en un medio absorbente, emisor y dispersante, dividiendo el progreso de la intensidad de radiación térmica en dos sub procesos, emisión - atenuación - reflexión y absorción - dispersión. Berour et al. (2004) resolvieron la conducción y radiación combinadas en un medio bidimensional no gris absorbente, emisor y dispersante utilizando el método de las ordenadas discretas convencional, para la radiación, acoplado a la teoría de Mie para la dispersión. Furmanski y Banaszek (2004) propusieron un método para calcular la distribución de temperatura y una función de radiación, resolviendo simultáneamente dos ecuaciones no lineales y mutuamente conjugadas en un medio absorbente, emisor, dispersante y conductor, utilizando una discretización en elementos finitos combinada con una técnica iterativa. Yi y Tan (2004) estudiaron la transferencia de calor conductiva y radiativa combinadas en un medio plano no gris con dispersión anisotrópica utilizando una modificación del método de traceo de los rayos, para la radiación, y el método de los volúmenes finitos, totalmente implícito, para la ecuación de la energía. Sarvari (2005) resolvió el problema inverso de encontrar la distribución de las fuentes de calor en un medio bidimensional de forma irregular, conductor y radiante, gris y no dispersante, que satisfacen una distribución deseada de temperatura y los flujos de calor, sobre la superficie, combinando el método de la transferencia discreta y el método de los elementos finitos. Yi et al. (2005) estudiaron el efecto de la reflexión en la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en un medio plano, gris, con dispersión anisotrópica, combinando el método de traceo de rayos y el método implícito de los volúmenes finitos. Mahapatra et al. (2005) resolvieron la conducción y radiación térmica combinadas en una cavidad cuadrada rellena con un medio gris, absorbente, emisor y dispersante, combinando el método de las ordenadas discretas y el método de las armónicas esféricas, para la radiación térmica, y el método de los volúmenes finitos para la ecuación de la energía. Ismail y Salinas (2006) resolvieron la conducción y radiación combinadas utilizando el método de las ordenadas discretas con una doble discretización en un medio bidimensional. Elghazaly (2006) estudió la conducción y radiación térmicas combinadas en dos placas planas homogéneas con dispersión anisotrópica y paredes con reflexión especular usando el método de Galerkin. Ruan et al. (2006) aplicaron el método de los elementos finitos para resolver la conducción y radiación térmica combinadas, en una cavidad de geometría arbitraria rellena con un medio emisor, absorbente y dispersante. Mahapatra et al. (2006) resolvieron la transferencia de calor por conducción y radiación térmica combinadas en una cavidad cuadrada rellena con un medio gris, absorbente, emisor y dispersante utilizando una combinación del método de las ordenadas discretas y el método de las armónicas esféricas. Liu et al. (2006) y Liu y Tan (2007) aplicaron una aproximación sin malla local de Petrov - Galerkin (MLPG) para resolver el problema combinado de conducción y radiación térmica en una placa plana variando el índice de refracción basado en el método de las ordenadas discretas. Talukdar et al. (2008) resolvieron la interacción entre la conducción y la radiación en cavidades de tres dimensiones, cúbicas y cilíndricas, con grillas estructuradas aplicando el método de los volúmenes finitos. Segatto et al. (2010) desarrollaron una aproximación analítica al problema de la conducción y radiación combinadas en una placa plana usando un método compuesto por la transformada de Laplace y la descomposición de Adomian. Amiri et

al. (2010) resolvieron numéricamente la conducción y radiación combinadas, en estado estacionario, en un medio de forma irregular con dispersión anisotrópica en coordenadas cartesianas. Sadat et al. (2012) aplicaron un método aproximado de difusión sin mallas para resolver la conducción y radiación combinadas en cavidades irregulares de dos y tres dimensiones, rellenas con un medio semitransparente, usando el método de las ordenadas discretas. Kovtanyuk et al. (2012) resolvieron la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en un medio plano, con dispersión anisotrópica y paredes difusas y especulares, utilizando el método de Monte Carlo. Kovtanyuk y Chebotarev (2013) propusieron una solución analítica al problema de la conducción y radiación combinadas en una placa plana, demostrando los teoremas de existencia y unicidad de la solución, implementada en un proceso iterativo. Sauter et al. (2014) desarrollaron una solución analítica al problema de la conducción y radiación acopladas con un coeficiente de difusión dependiente de la temperatura, generando una función continua de Hölder y la compararon con la solución obtenida de aplicar el método de descomposición de la función de Green. Zhang et al. (2014) aplicaron el método de los elementos naturales (NEM), que se caracteriza por no necesitar de una malla y ser relativamente nuevo, para resolver el problema de la conducción y radiación combinadas en un medio absorbente, emisor y dispersante con geometría irregular. Moore y Jones (2014) presentaron una solución exacta para el problema de la conducción y radiación combinadas en un medio plano no gris, absorbente y emisor usando un factor de integración, para resolver la ecuación de la transferencia radiante, y una variación de parámetros para resolver la ecuación de la energía. Kovtanyuk et al. (2014) simplificaron el problema de la conducción y radiación combinadas, en un medio absorbente, emisor y dispersante, utilizando la aproximación  $P_1$  para el modelo de difusión, mostrando la existencia y unicidad de las soluciones implementadas en un procedimiento iterativo. An et al. (2015) desarrollaron un procedimiento iterativo para acelerar la convergencia de la conducción y radiación combinadas, revisando la temperatura y la radiación incidente del medio durante la iteración de la ecuación de la energía y la ecuación de la transferencia radiante.

De la revisión bibliográfica presentada se desprende que existe un marcado interés en desarrollar herramientas computacionales que permitan predecir la transferencia de calor combinada por conducción y radiación térmica en geometrías multidimensionales. Estas herramientas computacionales pueden ser usadas para facilitar el cálculo y diseño de dispositivos industriales, análisis y estudio de fenómenos ambientales y en todas las situaciones en la que estén involucrado el transporte de calor por modos combinados.

## 2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

El modelo matemático que representa la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en estado estacionario está formado por la ecuación de la energía (1), la cual viene dada en forma independiente del sistema de coordenadas (Modest, 1993), como

$$\nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + \dot{q} = 0 \quad (1)$$

en la que  $k$  es la conductividad térmica,  $T$  la temperatura,  $\dot{q}$  la fuente interna de generación de calor,  $\mathbf{q}_r$  el flujo de calor radiante y  $\nabla \cdot \mathbf{q}_r$  la divergencia del flujo radiante, dadas por

$$\mathbf{q}_r = \int_{\omega=0}^{4\pi} i s d\omega \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_r = \kappa (4\pi i_b - G) \quad (3)$$

en esta ecuaciones  $i$  es la intensidad de radiación térmica,  $\mathbf{s}$  es el versor de la dirección angular,  $\omega$  el ángulo sólido,  $\kappa$  el coeficiente de absorción,  $i_b$  la intensidad de radiación térmica del cuerpo negro y  $G$  la radiación incidente, las cuales vienen dadas por

$$i_b = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (4)$$

$$G = \int_{\omega=0}^{4\pi} i d\omega \quad (5)$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stefan–Boltzmann.

La intensidad de radiación térmica se obtiene resolviendo la ecuación (6) del transporte radiante para un medio gris, absorbente y dispersante (Brewster, 1992; Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992), la cual se expresa como

$$\mathbf{s} \cdot \nabla i = -\beta i + \kappa i_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \quad (6)$$

en la que  $\beta = \kappa + \sigma_s$  es el coeficiente de extinción,  $\sigma_s$  es el coeficiente de dispersión y  $\Phi$  la función de dispersión, dada por

$$\Phi(\mu) = 1 + \sum_{m=1}^M A_m P_m(\mu) \quad (7)$$

en la que  $P_m$  son los polinomios de Legendre,  $A_m$  son los coeficientes de estos polinomios,  $M$  es el orden de los polinomios,  $\mu$  el coseno del ángulo formado entre las direcciones de intensidad de radiación térmica entrante y saliente. En trabajos anteriores (Rebollo, 2007; 2008a; 2009b) se puede encontrar la metodología de cálculo de la función de dispersión usando una expansión en serie de los polinomios de Legendre.

La condición de borde para superficies radiantes grises, opacas, difusas e isotérmicas se puede escribir como (Brewster, 1992; Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992):

$$i_w^l = \varepsilon_w i_{bw} + \frac{\rho_w H_w}{\pi} \quad (8)$$

donde el subíndice  $w$  representa la pared, el superíndice  $l$  representa la dirección de la radiación emitida por la pared,  $\varepsilon$  es la emisividad de la pared,  $\rho$  la reflectividad de la pared,  $i_b$  es la intensidad de radiación del cuerpo negro, emitida por la pared, y  $H$  es la irradiación hemisférica, es decir, el flujo de calor radiante incidente en la pared, el cual se calcula como:

$$H_w = \int_{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{n}_w < 0} i_w^k |\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{n}_w| d\omega^k \quad (9)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria a la pared y  $k$  representa la dirección de la radiación incidente en la pared.

En todos los problemas analizados en este trabajo, se supone que las superficies de la cavidad son opacas, grises y difusas. La rugosidad de la superficie y la deposición de productos de la combustión hacen que esta suposición sea válida en muchas aplicaciones de la ingeniería.

$\tau/\tau_l$	Abulwafa (1999a)			Este trabajo			Error %		
	$Q_C$	$Q_R$	$Q_T$	$Q_C$	$Q_R$	$Q_T$	$Q_C$	$Q_R$	$Q_T$
$\omega = 0.0$									
0.0	0.93946	0.35853	1.29799	0.93755	0.36123	1.29877	0.20	0.75	0.06
1.0	1.14454	0.15345	1.29799	1.14650	0.15248	1.29897	0.17	0.64	0.08
$\omega = 0.5$									
0.0	0.94645	0.34229	1.28873	0.94481	0.34463	1.28945	0.17	0.68	0.06
1.0	1.10098	0.18775	1.28873	1.10171	0.18786	1.28956	0.07	0.06	0.06
$\omega = 0.9$									
0.0	0.97982	0.29950	1.27932	0.97945	0.30090	1.28034	0.04	0.47	0.08
1.0	1.03048	0.24883	1.27932	1.03043	0.24994	1.28037	0.01	0.45	0.08
$\omega = 1.0$									
0.0	1.00000	0.27670	1.27670	1.00000	0.27789	1.27789	0.00	0.43	0.09
1.0	1.00000	0.27670	1.27670	1.00000	0.27789	1.27789	0.00	0.43	0.09

Tabla 1: Flujos de calor adimensionales conductivo  $Q_C$ , radiante  $Q_R$  y total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad con  $\varepsilon_0=\varepsilon_L=1$ ,  $L=0.5m$ ,  $T_0=100K$ ,  $T_L=0K$ ,  $N=0.5$  y  $\beta=2.0m^{-1}$ .

$\tau/\tau_l$	Abulwafa (1999b)					
	$\omega = 0.5$			$\omega = 0.9$		
	$Q_C$	$Q_R$	$Q_T$	$Q_C$	$Q_R$	$Q_T$
0.0	0.8602	1.6064	2.4666	0.9103	1.4881	2.3984
1.0	1.4729	0.9937	2.4666	1.1483	1.2501	2.3984
Este trabajo						
0.0	0.81504	1.64703	2.46207	0.90658	1.49654	2.40311
1.0	1.47608	0.98647	2.46255	1.14835	1.25491	2.40325
Error %						
0.0	5.25	2.53	0.18	0.41	0.57	0.20
1.0	0.22	0.73	0.16	0.00	0.38	0.20

Tabla 2: Flujos de calor adimensionales por conducción  $Q_C$ , radiación  $Q_R$  y total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad con  $\varepsilon_0=\varepsilon_L=1$ ,  $L=0.5m$ ,  $T_0=100K$ ,  $T_L=0K$ ,  $N=0.1$  y  $\beta=2.0m^{-1}$ .

La formulación matemática de la ecuación (1) de la energía junto con la ecuación (6) de la transferencia radiante están dadas en forma tensorial, vectorial y direccional, es decir, independiente del sistema de coordenadas adoptado. La formulación matemática, en coordenadas cilíndricas y esféricas de la ecuación de la transferencia radiante, ya fue presentada en trabajos anteriores por lo que no será incluida aquí (Rebollo et al., 2013; 2014; 2016).

Toda la formulación matemática presentada en este trabajo está basada en la suposición de comportamiento gris del medio participante, es decir, independiente de la longitud de onda de la radiación térmica. En trabajos previos (Rebollo, 2008b; 2009a; Rebollo et al. 2010; Rebollo y Rodriguez, 2011) se han presentados diferentes modelos para el tratamiento de gases no grises, los cuales no han sido implementados, por el momento, en este trabajo.

$N$	Krishnaprakas et al. (2001)					
	$\omega$	Iso	FD2	FD3	FD4	FD5
0.0010	0.10	132.6006	133.6079	132.9427	133.3964	132.5935
	0.50	132.0601	137.2061	133.7683	136.1049	132.0264
	0.90	131.0219	140.4268	134.0720	138.3781	130.9677
	1.00	130.2051	140.6080	133.5552	138.3433	130.1505
0.010	0.10	14.1481	14.2555	14.1849	14.2319	14.1469
	0.50	13.9677	14.5073	14.1483	14.3879	13.9628
	0.90	13.6397	14.5934	13.9496	14.3836	13.6335
	1.00	13.4706	14.5108	13.8056	14.2844	13.4652
0.10	0.10	1.9151	1.9268	1.9192	1.9240	1.9149
	0.50	1.8749	1.9316	1.8941	1.9185	1.8742
	0.90	1.8156	1.9114	1.8467	1.8902	1.8149
	1.00	1.7970	1.9011	1.8305	1.8784	1.7965
Este trabajo						
0.0010	0.10	132.98477	132.99465	132.99775	132.91937	132.97507
	0.50	132.49532	132.64621	132.62842	131.21249	132.45404
	0.90	131.53771	131.98073	131.89172	127.58159	131.46954
	1.00	130.76438	131.30631	131.18468	125.95087	130.69367
0.010	0.10	14.18418	14.18549	14.18609	14.17686	14.18300
	0.50	14.00592	14.02221	14.02132	13.87282	14.00064
	0.90	13.68673	13.73224	13.72328	13.28731	13.67931
	1.00	13.52638	13.58057	13.56842	13.04503	13.51932
0.10	0.10	1.91866	1.91883	1.91894	1.91776	1.91847
	0.50	1.87779	1.87957	1.87959	1.86377	1.87710
	0.90	1.82017	1.82476	1.82387	1.77992	1.81940
	1.00	1.80263	1.80805	1.80684	1.75450	1.80193
Error %						
0.0010	0.10	0.29	0.46	0.04	0.36	0.29
	0.50	0.33	3.32	0.85	3.59	0.32
	0.90	0.39	6.01	1.63	7.80	0.38
	1.00	0.43	6.62	1.77	8.96	0.42
0.010	0.10	0.26	0.49	0.01	0.39	0.26
	0.50	0.27	3.34	0.90	3.58	0.27
	0.90	0.34	5.90	1.62	7.62	0.34
	1.00	0.41	6.41	1.72	8.68	0.40
0.10	0.10	0.19	0.41	0.01	0.32	0.19
	0.50	0.15	2.69	0.77	2.85	0.15
	0.90	0.25	4.53	1.24	5.83	0.25
	1.00	0.31	4.89	1.29	6.60	0.30

Tabla 3: Flujo de calor adimensional total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad con  $\epsilon_0=\epsilon_L=1$ ,  $L=0.5m$ ,  $T_0=100K$ ,  $T_L=50K$  y  $\beta=2.0m^{-1}$ .

Para resolver la ecuación (1) de la conducción y radiación combinadas, junto con la ecuación (6) de la transferencia radiante se ha usado el Método de los Volúmenes Finitos, el cual ha sido descrito en trabajos previos (Rebollo, 2007; 2009b; 2013; 2014) usando discretización espacial para la ecuación de la conducción radiación (1) y una doble, espacial y angular, para la ecuación (6) de la transferencia radiante.

N	$\omega$	Krishnaprakas et al. (2001)		Este trabajo		Error %	
		Iso	FD2	Iso	FD2	Iso	FD2
0.0010	0.10	12.7249	12.7343	12.84492	12.84553	0.94	0.87
	0.50	10.6109	10.6408	10.79905	10.80838	1.77	1.57
	0.90	6.8504	6.8714	7.06204	7.08135	3.09	3.06
	1.00	4.0260	4.0325	3.90852	3.92215	2.92	2.74
0.010	0.10	3.1441	3.1482	3.17086	3.17114	0.85	0.73
	0.50	2.4988	2.5121	2.55424	2.55655	2.22	1.77
	0.90	1.4216	1.4263	1.44850	1.45139	1.89	1.76
	1.00	0.8526	0.8533	0.84085	0.84222	1.38	1.30
0.10	0.10	0.9231	0.9244	0.93599	0.93608	1.40	1.26
	0.50	0.7971	0.8004	0.80443	0.80489	0.92	0.56
	0.90	0.6029	0.6035	0.60455	0.60490	0.27	0.23
	1.00	0.5352	0.5353	0.53409	0.53422	0.21	0.20

Tabla 4: Flujo de calor adimensional total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad con  $\epsilon_0=\epsilon_L=0.03$ ,  $L=0.5\text{m}$ ,  $T_0=100\text{K}$ ,  $T_L=50\text{K}$  y  $\beta=2.0\text{m}^{-1}$ .

### 3. RESULTADOS

En esta sección se hace una breve descripción de las configuraciones geométricas y térmicas analizadas en este trabajo, las cuales fueron propuestas por algunos autores hace ya algún tiempo, y reproducidas a lo largo de los años en muchos trabajos publicados, por lo que se han transformado en configuraciones clásicas. Se presentan los resultados obtenidos al reproducir estas diferentes configuraciones térmicas, se hace un muy breve análisis de resultados y se comparan resultados mostrando algunos errores.

Todos los resultados fueron obtenidos en el sistema internacional de medidas, pero son presentados en la misma forma que fueron publicados en los trabajos originales, por lo que, para facilitar la comprensión del lector, se describen los parámetros adimensionales comúnmente presentes en la mayoría de los trabajos originales. Entre los parámetros adimensionales más comunes se encuentra el albedo de dispersión

$$\omega = \frac{\sigma_s}{\beta} \quad (10)$$

el espesor óptico

$$\tau = \beta L \quad (11)$$

el parámetro conducción-radiación

$$N = \frac{k\beta}{4\sigma T^3} \quad (12)$$

el flujo de calor por conducción y radiación adimensional

$$Q = \frac{q}{k\beta T} \quad (13)$$

y flujo de calor total adimensional

$$Q_T = Q_C + Q_R \quad (14)$$

en estos parámetros adimensionales  $T$  representa la temperatura de referencia,  $k$  la conductividad térmica y  $q_r$  el flujo de calor radiante.



Para una descripción más detalladas de las configuraciones geométricas, térmicas y parámetros adimensionales utilizados se recomienda al lector recurrir a las publicaciones originales.

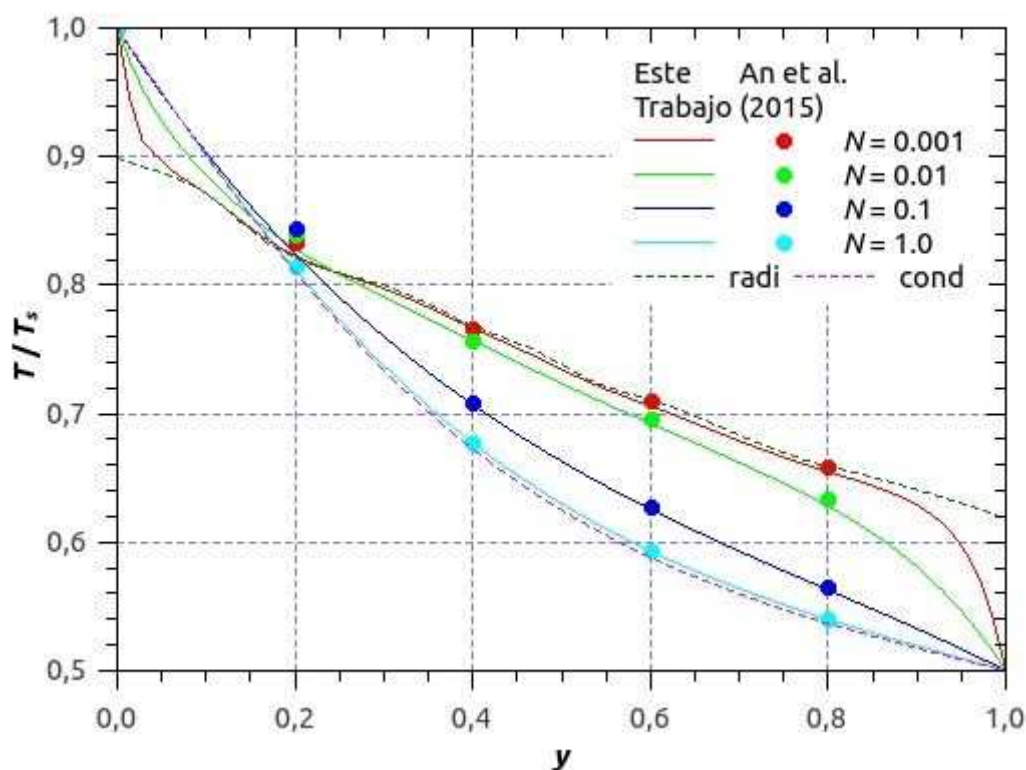


Figura 1: Influencia del parámetro de conducción radiación  $N$  en la distribución de temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=L/2$ ) de una cavidad cuadrada para  $L=1\text{m}$ ,  $T_s=1000\text{K}$ ,  $T_n=T_o=T_c=500\text{K}$ ,  $\omega=0$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon=1$  en todas las paredes.

#### 4.1 Placa Plana

En esta sección se muestran resultados correspondientes a emisión difusa desde las fronteras de una placa plana, cavidad unidimensional, sin generación de calor con dispersión isotrópica y anisotrópica. Se reproducen resultados de [Abulwafa \(1999a, 1999b\)](#) y [Krishnaprakas et al. \(2001\)](#).

La [Tabla 1](#) muestra los flujos de calor adimensionales por conducción  $Q_C$ , radiación  $Q_R$  y total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad plana de espesor  $L=0.5\text{m}$ , con  $\varepsilon_0=\varepsilon_L=1$ ,  $T_0=100\text{K}$ ,  $T_L=0\text{K}$ ,  $N=0.5$  y  $\beta=2.0\text{m}^{-1}$ . Se advierte cómo el flujo de calor por conducción se incrementa con el albedo de dispersión en la pared caliente mientras que disminuye en la pared fría, lo contrario ocurre con el flujo de calor por radiación. El flujo de calor total disminuye con el albedo de dispersión. También se muestran los errores relativos, los cuales se calculan, para todas los casos mostrados en este trabajo, usando el valor de la referencia como valor exacto.

En la [Tabla 2](#) se muestra los flujos de calor adimensionales por conducción  $Q_C$ , radiación  $Q_R$  y total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad plana de espesor  $L=0.5\text{m}$ , con  $\varepsilon_0=\varepsilon_L=1$ ,  $T_0=100\text{K}$ ,  $T_L=0\text{K}$ , un  $N=0.1$  y  $\beta=2.0\text{m}^{-1}$ . Se diferencia de la [Tabla 1](#) que, en este caso, al ser menor  $N$ , los flujos de calor por conducción  $Q_C$ , para los mismos albedos de dispersión, son menores en la pared caliente y mayores en la pared fría. Los flujos de calor por radiación  $Q_R$ , por el contrario, son mayores en ambas paredes, los flujos de calor total  $Q_T$ , debido a la influencia de la radiación, también son mayores en ambas paredes. Se advierte además, que varían con el

albedo de dispersión, de la misma forma, descrita en el análisis de la [Tabla 1](#).

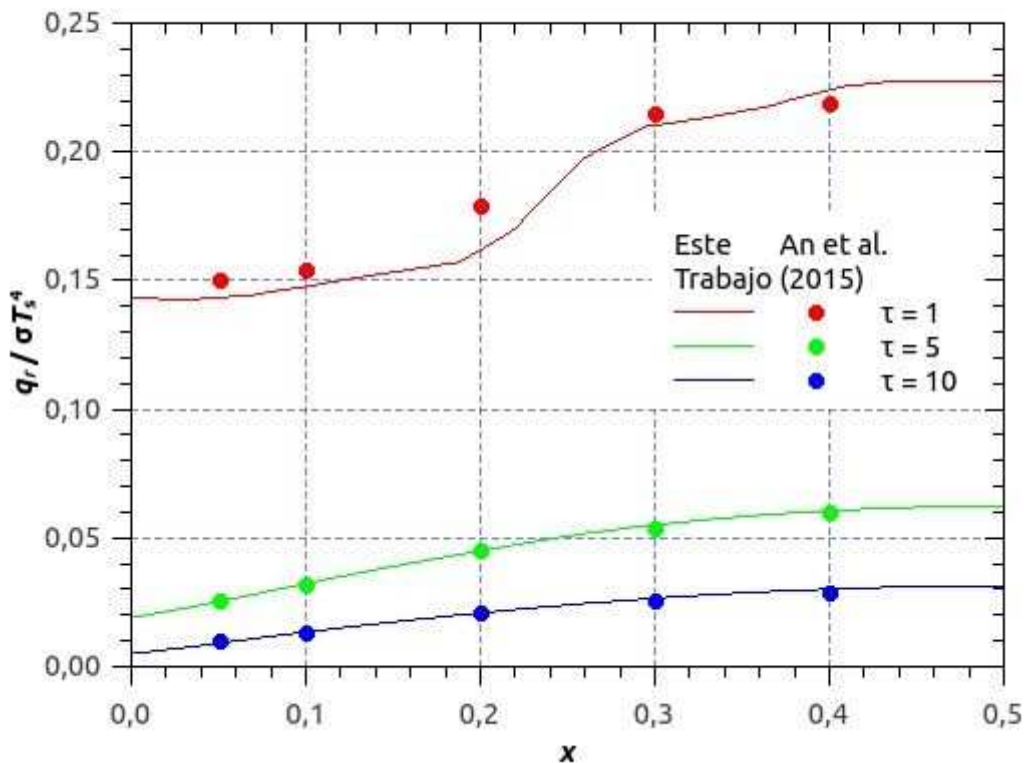


Figura 2: Influencia del espesor óptico  $\tau$  en la distribución del flujo de calor radiante adimensional a lo largo de la pared norte ( $y=L$ ) de una cavidad cuadrada para  $L=1m$ ,  $T_s=1000K$ ,  $T_n=T_o=T_e=500K$ ,  $\omega=0$ ,  $\epsilon=1$  en todas las paredes,  $N=0.001$ .

La [Tabla 3](#) muestra los flujos de calor adimensional total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad plana con  $\epsilon_0=\epsilon_L=1$ ,  $L=0.5m$ ,  $T_0=100K$ ,  $T_L=50K$  y  $\beta=2.0m^{-1}$ , para diferentes valores de  $N$  y  $\omega$  para el caso de dispersión isotrópica

$$\Phi(\mu) = 1 \tag{15}$$

y cuatro funciones de dispersión anisotrópicas FD2, FD3, FD4 y FD5 dadas por las ecuaciones (16-19) respectivamente

$$\Phi(\mu) = 1 + [1.6P_1(\mu) - P_2(\mu) + 0.4P_3(\mu)] / 3 \tag{16}$$

$$\Phi(\mu) = 1 + [1.6P_1(\mu) - 6P_2(\mu) + 0.4P_3(\mu)] / 9 \tag{17}$$

$$\Phi(\mu) = 1 + 1.732P_1(\mu) + P_2(\mu) \tag{18}$$

$$\Phi(\mu) = 1 + P_2(\mu) / 2 \tag{19}$$

Para el caso isotrópico, más sencillo de analizar, se observa como los flujos de calor disminuyen con el aumento del albedo de dispersión, independientemente del valor de  $N$ . También se observa que los flujos de calor disminuyen fuertemente con el aumento de  $N$ , independientemente de  $\omega$ .

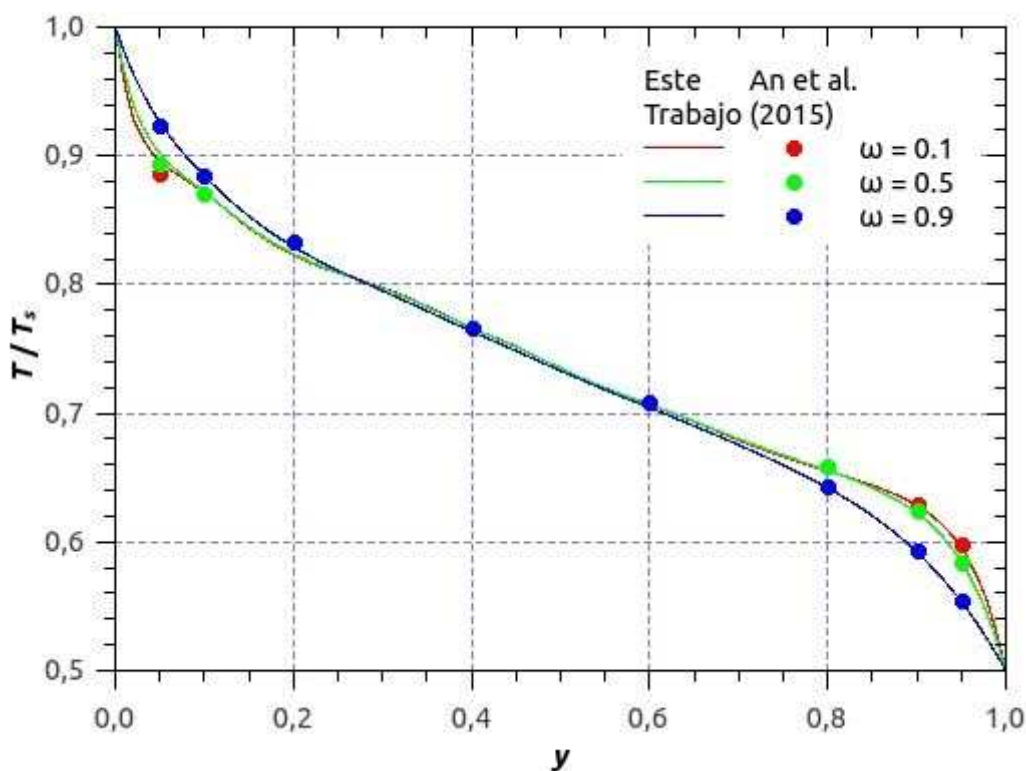


Figura 3: Influencia del albedo de dispersión  $\omega$  en la distribución de la temperatura en la línea media vertical ( $x=L/2$ ) de una cavidad cuadrada para  $L=1\text{m}$ ,  $T_s=1000\text{K}$ ,  $T_n=T_o=T_e=500\text{K}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon=1$  en todas las paredes,  $N=0.001$ .

En la [Tabla 4](#) se muestran los flujos de calor adimensional total  $Q_T$  en las paredes de la cavidad plana con  $\epsilon_0=\epsilon_L=0.03$ ,  $L=0.5\text{m}$ ,  $T_0=100\text{K}$ ,  $T_L=50\text{K}$  y  $\beta=2.0\text{m}^{-1}$ , para diferentes valores de  $N$  y  $\omega$  para el caso de dispersión isotrópica, ecuación (15), y dispersión anisotrópica FD2, ecuación (16). Comparando con los resultados de la [Tabla 3](#), se observa que los flujos de calor son menores, esto se debe a que los valores dados en la [Tabla 3](#) corresponden a una cavidad de paredes negras, sin reflexión, mientras que los valores dados en la [Tabla 4](#) corresponden a una cavidad de paredes fuertemente reflectivas, solo absorben el 3% de la radiación incidente y el resto lo reflejan hacia el interior de la cavidad.

## 4.2 Cavidad Cuadrada

Aquí se reproducen los resultados publicados por [An et al. \(2015\)](#) correspondientes a emisión difusa desde las paredes de una cavidad cuadrada con  $L=1\text{m}$ ,  $T_s=1000\text{K}$ ,  $T_n=T_o=T_e=500\text{K}$ .

La [Figura 1](#) muestra la influencia del parámetro de conducción radiación  $N$  en la distribución de temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=L/2$ ) con  $\omega=0$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$  y  $\epsilon=1$  en todas las paredes. Para facilitar el análisis se incluyen también las distribuciones de temperatura para los casos de radiación y conducción puras. Se advierte que la distribución de temperatura para el mayor valor de  $N$ , y por lo tanto de la conductividad térmica, sigue perfectamente a la distribución correspondiente a la de conducción pura, siendo levemente superior. Para el menor valor de  $N$ , la distribución de temperatura sigue a la de radiación pura, siendo levemente inferior, pero se aparta en la zona próxima a las paredes, debido al salto térmico característico del problema radiante en superficies sólidas en contacto con un gas. La

reducción de los valores de temperatura con el aumento de  $N$  se debe que al crecer  $N$  aumenta la conductividad térmica y con ello la cantidad de calor por conducción, sumándose al transporte de radiación.

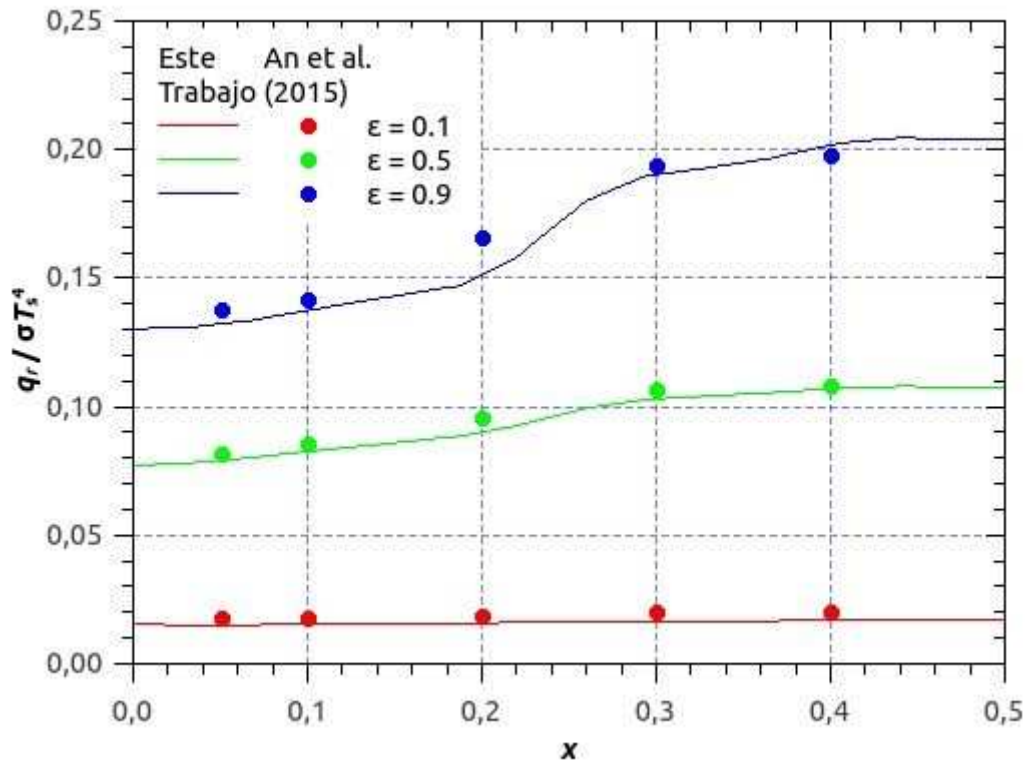


Figura 4: Influencia de la emisividad de las paredes  $\epsilon$  en la distribución del flujo de calor radiante adimensional a lo largo de la pared norte ( $y=L$ ) de una cavidad cuadrada para  $L=1\text{m}$ ,  $T_s=1000\text{K}$ ,  $T_n=T_o=T_e=500\text{K}$ ,  $\omega=0.5$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $N=0.001$ .

En la Figura 2 se observa la influencia del espesor óptico  $\tau$  en la distribución del flujo de calor radiante adimensional a lo largo de la pared norte ( $y=L$ ) con  $\omega=0$ ,  $\epsilon=1$  en todas las paredes y  $N=0.001$ . El incremento del espesor óptico se debe al incremento del coeficiente de extinción, ecuación (11), y representa una mayor absorción de energía radiante por parte del medio, con la consiguiente reducción de la energía radiante incidente en la pared norte. El máximo flujo de calor radiante se encuentra en el medio la pared norte debido a que las fuentes de calor son simétricas respecto a la línea media vertical.

La Figura 3 muestra la influencia del albedo de dispersión en la distribución de la temperatura en la línea media vertical ( $x=L/2$ ) con  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon=1$  en todas las paredes y  $N=0.001$ . El albedo de dispersión, ecuación (10), representa la relación entre la cantidad de energía dispersada y la absorbida, al incrementarse el albedo de dispersión la energía radiante es redistribuida sin ser absorbida, por lo que aumentan (disminuyen) los valores de temperaturas en las cercanías de la pared sur (norte), más caliente (fría).

En la Figura 4 se aprecia la influencia de la emisividad de las paredes  $\epsilon$  en la distribución del flujo de calor radiante adimensional  $Q_R$  a lo largo de la pared norte ( $y=L$ ) con  $\omega=0.5$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$  y  $N=0.001$ . Se advierte que el flujo de calor radiante aumenta con la emisividad, el valor de la emisividad representa la relación entre la energía radiante absorbida y la reflejada por la pared sólida, el caso extremo de pared negra, totalmente absorbente, corresponde a  $\epsilon=1$ , y el de pared totalmente reflectante,  $\epsilon=0$ .

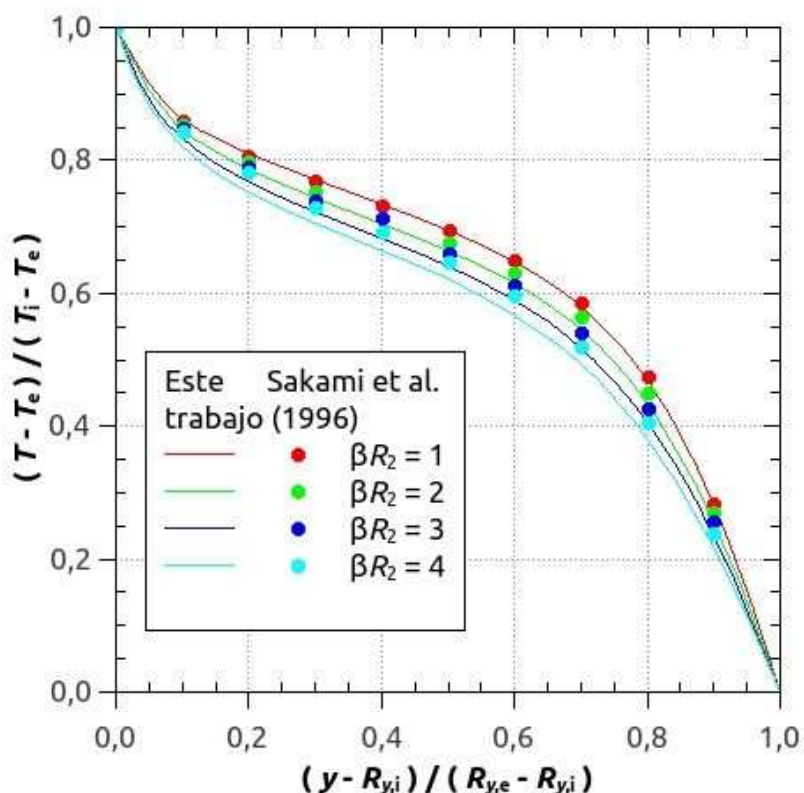


Figura 5: Influencia del parámetro  $\beta R_{y,i}$  en la distribución de la temperatura a lo largo del eje de simetría vertical ( $x=0$ ) de un anillo elíptico para  $\beta R_{x,i}=1$ ,  $\beta R_{x,e}=2$ ,  $\beta(R_{y,e}-R_{y,i})=1$ ,  $T_i=1\text{K}$ ,  $T_e=0.1\text{K}$ ,  $N=0.01$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_i=\varepsilon_e=1$ ,  $\omega=0$ .

### 4.3 Cavidad anular elíptica

En esta sección se reproducen los resultados publicados Sakami et al. (1996) correspondientes a una cavidad anular de forma elíptica con radios mayores, interno  $R_{y,i}$  y externo  $R_{y,e}$ , y radios menores, interno  $R_{x,i}$  y externo  $R_{x,e}$ .

La Figura 5 muestra la influencia del parámetro  $\beta R_{y,i}$  en la distribución de la temperatura a lo largo del eje de simetría vertical ( $x=0$ ) para  $\beta R_{x,i}=1$ ,  $\beta R_{x,e}=2$ ,  $\beta(R_{y,e}-R_{y,i})=1$ ,  $T_i=1\text{K}$ ,  $T_e=0.1\text{K}$ ,  $N=0.01$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_i=\varepsilon_e=1$  y  $\omega=0$ . El coeficiente de extinción  $\beta$  y el espesor de la cavidad  $\beta(R_{y,e}-R_{y,i})$  se mantiene constante, por lo que el incremento del parámetro  $\beta R_{y,i}$  se obtiene aumentando la curvatura de la elipse, es decir, incrementando el radio del eje mayor de la elipse  $R_{y,i}$ . Se advierte una disminución de la temperatura con el incremento del radio, debido a que el medio sobre el eje mayor resulta menos expuesto a la cara interna de mayor temperatura.

En la Figura 6 se puede observar la influencia del albedo de dispersión  $\omega$  en la distribución de la temperatura a lo largo del eje de simetría vertical ( $x=0$ ) para  $\beta R_{x,i}=1$ ,  $\beta R_{x,e}=2$ ,  $\beta R_{y,i}=2$ ,  $R_{y,e}=3$ ,  $T_i=1\text{K}$ ,  $T_e=0.1\text{K}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_i=\varepsilon_e=1$  y dos valores de  $N$ . Se observa que la temperatura disminuye con el incremento del albedo de dispersión, debido a que la porción de energía radiante dispersada no participa del proceso de absorción y emisión del medio, por lo que no incrementa su energía térmica almacenada. También se advierte que la influencia del albedo de dispersión es mayor para el menor valor del parámetro de conducción radiación, debido a que el transporte de calor está dominado por la conducción, en cambio, para  $N=0.01$ , el transporte principal de energía es la radiación.

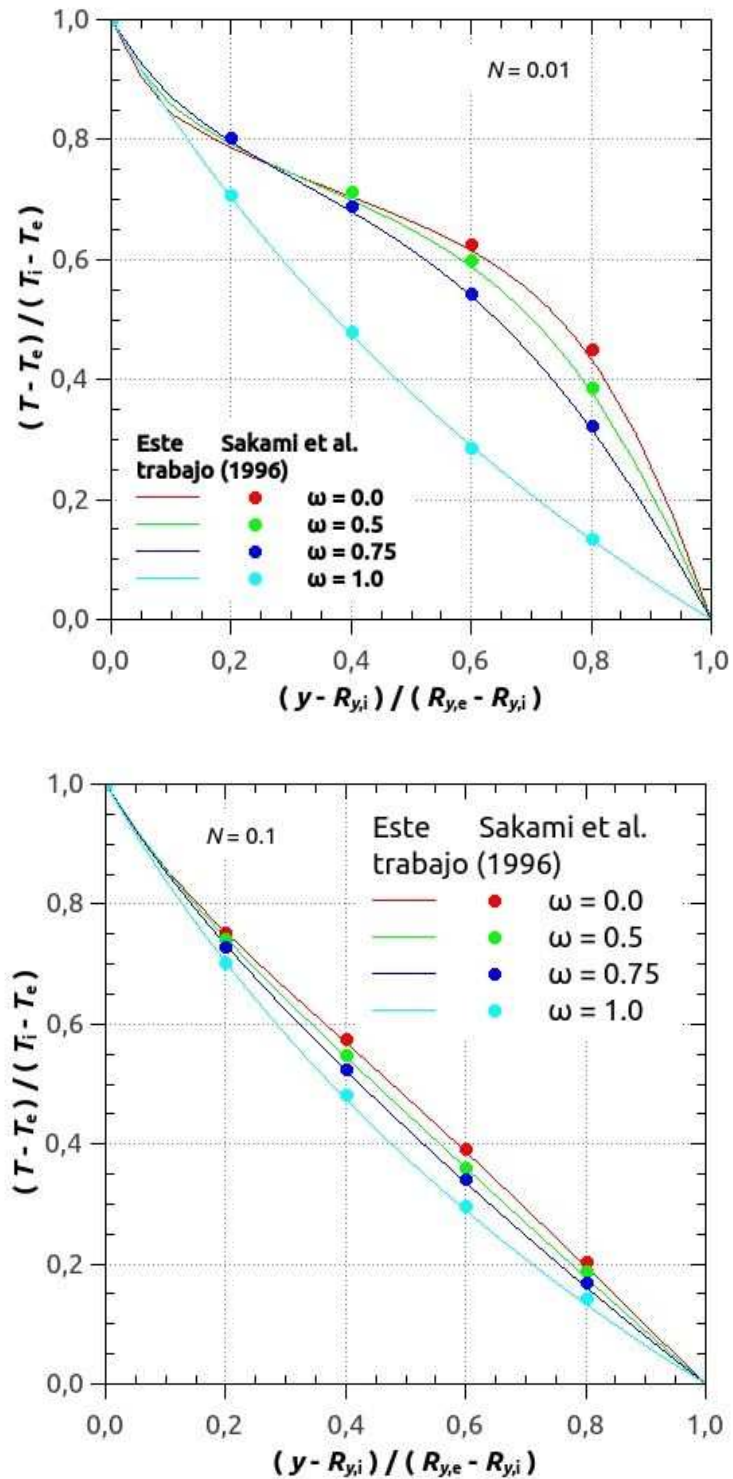


Figura 6: Influencia del albedo de dispersión  $\omega$  en la distribución de la temperatura a lo largo del eje de simetría vertical ( $x=0$ ) de un anillo elíptico para  $\beta R_{x,i}=1$ ,  $\beta R_{x,e}=2$ ,  $\beta R_{y,i}=2$ ,  $R_{y,e}=3$ ,  $T_i=1\text{K}$ ,  $T_e=0.1\text{K}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_i=\varepsilon_e=1$ .

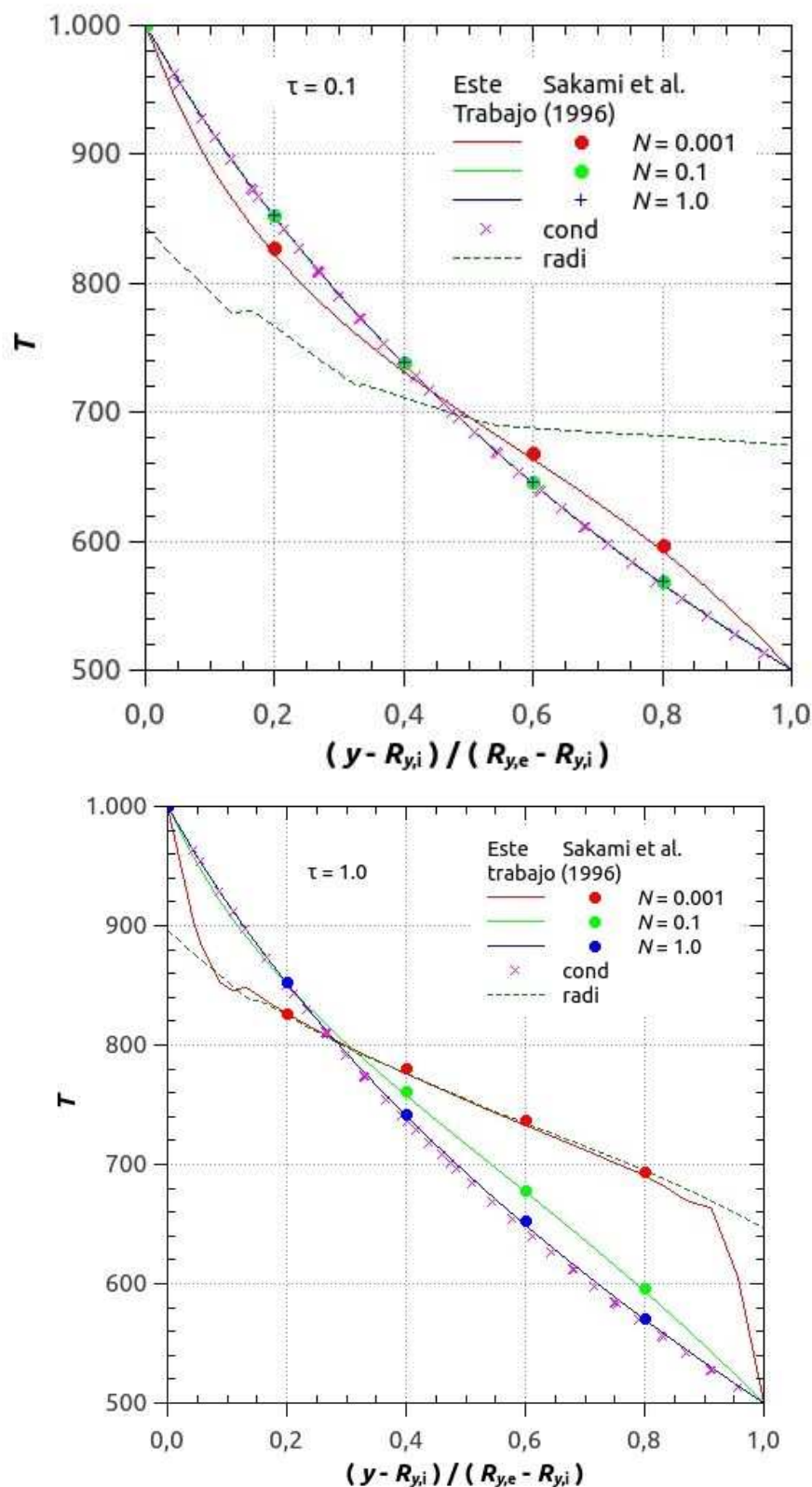


Figura 7: Influencia del parámetro conducción radiación  $N$  en la distribución de la temperatura a lo largo del eje de simetría vertical ( $x=0$ ) de un semi anillo elíptico para  $\tau=\beta(R_{x,e}-R_{x,i})$ ,  $\tau=\beta(R_{y,e}-R_{y,i})$ ,  $T_i=1000\text{K}$ ,  $T_e=500\text{K}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_i=\varepsilon_e=1$ ,  $\omega=0$ .

La Figura 7 muestra la influencia del parámetro conducción radiación  $N$  en la distribución de la temperatura a lo largo del eje de simetría vertical ( $x=0$ ) para  $\tau=\beta(R_{x,e}-R_{x,i})=\beta(R_{y,e}-R_{y,i})$ ,

$T_i=1000\text{K}$ ,  $T_e=500\text{K}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_i=\varepsilon_e=1$ ,  $\omega=0$ , para dos valores del espesor óptico  $\tau$ . Para facilitar el análisis se incluyen las distribuciones de temperatura correspondientes a la conducción y radiación puras. Para el menor valor de  $\tau$  se observa que las temperaturas correspondientes a los valores mayores de  $N$  sigue perfectamente la distribución correspondiente a la conducción y la distribución de temperatura correspondiente al menor valor de  $N$  se separa levemente y muestra una tendencia de acercarse a la de radiación. Esta tendencia de seguir la distribución de temperatura de radiación, para el menor valor de  $N$ , queda claramente en evidencia para el mayor valor de  $\tau$ .

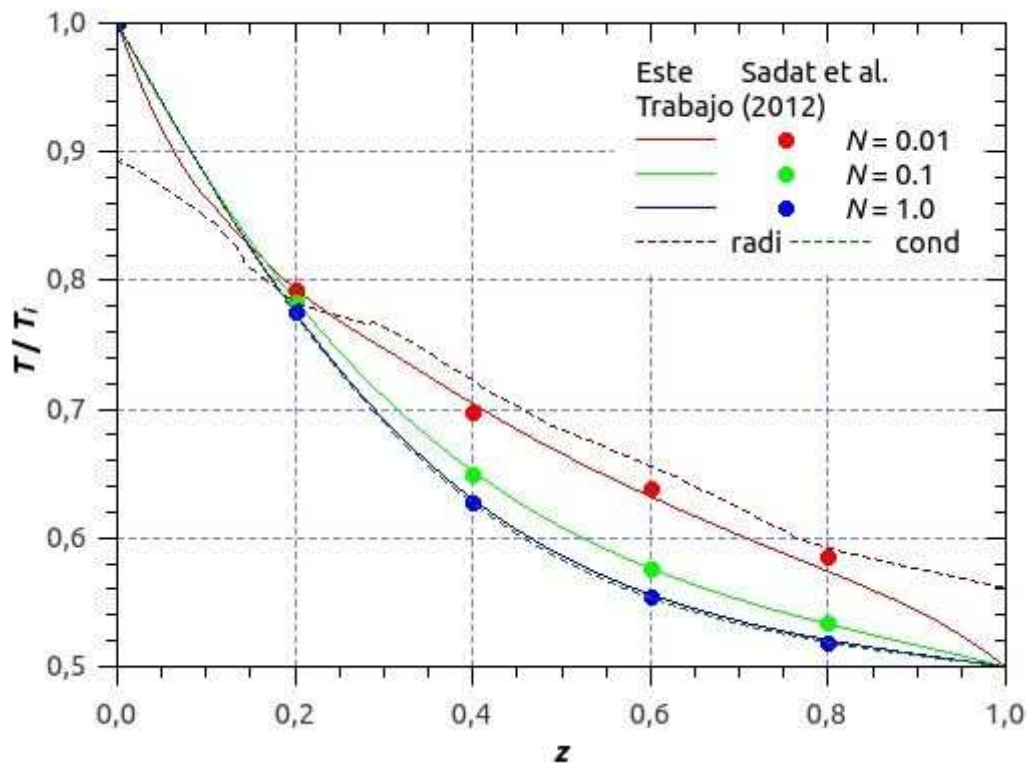


Figura 8: Influencia del parámetro conducción radiación  $N$  en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) en una cavidad cúbica para  $L=1\text{m}$ ,  $T_i=1000\text{K}$ ,  $T_e=500\text{K}$  en el resto de las paredes,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon=1$  en todas las paredes,  $\omega=0$ .

#### 4.4 Cavidad Cúbica

En esta sección se presentan los resultados correspondientes a una cavidad cúbica, propuesta por [Sadat et al. \(2012\)](#), de dimensiones  $L=1\text{m}$ , con emisión difusa desde la pared inferior ( $z=0$ ) a una temperatura  $T_i=1000\text{K}$  y del resto de las paredes, más frías, a la temperatura  $T_e=500\text{K}$ .

En la [Figura 8](#) se observa la influencia del parámetro conducción radiación  $N$  en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) para  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon=1$  en todas las paredes y  $\omega=0$ . Con el objeto de facilitar el análisis se incluyen las distribuciones correspondientes a conducción y radiación puras. Se advierte cómo las temperaturas, con la reducción de  $N$ , se van separando de la distribución de conducción y se acercan a la de radiación. Se observa además, que las temperaturas de conducción son mayores a las de radiación en las cercanías de la superficie caliente, y a partir de la coordenada  $z=0,2\text{m}$ , resultan menores a la de radiación.



La **Figura 9** muestra la influencia del coeficiente de absorción  $\kappa$  en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) para  $\varepsilon=1$  en todas las paredes,  $\omega=0$  y  $N=0.01$ . Se aprecia como la temperatura aumenta con el valor del coeficiente de absorción ya que mientras mayor sea el valor de  $\kappa$  mayor es la energía radiante absorbida por el medio. Como en el caso anterior, la influencia de  $\kappa$ , y por lo tanto de la radiación térmica, es más intensa a medida que se aleja de la fuente caliente.

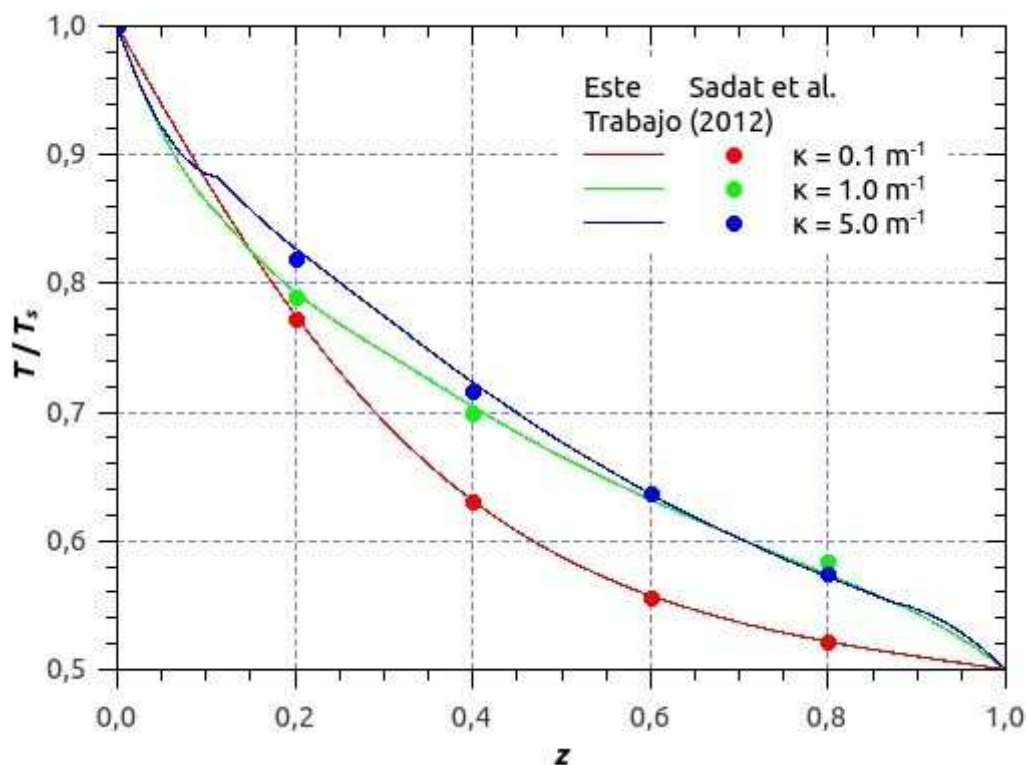


Figura 9: Influencia del coeficiente de absorción  $\kappa$  en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) en una cavidad cúbica para  $L=1\text{m}$ ,  $T_i=1000\text{K}$ ,  $T=500\text{K}$  en el resto de las paredes,  $\varepsilon=1$  en todas las paredes,  $\omega=0$ ,  $N=0.01$ .

En la **Figura 10** se presenta la influencia del albedo de dispersión  $\omega$  en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) para  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon=1$  en todas las paredes y  $N=0.01$ . Los casos extremos de  $\omega=0$  y  $\omega=1$  corresponden a un medio totalmente dispersante (no absorbe ni emite radiación térmica) y a un medio totalmente absorbente (no dispersa la radiación térmica), respectivamente. Por este motivo las mayores temperaturas corresponden al medio totalmente absorbente y va disminuyendo a medida que aumente  $\omega$ .

La **Figura 11** muestra la influencia de la emisividad  $\varepsilon_i$  de la pared inferior en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) para  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon=1$  en el resto de las paredes,  $\omega=0$  y  $N=0.01$ . Para paredes difusas, los casos extremos de  $\varepsilon=0$  y  $\varepsilon=1$  representan una pared totalmente reflejante y una pared totalmente absorbente. La influencia de  $\varepsilon$  se puede ver en la ecuación (8), que para  $\varepsilon=0$  la energía radiante saliente de la pared caliente solo corresponde a la porción reflejada proveniente del medio y de las otras paredes, y para  $\varepsilon=1$ , la energía radiante saliente de la pared sur se debe a su estado térmico, que al ser la pared más caliente, produce las mayores temperaturas a lo largo de la línea media vertical.

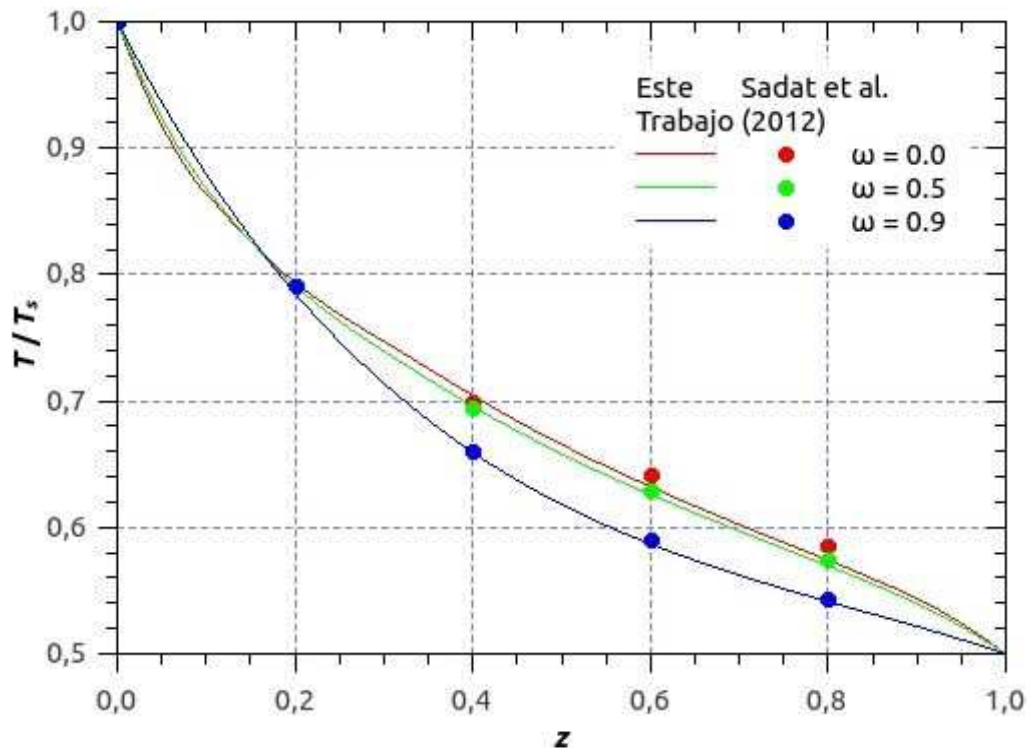


Figura 10: Influencia del albedo de dispersión  $\omega$  en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) en una cavidad cúbica para  $L=1\text{m}$ ,  $T_i=1000\text{K}$ ,  $T=500\text{K}$  en el resto de las paredes,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon=1$  en todas las paredes,  $N=0.01$ .

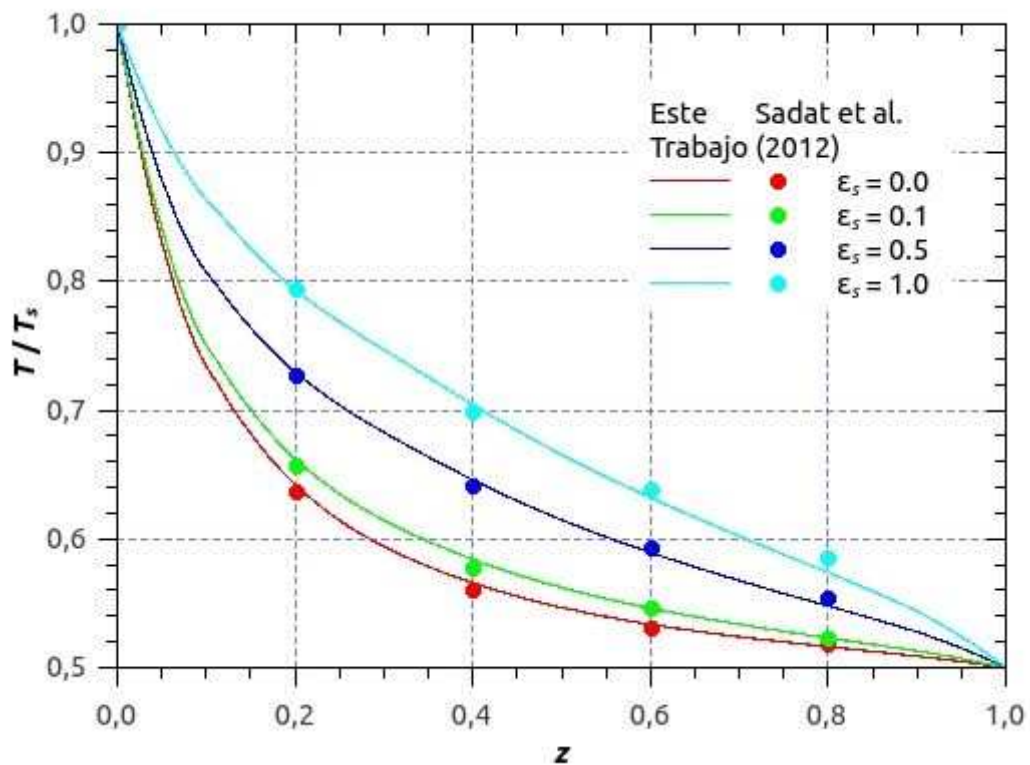


Figura 11: Influencia de la emisividad  $\epsilon_i$  de la pared inferior en la distribución de la temperatura a lo largo de la línea media vertical ( $x=y=L/2$ ) en una cavidad cúbica para  $L=1\text{m}$ ,  $T_i=1000\text{K}$ ,  $T=500\text{K}$  en el resto de las paredes,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon=1$  en el resto de las paredes,  $\omega=0$ ,  $N=0.01$ .

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un código computacional para el cálculo de la transferencia de calor por conducción y radiación combinadas en cavidades multidimensionales con mallas estructuradas no ortogonales de paredes grises, difusas y reflectantes, rellenas con un medio gris absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante.

Se ha utilizado el método de los volúmenes finitos para resolver las ecuaciones de la conducción y de la transferencia radiante junto con una expansión de los polinomios de Legendre para tener en cuenta los efectos de la dispersión anisotrópica.

Se han reproducido una gran cantidad de configuraciones geométricas y térmicas existentes en la literatura y se ha evaluado la influencia de los parámetros radiantes más importantes.

Los resultados obtenidos fueron comparados con los resultados existentes en la literatura, donde se han usado métodos numéricos diferentes para resolver las ecuaciones de la conducción del calor y de la transferencia radiante.

De la comparación de resultados se puede concluir que las herramientas computacionales desarrolladas en este trabajo proporcionan resultados con un grado de precisión aceptable.

El análisis de resultados permite concluir que la metodología de cálculo, desarrollada en este trabajo, se puede aplicar a configuraciones térmicas, no incluidas en este estudio, con un amplio margen de seguridad.

Se ha verificado nuevamente la capacidad del método de los volúmenes finitos para resolver problemas de transferencia de calor y radiación térmica combinadas, siendo totalmente confiable y preciso para resolver las configuraciones térmicas analizadas en este trabajo.

## Referencias

- Abulwafa E.M., Conductive-radiative heat transfer in an inhomogeneous plane-parallel medium using Galerkin - iterative method, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 61, Issue 5, Pages 583–589, 1999a.
- Abulwafa E.M., Conductive-radiative heat transfer in an inhomogeneous slab with directional reflecting boundaries, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Volume 32, Number 14, Pages 1626-1632, 1999b.
- Amiri H., Mansouri S.H., Safavinejad A. , Combined conductive and radiative heat transfer in an anisotropic scattering participating medium with irregular geometries, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 49, Issue 3, Pages 492–503, March 2010.
- An W., Zhu T., Gao N.P. , Accelerative iteration for coupled conductive–radiative heat transfer computation in semitransparent media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 82, Pages 503-509, March 2015.
- Berour N., Lacroix D., Boulet P., Jeandel G., Radiative and conductive heat transfer in a nongrey semitransparent medium. Application to fire protection curtains, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 86, Issue 1, Pages 9–30, 2004.
- Brewster M.Q., *Thermal radiative transfer and properties*, John Wiley & Sons, 1992.
- Elghazaly A., Coupled conductive–radiative heat transfer problem for two-layer slab, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 102, Issue 3, Pages 482–491, December 2006.
- Furmanski P., Banaszek J., Finite element analysis of concurrent radiation and conduction in participating media, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume

- 84, Issue 4, Pages 563–573, 2004.
- Ismail K.A.R., Salinas C.T.S., Gray radiative conductive 2D modeling using discrete ordinates method with multidimensional spatial scheme and non-uniform grid, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 45, Issue 7, Pages 706–715, July 2006.
- Kim T.Y., Baek S.W., Analysis of combined conductive and radiative heat transfer in a two dimensional rectangular enclosure using discrete ordinate method, *Int J Heat Mass Transfer*, 34:2265–73, 1991.
- Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.H., Numerical simulations of a coupled radiative–conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 55, Issue 4, Pages 649–654, 31 January 2012.
- Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., An iterative method for solving a complex heat transfer problem, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 219, Issue 17, Pages 9356–9362, 1 May 2013.
- Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., Botkin N.D., Hoffmann K.H., Solvability of  $P_1$  approximation of a conductive–radiative heat transfer problem, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 249, Pages 247–252, 15 December 2014a.
- Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., Botkin N.D., Hoffmann K.H., Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive–convective–radiative heat transfer, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 412, Issue 1, Pages 520–528, 1 April 2014b.
- Krishnaprakas C.K., Badari Narayana K., Combined conduction and radiation heat transfer in a gray anisotropically scattering planar medium with diffuse-specular boundaries, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Volume 28, Issue 1, Pages 77–86, 2001.
- Lacroix D., Parent G., Asllanaj F., Jeandel G., Coupled radiative and conductive heat transfer in a non-grey absorbing and emitting semitransparent media under collimated radiation, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 75, Issue 5, Pages 589–609, 2002.
- Liu L.H., Tan J.Y., Li B.X., Meshless approach for coupled radiative and conductive heat transfer in one-dimensional graded index medium, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 101, Issue 2, Pages 237–248, September 2006.
- Liu L.H., Tan J.Y., Meshless local Petrov–Galerkin approach for coupled radiative and conductive heat transfer, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 46, Issue 7, Pages 672–681, July 2007.
- Mahapatra S.K., Nanda P., Sarkar A., Analysis of coupled conduction and radiation heat transfer in presence of participating medium- using a hybrid method, *Heat and Mass Transfer*, Volume 41, Number 10, Pages: 890 - 898, 2005.
- Mahapatra S.K., Dandapat B.K., Sarkar A., Analysis of combined conduction and radiation heat transfer in presence of participating medium by the development of hybrid method, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 102, Issue 2, Pages 277–292, November 2006.
- Modest M.F., *Radiative heat transfer*, Mc Graw-Hill, 1993.
- Moore T.J., Jones M.R., Analysis of the conduction–radiation problem in absorbing, emitting, non-gray planar media using an exact method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 73, Pages 804–809, June 2014.
- Rebollo D., Simulación Numérica de la Radiación Térmica con Dispersión Anisotrópica de Mie mediante el Método de los Volúmenes Finitos, XVI Congreso sobre Métodos

*Numéricos y sus Aplicaciones*, Córdoba, Argentina, Octubre del 2007.

- Rebollo D., Análisis de la radiación térmica con dispersión anisotrópica en placas planas, I *Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina, Octubre del 2008a.
- Rebollo D., Simulación numérica de la radiación térmica de gases no grises en cavidades multidimensionales, XVII *Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, San Luis, Argentina, Noviembre del 2008b.
- Rebollo D., Simulación numérica de la radiación térmica de gases no grises en un medio plano, XVIII *Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Noviembre del 2009a.
- Rebollo D., Análisis de la radiación térmica con dispersión anisotrópica de Mie en cavidades bidimensionales mediante el método de los volúmenes finitos, XVIII *Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Noviembre del 2009b.
- Rebollo D., Olivera M., Romero C., Simulación numérica de la radiación térmica no gris del vapor de H<sub>2</sub>O en un medio plano, II *Segundo Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, San Juan, Argentina, Noviembre del 2010.
- Rebollo D., Rodriguez C., Análisis de la radiación térmica no gris del dióxido de carbono en un medio plano no isotérmico, XIX *Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones* (ENIEF 2011), Rosario, Argentina, Noviembre del 2011.
- Rebollo, D.; Bocca, J. C.; Rodriguez, C. A., “Aplicación del método de los volúmenes finitos al cálculo de la radiación térmica en cavidades cilíndricas”, XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones ENIEF 2013, *Mecánica Computacional Vol. XXXII*, págs. 3243-3264, Mendoza, 19 al 22 de Noviembre de 2013.
- Rebollo, D.; Velasco M.; Rodrigo, R. H., Análisis de la radiación térmica en cavidades cilíndricas rellenas con un medio participante, IV Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica CAIM 2014, Septiembre del 2014a, Resistencia, Argentina.
- Rebollo, D.; Velasco, M.; Bocca, J. C., Predicción de la radiación térmica en cavidades esféricas con el método de los volúmenes finitos, XXI *Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones* ENIEF 2014, Septiembre del 2014b, Bariloche, Argentina.
- Rebollo, Daniel ; Velasco, Marisol ; Bocca, José Carlos, Solución numérica de la transferencia de calor por conducción y radiación térmica combinadas en un medio cilíndrico participante, V Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica CAIM 2016, Octubre de 2016a, Santiago del Estero, Argentina, págs. 1617-1627.
- Rebollo, Daniel; Velasco, Marisol; Bocca, Federico; Análisis numérico de la transferencia de calor por conducción y radiación térmica combinadas en un medio esférico participante, XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus aplicaciones ENIEF 2016b, Noviembre de 2016b, Córdoba, República Argentina, págs. 1907-1924.
- Ruan L.M., Xie M., Qi H., An W., Tan H.P., Development of a finite element model for coupled radiative and conductive heat transfer in participating media, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 102, Issue 2, Pages 190–202, November 2006.
- Sadat H., Wang C.A., Le Dez V., Meshless method for solving coupled radiative and conductive heat transfer in complex multi-dimensional geometries, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 218, Issue 20, Pages 10211–10225, 15 June 2012.
- Sakami M., Charette A., Le Dez V., Application of the discrete ordinates method to combined conductive and radiative heat transfer in a two-dimensional complex geometry, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 56, 517–533, 1996.

- Sarvari S.M.H., Inverse determination of heat source distribution in conductive–radiative media with irregular geometry, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 93, Issues 1–3, Pages 383–395, 2005.
- Sauter E., Souto de Azevedo F., Thompson M., Existence theory for one-dimensional quasilinear coupled conductive–radiative flows, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 233, Pages 545–556, 1 May 2014.
- Segatto C.F., Vargas R.M.F., Vilhena M.T., Bodmann B.E.J., A solution for the non-linear SN radiative–conductive problem in a grey plane-parallel participating medium, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 49, Issue 9, Pages 1493–1499, September 2010.
- Siegel R., Howell J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, Taylor & Francis, 1992.
- Siewert C.E., Thomas Jr. J.R., A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat transfer problems, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 45, Issue 5, Pages 273–281, 1991.
- Siewert C.E., An improved iterative method for solving a class of coupled conductive–radiative heat-transfer problems, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 54 (4), 599–605, 1995.
- Talukdar P., Issendorff F.V., Trimis D., Simonson C. J., Conduction–radiation interaction in 3D irregular enclosures using the finite volume method, *Heat and Mass Transfer*, Volume 44, Issue 6, pp 695–704, April 2008.
- Talukdar P., Mishra S.C., Analysis of conduction–radiation problem in absorbing, emitting and anisotropically scattering media using the collapsed dimension method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 45, Issue 10, Pages 2159–2168, 2002.
- Tan H.P., Yi H.L., Zhang H.C., Wang P.Y., Tong T.W., Coupled radiation–conduction heat transfer in an anisotropically scattering slab with mixed boundaries, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 83, Issues 3–4, Pages 667–698, 2004.
- Vargas R.M.F., De Vilhena M.T.M.B., A closed -form solution for the one-dimensional radiative conductive problem by the decomposition and LTSN methods, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 61, Issue 3, Pages 303–308, 1999.
- Viskanta R., Grosh R.J., Effect of surface emissivity on heat transfer by simultaneous conduction and radiation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 5, Issue 8, Pages 729–734, 1962.
- Yi H.L., Tan H.P., Scattering characteristics effect on combined heat transfer through an anisotropic nongray media, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 85, Issues 3–4, Pages 285–310, 2004.
- Yi H.L., Tan H.P., Lu Y.P., Effect of reflecting modes on combined heat transfer within an anisotropic scattering slab, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 95, Issue 1, Pages 1–20, 2005.
- Yuen W., Takara E., Analysis of combined conductive radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure with a gray medium, *Trans. ASME J. Heat Transf.*, 110, 468–474, 1988.
- Zhang Y., Yi H.L., Tan H.P., Natural element method analysis for coupled radiative and conductive heat transfer in semitransparent medium with irregular geometries, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 76, Pages 30–42, February 2014.