Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXVI, págs. 1119-1128 (artículo completo)
José G. Etse, Bibiana M. Luccioni, Martín A. Pucheta, Mario A. Storti (Eds.)
San Miguel de Tucumán, 6-9 Noviembre 2018

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES DE POISSON CON CONDICIONES DE DIRICHLET UTILIZANDO TÉCNICAS DEL PROBLEMA INVERSO DE MOMENTOS

SOLUTION OF AN EQUATION IN POISSON PARTIAL DERIVATIVES WITH CONDITIONS OF DIRICHLET USING TECHNIQUES OF THE INVERSE MOMENTS PROBLEM

María B. Pintarelli[a,b]

[a]*Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Prov. de Buenos Aires, Argentina, mariabpintarelli@gmail.com, http://www.ing.unlp.edu.ar*

[b]*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Prov. de Buenos Aires, Argentina,mariabpintarelli@gmail.com, http://www.mate.unlp.edu.ar*

Palabras clave: Ecuación en derivadas parciales de Poisson, ecuaciones integrales, problema de momentos generalizado.

Resumen. Se mostrará que encontrar soluciones de la ecuación de Helmholtz y la ecuación de Poisson no lineal bajo condiciones de Dirichlet es equivalente a resolver una ecuación integral, la cual puede ser tratada como un problema de momentos bidimensional generalizado sobre un dominio que en principio se considera rectangular. Veremos que se puede encontrar una solución aproximada de la ecuación en derivadas parciales utilizando las técnicas de problema inverso generalizado de momentos y encontrar cotas para el error de la solución estimada. El método consiste de dos pasos. En cada uno se resuelve numéricamente una ecuación integral utilizando las técnicas de problema inverso de momentos bidimensional. Ilustramos los diferentes casos con ejemplos.

Keywords: Equation in Poisson partial derivatives, integral equations, generalized moment problem .

Abstract. It will be shown that finding solutions from the Helmholtz equation and the non-linear Poisson equation under Dirichlet conditions is equivalent to solving an integral equation, which can be treated as a generalized two-dimensional moment problem over a domain that is considered rectangular in principle. We will see that an approximate solution of the equation in partial derivatives can be found using the techniques of generalized inverse moments problem and bounds for the error of the estimated solution. The method consists of two steps.In each one an integral equation is solved numerically using the two-dimensional inverse moments problem techniques. We illustrate the different cases with examples.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de momentos generalizados (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong ,2002) consiste en encontrar una función $f(x)$ sobre un dominio $\Omega \subset R^d$ que satisface la sucesión de ecuaciones

$$\mu_i = \int_\Omega g_i(x) f(x) dx \quad i\epsilon N \tag{1}$$

donde N es el conjunto de los números naturales,$(g_i(x))$ es una sucesión dada de funciones en $L^2(\Omega)$ linealmente independientes conocidas y la sucesión de números reales $\{\mu_i\}_{i\epsilon N}$ son datos conocidos. El problema de momentos de Hausdorff (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; G. Talenti, 1987) es un ejemplo clásico de un problema de momentos, consiste en encontrar una función $f(x)$ en (a, b) tal que

$$\mu_i = \int_\Omega x^i f(x) dx \quad i\epsilon N \tag{2}$$

En este caso $g_i(x) = x^i$ con i perteneciente al conjunto N.
Si el intervalo de integración es $(0, \infty)$ se tiene el problema de momentos de Stieltjes; si el intervalo de integración es $(-\infty, \infty)$ se tiene el problema de momentos de Hamburger (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; G. Talenti, 1987).
El problema de momentos es un problema mal condicionado en el sentido que puede no existir solución y de existir no hay dependencia continua sobre los datos dados (J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, 1943; D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le , D.D. Trong ,2002). Hay varios métodos para construir soluciones regularizadas. Uno de ellos es el método de la expansión truncada (D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le, D.D. Trong ,2002). Ḋicho método consiste en aproximar (1) con el problema finito de momentos

$$\mu_i = \int_\Omega g_i(x) f(x) dx \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

donde se considera como solución aproximada de $f(x)$ a $p_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i(x)$, y las funciones $\{\phi_i(x)\}_{i=1,...,n}$ resultan de ortonormalizar $\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle$ siendo λ_i los coeficientes en función de los datos μ_i . En el subespacio generado por $\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle$ la solución es estable. Si $n\epsilon N$ es elegido en forma apropiada entonces la solución de (3) se aproxima a la solución del problema original (1).
En el caso en que los datos μ_i sean inexactos se deben aplicar teoremas de convergencia y estimaciones del error para la solución regularizada (pág. 19 a 30 de Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong ,2002).

2. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON

Se quiere hallar $w(x, t)$ tal que

$$w_{xx} + w_{tt} = f(x, t) \tag{4}$$

sobre un dominio $E = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ ó $E = (a_1, b_1) \times (a_2, \infty)$.
Consideramos

$$w_{xx} - kw_{tt} = -(k + 1)w_{tt} + f(x, t) = G(x, t) \tag{5}$$

Si $w_x \neq w_t$ se puede tomar $k = 1$.

Consideramos como función auxiliar

$$u(m, r, x, t) = e^{-m(x+1)}e^{-r(t+1)}$$

Si la región E es acotada las condiciones son:

$$\begin{aligned} w(a_1, t) = k_1(t) \qquad w(b_1, t) = k_2(t) \\ w(x, a_2) = h_1(x) \qquad w(x, b_2) = h_2(x) \end{aligned} \tag{6}$$

Si la región E no es acotada las condiciones son:

$$w(a_1, t) = k_1(t) \qquad w(b_1, t) = k_2(t) \qquad w(x, a_2) = h_1(x) \tag{7}$$

Definimos el campo vectorial

$$F^* = (F_1(w), F_2(w)) = (w_x, -kw_t)$$

Como $udiv(F^*) = uG(x, t)$ tenemos que:

$$\iint_E udiv(F^*)dA = \iint_E uG(x, t)dA$$

Más aún, como $udiv(F^*) = div(uF^*) - F^*.\nabla u$, entonces

$$\iint_E udiv(F^*)dA = \iint_E div(uF^*)dA - \iint_E F^*.\nabla udA \tag{8}$$

donde $\nabla u = (u_x, u_t)$.
Además

$$\begin{aligned} \iint_E div(uF^*)dA = \iint_E (uw_x)_x - (ukw_t)_t \, dA = \\ \iint_E udiv(F^*)dA + \iint_E (u_x w_x - u_t k w_t) \, dA \end{aligned} \tag{9}$$

Entonces de (8) y (9):

$$\iint_E (u_x w_x - u_t k w_t) \, dA = \iint_E F^*.\nabla udA \tag{10}$$

Por otro lado, se puede probar, luego de varios cálculos que, integrando por partes:

$$\iint_E F^*.\nabla udA = A(m, r) + B(m, r) - \iint_E uw(m^2 - kr^2)dA = \varphi(m, r) \tag{11}$$

con

$$A(m, r) = \int_{a_2}^{b_2} (-m)u(m, r, b_1, t)w(b_1, t) - (-m)u(m, r, a_1, t)w(a_1, t)dt$$

$$B(m, r) = \int_{a_1}^{b_1} (-r)u(m, r, x, b_2)(-k)w(x, b_2) - (-r)u(m, r, x, a_2)(-k)w(x, a_2)dx$$

Si $m = \sqrt{k}r$, entonces de (10) y (11) :

$$\iint_E (-\sqrt{k}r)uw_x - (-r)kw_t u dA = \varphi(\sqrt{k}r, r)$$

$$\iint_E u(-\sqrt{k}w_x + kw_t)dA = \frac{\varphi(\sqrt{k}r, r)}{r}$$

con

$$\frac{\varphi(\sqrt{k}r, r)}{r} = \int_{a_2}^{b_2} -\sqrt{k}u(\sqrt{k}r, r, b_1, t)w(b_1, t) + \sqrt{k}u(\sqrt{k}r, r, a_1, t)w(a_1, t)dt +$$
$$+ \int_{a_1}^{b_1} -u(\sqrt{k}r, r, x, b_2)(-k)w(x, b_2) + u(\sqrt{k}r, r, x, a_2)(-k)w(x, a_2)dx$$

Anotamos $\varphi_1(r) = \dfrac{\varphi(\sqrt{k}r, r)}{r}$, entonces

$$\iint_E u(-\sqrt{k}w_x + kw_t)dA = \varphi_1(r) \tag{12}$$

Para resolver esta ecuación integral tomamos una base $\psi_i(r) = r^i e^{-r} \quad i = 0, 1, 2, ..., n$ de $L^2(E)$.
Entonces multiplicamos ambos miembros de (12) por $\psi_i(r) = r^i e^{-r}$ e integramos con respecto a r, obtenemos

$$\iint_E H_i(x, t)(-\sqrt{k}w_x + kw_t)dA = \int_{a_2}^{b_2} \varphi_1(r)\psi_i(r)dr = \mu_i \quad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{13}$$

donde $H_i(x, t) = \int_{a_2}^{b_2} u(-\sqrt{k}r, r, x, t)\psi_i(r)dr$.

Podemos interpretar a (13) como un problema de momentos generalizado bidimensional. Lo resolvemos en forma numérica con el método de expansión truncada y encontramos una aproximación $p_n(x, t)$ para $-\sqrt{k}w_x + kw_t$.

3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA GENERALIZADO DE MOMENTOS

Podemos aplicar el método de expansión truncada detallado en (G. Talenti, 1987) y generalizado en (D. D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong ,2002) y (M.B. Pintarelli, F. Vericat ,2008) para encontrar una aproximación $p_n(x, t)$ de $-\sqrt{k}w_x + kw_t$ para el correspondiente problema finito con $i = 0, 1, 2, ..., n$, donde n es el número de momentos μ_i. Consideramos la base $\phi_i(x, t) \quad i = 0, 1, 2, ..., n$ obtenida por aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt sobre $H_i(x, t) \quad i = 0, 1, 2, ..., n$.
Aproximamos la solución $-\sqrt{k}w_x + kw_t$ con (G. Talenti, 1987) y generalizado en (D. D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong ,2002) y (M. B. Pintarelli , F. Vericat,2008) :

$$p_n(x, t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \phi_i(x, t) \quad \text{donde} \quad \lambda_i = \sum_{j=0}^{i} C_{ij}\mu_j \quad i = 0, 1, 2, ..., n$$

Y los coeficientes C_{ij} verifican

$$C_{ij} = \left(\sum_{k=j}^{i-1} (-1) \frac{\langle H_i(x,t) \mid \phi_k(x,t) \rangle}{\|\phi_k(x,t)\|^2} C_{kj} \right) . \|\phi_i(x,t)\|^{-1} \quad 1 < i \leq n;\ 1 \leq j < i$$

Los términos de la diagonal son

$$C_{ii} = \|\phi_i(x,t)\|^{-1} \qquad i = 0, 1, ..., n.$$

La prueba del siguiente teorema está en(M. B. Pintarelli , F. Vericat,2011), (M. B. Pintarelli ,2015) . En (M. B. Pintarelli ,2015) la prueba está hecha para b_2 finito. Si $b_2 = \infty$ en lugar de tomar los polinomios de Legendre se consideran los polinomios de Laguerre. En (M. B. Pintarelli ,2016) la demostración está hecha para el caso unidimensional.
Este Teorema da una medida sobre la exactitud de la aproximación.

Teorema

Sea $\{\mu_i\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de números reales y supongamos que $f(x,t) \in L^2\left((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\right)$ verifica para algún ε y M (dos números positivos)

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} H_i(x,t) f(x,t) dx dt - \mu_i \right|^2 \leq \varepsilon^2$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} ((b_1 - a_1)^2 f_x^2 + (b_2 - a_2)^2 f_t^2) dx dt \leq M^2 \tag{14}$$

entonces

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} |f(x,t)|^2 \, dx dt \leq \ \min_i \left\{ \left\|CC^T\right\| \varepsilon^2 + \frac{M^2}{8\,(i+1)^2};\ i = 0, 1, ..., n \right\}$$

donde C es una matriz triangular con elementos C_{ij} (1<i$\leq n;\ 1 \leq j < i$).
y

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} |p_n(x,t) - f(x,t)|^2 \, dx dt \leq \left\|CC^T\right\| \varepsilon^2 + \frac{M^2}{8\,(n+1)^2} \tag{15}$$

Si b_2 no es finito entonces (14) cambia por

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} (x f_x^2 + t f_t^2) dx dt \leq M^2 \tag{16}$$

Y debe cumplirse que

$$t^i f(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{if} \quad t \longrightarrow \infty \quad \forall i \epsilon N$$

Entonces tenemos una ecuación en derivadas parciales de primer orden de la forma

$$-\sqrt{k} w_x(x,t) + k w_t(x,t) = p_n(x,t)$$

Es decir es de la forma

$$A_1(x,t)w_x(x,t) + A_2(x,t)w_t(x,t) = p_n(x,t)$$

where $A_1(x,t) = -\sqrt{k}$ and $A_2(x,t) = k$.
Se resuelve como en (M. B. Pintarelli ,2015), es decir, se puede probar que resolver esta ecuación es equivalente a resolver la ecuación integral

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} K(m,r,x,t)w(x,t)dtdx = \varphi_2(m,r) \tag{17}$$

con $K(m,r,x,t) = u(m,r,x,t)(m_1\sqrt{k}(m+1) - m_2k(r+1))$

donde ahora se toma como función auxiliar

$$u(m,r,x,t) = e^{-m_1(m+1)(x+1)}e^{-m_2(r+1)(t+1)}$$

Los valores de m_1 y m_2 se eligen de manera conveniente para evitar discontinuidades.
y

$$\varphi_2(m,r) = \int_{a_1}^{b_1} u(m,r,x,b_2)kw(x,b_2) - u(m,r,x,a_2)kw(x,a_2)dx -$$

$$-\int_{a_2}^{b_2} u(m,r,b_1,t)\sqrt{k}w(b_1,t) - u(m,r,a_1,t)\sqrt{k}w(a_1,t)dt - \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} p_n(x,t)udxdt$$

Nuevamente tomamos una base:

$$\psi_{ij}(m,r) = m^i r^j e^{-(m+r)} \qquad i = 0,1,...,n_1 \quad j = 0,1,2,...,n_2$$

y multiplicamos ambos miembros de (17) por $\psi_{ij}(m,r)$ e integramos con respecto a m y r

Tenemos entonces el problema de momentos generalizado

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} w(x,t)H_{ij}(x,t) = \mu_{ij} \tag{18}$$

donde

$$\mu_{ij} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(m,r)\psi_{ij}(m,r)dmdr$$

$$H_{ij}(x,t) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} K(m,r,x,t)\psi_{ij}(m,r)dmdr$$

Aplicamos el método de expansión truncada y hallamos una aproximación numérica para $w(x,t)$.

4. EJEMPLOS

Ejemplo 1

Consideramos la ecuación

$$w_{xx} + w_{tt} = \frac{120}{(3+t+2x)^2} \qquad \text{en} \quad (0,1)\times(0,1)$$

Condiciones:

$$w(0,t) = \frac{4}{(3+t)^2} \quad w(1,t) = \frac{4}{(5+t)^2}$$
$$w(x,0) = \frac{4}{(3+2x)^2} \quad w(x,1) = \frac{4}{(4+2x)^2}$$

La solución es : $\dfrac{4}{(3+2x+t)^2}$.

Para el primer paso se toman $n=5$ momentos y se aproxima $-w_x(x,t)+w_t(x,t) = G(x,t)$ con exactitud

$$\int_0^1\int_0^1 (p_5(x,t) - G(x,t))^2 dtdx = 0{,}014211$$

En la Figura 1 se muestran $p_5(x,t) \quad y \quad G(x,t)$ superpuestas.

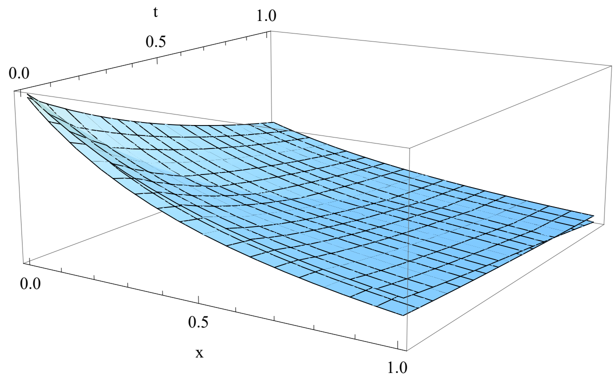

Figura 1: $p_5(x,t) \quad y \quad G(x,t)$.

Para el segundo paso se toma $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$. Además se consideran $n_1 = 3$ y $n_2 = 2$, o sea 6 momentos.
Se aproxima $w(x,t)$ con exactitud

$$\int_0^1\int_0^1 (p_6(x,t) - w(x,t))^2 dtdx = 0{,}0380442$$

En la Figura 2 se muestran $p_6(x,t) \quad y \quad w(x,t)$ superpuestas.

Ejemplo 2

Consideramos la ecuación

$$w_{xx} + w_{tt} = 2e^{-1-x-t} \qquad \text{en} \quad (0,2)\times(0,\infty)$$

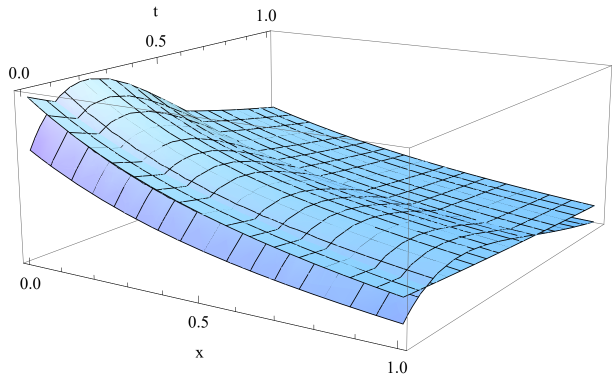

Figura 2: $p_6(x,t) \quad y \quad w(x,t)$.

Condiciones:

$$w(0,t) = e^{-1-t} \quad w(2,t) = e^{-3-t} \qquad w(x,0) = e^{-1-x}$$

La solución es : e^{-1-x-t}.

Para el primer paso se toman $n = 5$ momentos y se aproxima $-\sqrt{2}w_x(x,t) + 2w_t(x,t) = G(x,t)$ con exactitud

$$\int_0^2 \int_0^\infty (p_5(x,t) - G(x,t))^2 dtdx = 0{,}0121825$$

En este ejemplo tomamos $k = 2$, ya que de lo contrario $G(x,t) = 0$.
En la Figura 3 se muestran $p_5(x,t) \quad y \quad G(x,t)$ superpuestas.

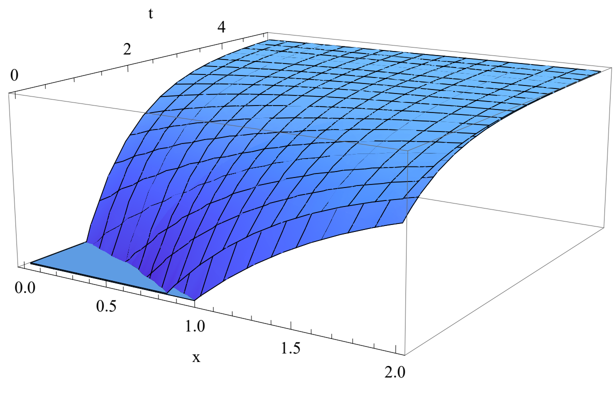

Figura 3: $p_5(x,t) \quad y \quad G(x,t)$.

Para el segundo paso se toma $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$. Además se consideran $n_1 = 3$ y $n_2 = 2$, o sea 6 momentos.
Se aproxima $w(x,t)$ con exactitud

$$\int_0^2 \int_0^\infty (p_6(x,t) - w(x,t))^2 dtdx = 0{,}0427058$$

En la Figura 4 se muestran $p_6(x,t) \quad y \quad w(x,t)$ superpuestas.

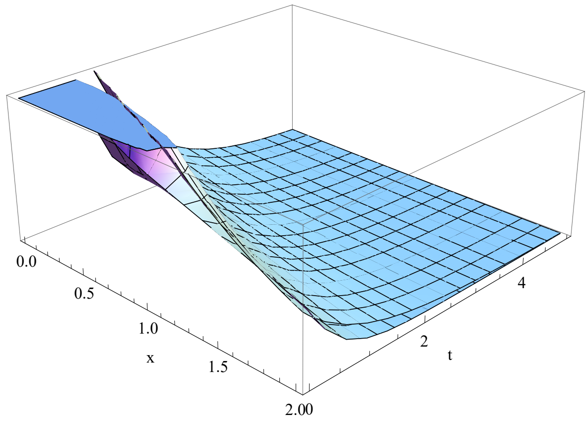

Figura 4: $p_6(x,t) \quad y \quad w(x,t)$.

5. CONCLUSIONES

Una ecuación en derivadas parciales de Poisson de la forma $w_{xx} + w_{tt} = f(x,t)$ donde la función desconocida $w(x,t)$ es definida en $E = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ ó $E = (a_1, b_1) \times (a_2, \infty)$ bajo las condiciones de Dirichlet puede ser resuelta numéricamente por aplicar técnicas de problema inverso de momentos en dos pasos:

1. primero consideramos la ecuación integral

$$\iint_E u(-\sqrt{k}w_x + kw_t)dA = \varphi_1(r)$$

   podemos resolverla numéricamente como un problema inverso de momentos, y obtenemos una solución aproximada para $-\sqrt{k}w_x(x,t) + kw_t(x,t)$.

2. como segundo paso consideramos la ecuación integral

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} K(m,r,x,t)w(x,t)dtdx = \varphi_2(m,r)$$

   y nuevamente puede ser resuelta numéricamente por aplicar técnicas de problema inverso de momentos, y obtenemos una solución aproximada para $w(x,t)$.

La función $f(x,t)$ no es usada en los cálculos, pero es implicitamente considerada en las condiciones de contorno.

6. REFERENCIAS

D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction, *Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag,Berlin, 2002*.

M. B. Pintarelli and F. Vericat, Stability theorem and inversion algorithm for a generalize moment problem, textitFar East Journal of Mathematical Sciences, pp. 253-274. 30, 2008

M.B. Pintarelli and F. Vericat, Bi-dimensional inverse moment problems,*Far East Journal of Mathematical Sciences, 54 (2011), 1-23*.

M.B.Pintarelli, Linear partial differential equations of first order as bi-dimensional inverse moment problem ,*Applied Mathematics, Vol. 6, Number 6, Pages 979-989 , 2015*.

M.B.Pintarelli, Parabolic partial differential equations as inverse moments problem ,*Applied Mathematics, Vol. 7, Number 1, Pages 77-99 , 2016*.

J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, The problem of Moments, *Mathematic Surveys, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1943*.

G. Talenti, Recovering a function from a finite number of moments, *Inverse Problems 3*, pp.501- 517, 1987.