

COMPARACION DE DIFERENTES MORFOLOGIAS DE PASTILLAS PIEZOELECTRICAS DE ORIGEN NACIONAL PARA LA COSECHA DE ENERGIA DE VIBRACIONES

COMPARISON OF DIFFERENT MORPHOLOGIES OF PIEZOELECTRIC CERAMICS FROM NATIONAL ORIGIN FOR VIBRATION ENERGY HARVESTING

Santiago Osinaga^a, Mariano Febbo^b, Sebastian P. Machado^a, Leandro A. Ramajo^c y
Miriam S. Castro^c

^aGrupo de Investigacion en Multifisica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional Facultad
Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina,
smachado@frbb.utn.edu.ar, <https://www.frbb.utn.edu.ar>

^bInstituto de Física del Sur (IFISUR), Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur (UNS),
Avda. Alem 1253, B8000CPB- Bahía Blanca, Argentina, mfebbo@uns.edu.ar;
<http://www.uns.edu.ar>

^cDivisión Cerámicos, INTEMA, CONICET-UNMdP, Avda. Juan B. Justo 4302, B7068FDQ Mar del
Plata, Buenos Aires, Argentina, <http://www.intema.gob.ar>

Palabras clave: Cosecha de energía, piezoelectricidad, comparación de morfologías

Resumen. La posibilidad de fabricar materiales piezoeléctricos libres de plomo de origen nacional, en reemplazo de los PZT comerciales (titanio zirconato de plomo) abre el interrogante sobre qué tipo de geometría favorece la generación de energía eléctrica. En este trabajo se pretende responder esta pregunta analizando dos morfologías diferentes: disco y placa rectangular (piezoeléctricos) adosados sobre vigas cantiléver de acero. La comparación se realiza mediante el cálculo del factor geométrico, expresado como el producto de los acoplamientos electromecánico y modal, a partir de una formulación analítica desarrollada por los autores anteriormente. La obtención de la forma modal, para el caso del disco adosado sobre la viga, fue provista mediante el software de elementos finitos *COMSOL Multiphysics*, ya que no existe para este caso solución analítica exacta. A partir de los resultados obtenidos se observó que, para placas y discos de igual volumen, la generación es máxima cuando el espesor de las placas cuadradas es la variable a ajustar.

Keywords: Energy harvesting, piezoelectricity, morphological comparison.

Abstract. The possibility of manufacturing lead-free piezoelectric materials, to replace PZT (lead zirconate titanate) question which type of geometry favours the electric power generation. In this work two different morphologies are studied: a disc and a rectangular plate attached to steel cantilever beams. Comparisons are made by means of the calculation of the geometric factor, expressed as the product of electromechanical and modal couplings, starting from an analytical model previously developed by the authors. The first mode shape for a disc attached to a rectangular steel beam was obtained using a finite element software known as *COMSOL Multiphysics*, since there is no analytical exact solution for this purpose. The obtained results showed that for same volume of plates and discs, it is better if the thickness of a plate is the variable to be adjusted.

1 INTRODUCCIÓN

La utilización de materiales piezoeléctricos en la recolección de energía de vibraciones para la alimentación de sistemas electrónicos de baja potencia ha capturado, en la última década, el interés de gran cantidad de investigadores (Roundy et al 2004, Anton et al 2007). Comparados con otros tipos de transductores (electrostáticos, electromagnéticos), los piezoeléctricos presentan ventajas en la generación de energía como un gran acoplamiento electromecánico, una mejor generación a bajas frecuencias y una significativa relación entre voltaje y densidad de potencia (Roundy et al 2002, Cook-Chennault et al 2008).

La mayoría de los dispositivos cosechadores de energía del tipo viga cantiléver, utilizan un material piezoeléctrico adosado a la misma. La deformación de la viga produce que el material piezoeléctrico se polarice y produzca una carga variable que es recolectada por una resistencia eléctrica en forma de corriente alterna (Ertuk et al 2008). La energía a recolectar excita el sistema mediante una excitación de base. Por medio de una correcta adecuación de la geometría de la viga junto con el piezoeléctrico se intenta que el sistema se encuentre en resonancia, donde las amplitudes de deformación, y por lo tanto la generación se verán maximizadas.

Por otra parte, la fabricación de pastillas piezoeléctricas como pueden ser los sistemas BNKT (Camargo et al. 2014) o BNT (Prado-Espinosa et al. 2017) de origen nacional abre la posibilidad de intervenir en el proceso de producción de las mismas con el objetivo de optimizar la potencia eléctrica generada. Inmediatamente, la inquietud que surge es cuál es la morfología adecuada que ofrezca los mejores resultados.

En este trabajo se pretende responder esta pregunta analizando dos morfologías diferentes: disco y placa rectangular (piezoeléctricos) adosados sobre vigas cantiléver de acero. El modelo matemático está basado en una formulación Bernoulli-Euler dado que la viga es delgada. La comparación se realiza mediante el cálculo del factor geométrico, expresado como el producto de los acoplamientos electromecánico y modal, a partir de una formulación analítica desarrollada por los autores anteriormente. La obtención de la forma modal, para el caso del disco adosado sobre la viga, fue provista mediante el software de elementos finitos *COMSOL Multiphysics*, ya que no existe para este caso solución analítica exacta. Para la placa, en cambio, la obtención del modo fue analítica.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: después de una primera sección introductoria, la segunda sección presenta la formulación matemática para la obtención de las ecuaciones de generación eléctrica en función de la frecuencia de excitación. La tercera sección detalla la obtención de las formas modales siguiendo una formulación analítica exacta y por elementos finitos según se trate de una placa o de un disco adosado a la viga cantilever respectivamente. En la cuarta sección se definen los factores geométricos que permitirán comparar un modelo con respecto al otro. Posteriormente, en la quinta sección, se comparan las geometrías adoptadas presentando el valor del factor geométrico obtenido en cada comparativa. Por último, los resultados y conclusiones se presentan en las secciones seis y siete, respectivamente.

2 FORMULACION MATEMATICA

En primer término se obtiene la expresión de voltaje en función de la frecuencia de excitación para un dispositivo como se muestra en la figura 1. La deducción de las expresiones se realiza siguiendo una formulación lagrangiana donde se plantea la energía cinética y potencial del sistema a partir de la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange y considerando el trabajo no conservativo de la resistencia eléctrica.

Se desarrollan dos modelos analíticos debido a que se estudian dos pastillas de geometrías

diferentes, disco y placa. La diferencia entre ambos modelos reside en la forma de obtener el modo de vibración para la definición del acoplamiento electromecánico. De esta manera, en un caso se utiliza una formulación analítica exacta y en otro caso se usa el método de elementos finitos para las funciones de forma.

Si bien la formulación analítica para este tipo de dispositivos puede encontrarse en trabajos anteriores de los autores (Machado et al 2015) se describirá brevemente su desarrollo a fin de poder resaltar la diferencia entre los factores geométricos para su comparación.

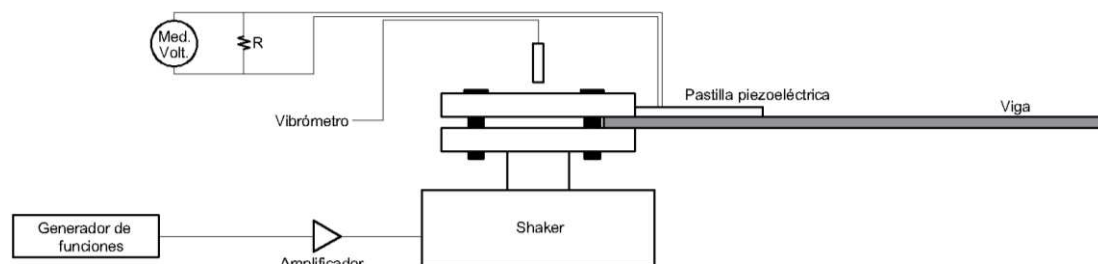


Figura 1. Configuración típica experimental

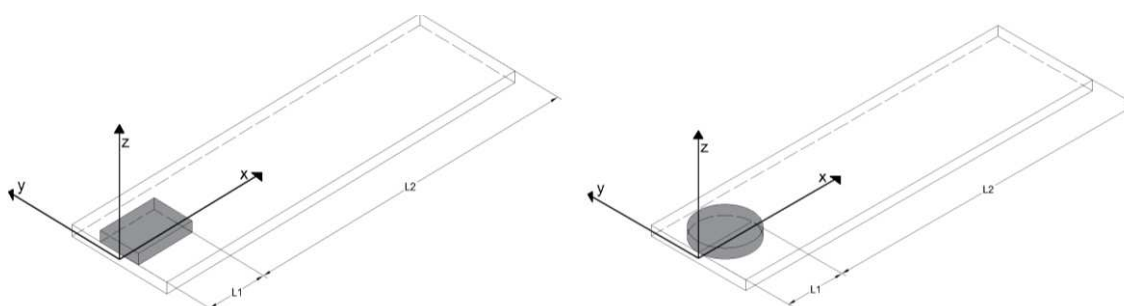


Figura 2. Esquema de los dispositivos a comparar. A la izquierda pastilla en forma de placa y a la derecha en forma de disco

2.1 Formulación analítica para una placa

La energía total almacenada por el piezoeléctrico puede ser expresada como:

$$U_p = \int_{V_p} H_p dV_p \quad (1)$$

Donde V_p es el volumen del piezoeléctrico y H_p representa la densidad de entalpia de acuerdo de acuerdo a la teoría de piezoelectricidad lineal (IEEE 1987), cuya expresión simplificada para vigas es:

$$H_p = \frac{1}{2} c_{11}^p S_1^2 - e_{31} S_1 E_3 - \frac{1}{2} \epsilon_{33} E_3^2 \quad (2)$$

Donde S_1 representa la deformación en la dirección 1, E_3 el campo eléctrico en la dirección 3 y c_{11}^p , e_{31} , ϵ_{33} constantes elásticas (módulo de Young), piezoeléctricas y de permitividad correspondientemente. Nótese que las direcciones 1, 2 y 3 resultan iguales a las x, y, z de la figura 2.

Adoptando la teoría de vigas de Bernoulli-Euler las hipótesis cinemáticas quedan expresadas en el vector de desplazamiento como:

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} & 0 & w(x,t) + g(t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Donde $g(t)$ corresponde a la excitación de base. Es posible asumir al campo de desplazamientos, acorde al método de separación de variables como:

$$w(x,t) = q(t)\phi(x) \quad (4)$$

Así, la deformación en la dirección 1 queda definida como:

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = -z q(t) \phi''(x) \quad (5)$$

Por lo que la ecuación (1) queda:

$$U_p = \int_{V_p} \frac{1}{2} c_{11}^p z^2 q^2(t) \phi''^2(x) + e_{31} z q(t) \phi''(x) E_3 - \frac{1}{2} \varepsilon_{33} E_3^2 dV_p \quad (6)$$

La posición de la fibra neutra puede ser definida, con el valor de a , siendo esta la distancia medida desde la unión de ambos materiales tal como se observa en la figura 3:

$$a = \frac{-b_p c_{11}^p h_p^2 + b_s c_{11}^s h_s^2}{2(b_p c_{11}^p h_p + b_s c_{11}^s h_s)} \quad (7)$$

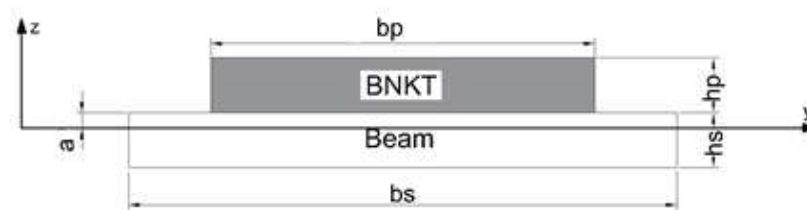


Figura 3. Vista transversal de la viga para una placa

Desarrollando la integral de la expresión (6) para una placa resulta:

$$U_p = \frac{1}{2} c_{11}^p q^2(t) \int_0^{L_1} \phi''^2(x) dx \int_{-\frac{b_p}{2}}^{\frac{b_p}{2}} dy \int_a^{a+h_p} z^2 dz + e_{31} q(t) E_3 \int_0^{2R} \phi''(x) dx \int_{-\frac{b_p}{2}}^{\frac{b_p}{2}} dy \int_a^{a+h_p} z dz \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon_{33} E_3^2 \int_0^{L_1} dx \int_{-\frac{b_p}{2}}^{\frac{b_p}{2}} dy \int_a^{a+h_p} dz$$

Se asume que el campo eléctrico en el piezoeléctrico es uniforme en las direcciones x e y por lo que:

$$E_3(t) = -\frac{v(t)}{h_p} \quad (9)$$

La energía almacenada por la subestructura, considerando que será únicamente producto de la deformación elástica, puede ser expresada como:

$$U_s = \int_{V_s} H_s dV_s = \int_{V_s} \frac{1}{2} c_{11}^s z^2 q^2(t) \phi'^2(x) dV_s \quad (10)$$

Resolviendo la expresión (10) para una placa:

$$U_s = \frac{1}{2} c_{11}^s q^2 \int_0^{L_1} \phi'^2(x) dx \int_{-\frac{b_s}{2}}^{\frac{b_s}{2}} dy \int_{a-h_s}^a z^2 dz + \frac{1}{2} c_{11}^s q^2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi'^2(x) dx \int_{-b_s/2}^{b_s/2} dy \int_{-h_s/2}^{hs/2} z^2 dz \quad (11)$$

La energía cinética de la pastilla piezoeléctrica puede ser escrita como:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dV_p \quad (12)$$

Lo cual da:

$$T_p = \frac{1}{2} \rho_p \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dx \int_{-b_p/2}^{b_p/2} dy \int_a^{a+h_p} dz \quad (13)$$

La energía cinética de la estructura será:

$$T_s = \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dV_s \quad (14)$$

Y resolviendo para una placa:

$$T_s = \frac{1}{2} \rho_s \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dx \int_{-\frac{b_s}{2}}^{\frac{b_s}{2}} dy \int_{a-h_s}^a z^2 dz + \frac{1}{2} \rho_s \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dx \int_{-b_s/2}^{b_s/2} dy \int_{-h_s/2}^{hs/2} z^2 dz \quad (15)$$

Una vez definidas las energías cinéticas e internas de cada elemento puede obtenerse el *lagrangiano* a partir de las expresiones (8), (11), (13) y (15) como: $L = T_p + T_s - U_p - U_s$. Ahora, las ecuaciones de *Euler-Lagrange* (16) pueden ser resueltas tanto para el voltaje como para el desplazamiento si adicionalmente se considera el trabajo no conservativo de las cargas eléctricas $W_e = q_e(t)v(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial W_e}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\partial W_e}{\partial v} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Las cuales resolviendo se obtienen el par de ecuaciones diferenciales del problema:

$$\begin{aligned} m_q \ddot{q} + \xi_j \dot{q} + k_{sp} q - \theta_{p,j} \ddot{v} &= -T_{p,j} \ddot{g} \\ C_p \dot{v} + \theta_{p,j} \dot{q} + \frac{v}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Donde R es la resistencia de la carga, C_p la capacidad del piezoeléctrico, ξ_j el amortiguamiento modal asociado y $\theta_{p,j}$, $T_{p,j}$ son los llamados acoplamientos electromecánico y modal respectivamente. Los sufijos “ p ” indican que fueron obtenidos considerando una geometría rectangular y los sufijos “ j ” indican que están calculados para el modo j -ésimo. Las constantes pueden ser obtenidas de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\theta_{p,j} = e_{31} \frac{b_p \left(a h_p + \frac{h_p^2}{2} \right)}{h_p} \frac{d\phi_j}{dx} (L_1) \quad (18)$$

$$T_{p,j} = \rho_p h_p h_p \int_0^{L_1} \phi_j(x) dx + \rho_s h_s b_s \int_0^{L_1+L_2} \phi_j(x) dx \quad (19)$$

$$m_q = \rho_p h_p h_p \int_0^{L_1} \phi_j^2(x) dx + \rho_s h_s b_s \int_0^{L_1+L_2} \phi_j^2(x) dx = 1 \quad (20)$$

$$k_{sp} = c_{11}^p \left(a h_p + \frac{h_p^2}{2} \right) \int_0^{L_1} \phi_j''(x) dx + c_{11}^s b_p h_s \int_0^{L_1+L_2} \phi_j''(x) dx \quad (21)$$

A partir del método del balance armónico, que consiste en proponer una dependencia armónica de las variables de la forma: $q(t) = \bar{q} e^{i\Omega t}$ y $v(t) = \bar{v} e^{i\Omega t}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{|V|}{g} = \frac{T_{p,j} \theta_{p,j} R \omega}{\sqrt{\left(\omega_i^2 - \omega^2 - 2C_p R \xi_j \omega_i \omega^2 \right)^2 + \left(2\omega_i \xi_j \omega + R \omega \left(\theta_{p,j}^2 + C_p \omega_i^2 - C_p \omega^2 \right) \right)^2}} \quad (22)$$

Donde V es el voltaje en la carga, g es la aceleración de la gravedad, ω la frecuencia fundamental y ω_i la frecuencia de excitación. Resta ahora calcular la forma del modo de vibración la cual afecta a las constantes asociadas a cada modo $T_{p,j}$ y $\theta_{p,j}$. Vale aclarar que la expresión (22) tiene unidades de volts sobre “ g ” ($g=9.8 \text{ m/s}^2$, aceleración de la gravedad) y nos dice la cantidad de voltios generados cuando al sistema se lo somete a una aceleración en la base de amplitud igual g .

2.2 Formulación analítica para un disco

El procedimiento a emplear es similar al expuesto en 2.1. Las energías cinéticas e internas del piezoeléctrico deben ser obtenidas a partir de las expresiones (6), (10), (12) y (14) considerando la nueva geometría.

La figura 4 muestra una vista superior del dispositivo. Resulta necesario expresar el ancho de la pastilla b_p como una función de la coordenada espacial x :

$$b_p(x) = 2\sqrt{R^2 - (x - R)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{L_1}{2} - R\right)^2} \quad (23)$$

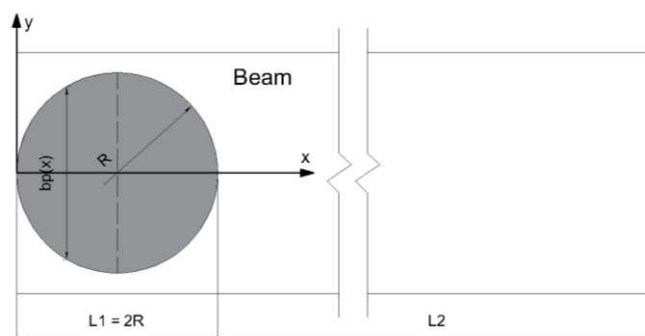


Figura 4. Vista superior del dispositivo para una viga

A diferencia de la expresión (7), la posición de la fibra neutra será una función de x en la longitud de la pastilla producto de que b_p lo es, de forma que:

$$a(x) = \frac{-b_p(x)c_{11}^p h_p^2 + b_s c_{11}^s h_s^2}{2(b_p(x)c_{11}^p h_p + b_s c_{11}^s h_s)} \quad (24)$$

Resolviendo (6), (10), (12) y (14) pero ahora considerando (23) y (24) se llega a:

$$U_p = \frac{1}{2} c_{11}^p q^2(t) \int_0^{2R} \phi''^2(x) dx \int_{-\sqrt{R^2-(x-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(x-R)^2}} dy \int_{a(x)}^{a(x)+h_p} z^2 dz + e_{31} q(t) E_3 \int_0^{2R} \phi''(x) dx \int_{-\sqrt{R^2-(x-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(x-R)^2}} dy \int_{a(x)}^{a(x)+h_p} z dz + \frac{1}{2} \varepsilon_{33} E_3^2 \int_0^{2R} dx \int_{-\sqrt{R^2-(x-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(x-R)^2}} dy \int_{a(x)}^{a(x)+h_p} dz \quad (25)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \rho_p \int_0^{2R} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dx \int_{-\sqrt{R^2-(x-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(x-R)^2}} dy \int_{a(x)}^{a(x)+h_p} dz \quad (26)$$

$$U_s = \frac{1}{2} c_{11}^s q^2 \int_0^{L_1} \phi''^2(x) dx \int_{-\frac{b_s}{2}}^{\frac{b_s}{2}} dy \int_{-(h_s-a(x))}^{a(x)} z^2 dz + \frac{1}{2} c_{11}^s q^2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi''^2(x) dx \int_{-b_s/2}^{b_s/2} dy \int_{-h_s/2}^{h_s/2} z^2 dz \quad (27)$$

$$T_s = \frac{1}{2} \rho_s \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dx \int_{-\frac{b_s}{2}}^{\frac{b_s}{2}} dy \int_{-(h_s-a(x))}^{a(x)} z^2 dz + \frac{1}{2} \rho_s \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + g(t) \right)^2 dx \int_{-b_s/2}^{b_s/2} dy \int_{-h_s/2}^{h_s/2} z^2 dz \quad (28)$$

Las expresiones (25), (26), (27) y (28) permiten obtener el *lagrangiano* como: $L = T_p + T_s - U_p - U_s$. Aplicando las mismas expresiones de *Euler-Lagrange* expuestas en (16) el siguiente par de ecuaciones diferenciales puede ser obtenido:

$$m_q \ddot{q} + \xi_j \dot{q} + k_{sp} q - \theta_{d,j} \ddot{v} = -T_{d,j} \ddot{q} \quad (29)$$

$$C_p \dot{v} + \theta_{d,j} \dot{q} + \frac{v}{R} = 0$$

Donde ahora los acoplamientos modales y electromecánicos resultan:

$$\theta_{d,j} = e_{31} \int_0^{2R} (2a(x) + h_p) \sqrt{R^2 - (x-R)^2} \phi_j^*(x) dx \quad (30)$$

$$T_{d,j} = \rho_p h_p \int_0^{2R} 2\sqrt{R^2 - (x-R)^2} \phi_j(x) dx + \rho_s h_s b_s \int_0^L \phi_j(x) dx \quad (31)$$

$$m_q = \rho_p h_p \int_0^{2R} 2\sqrt{R^2 - (x-R)^2} \phi_j^2(x) dx + \rho_s h_s b_s \int_0^L \phi_j^2(x) dx = 1 \quad (32)$$

$$k_{sp} = c_{11}^s \frac{b_s h_s}{3} \int_0^{L_1} (3a^2(x) - 3a(x)h_s + h_s) \phi_j^{*2}(x) dx + c_{11}^s I_s \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_j^{*2}(x) dx \quad (33)$$

Aplicando nuevamente la técnica de balance armónico a (29) se llega a la expresión de voltaje como:

$$\frac{|V|}{g} = \frac{T_{d,j} \theta_{d,j} R \omega}{\sqrt{\left(\omega_i^2 - \omega^2 - 2C_p R \xi_j \omega_i \omega^2 \right)^2 + \left(2\omega_i \xi_j \omega + R \omega \left(\theta_{d,j}^2 + C_p \omega_i^2 - C_p \omega^2 \right) \right)^2}} \quad (34)$$

Debe notarse que las expresiones (22) y (34) resultan similares, difiriendo solo en las definiciones del acoplamiento electromecánicos y modales.

3 FORMA MODAL

3.1 Forma modal para una placa

La obtención de la forma modal de la viga es obtenida siguiendo la *teoría de Bernoulli-Euler* donde los efectos de la inercia rotacional y la deformación por tensiones de corte son despreciados (Rao 2013).

La viga tal como se observa en el lado izquierdo de la figura 1 posee dos tramos. La ecuación de movimiento de la viga, puede ser obtenida aplicando la segunda Ley de Newton de forma que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k_i(x) \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial x^2} \right) = -m_i(x) \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial t^2} \quad (35)$$

Donde $k_i(x)$ es la función de rigidez flexional de la sección y $m_i(x)$ la función de masa por unidad de longitud del tramo i . Considerando que la viga posee sección constante a lo largo de la dirección x la ecuación (35) puede ser reescrita como:

$$k_i \frac{\partial^4 w_i(x,t)}{\partial x^4} = -m_i \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial t^2} \quad (36)$$

Donde $m_1 = h_p b_p \rho_p + b_s h_s \rho_s$ y $k_1 = \frac{1}{12} b_s E_s h_s^3 + 2b_p E_p \left(\frac{h_p^3}{3} + \frac{h_p^2 h_s}{2} + \frac{h_p h_s^2}{4} \right)$

La resolución de la ecuación diferencial anterior para vigas a tramos es ampliamente conocida mediante la aplicación de la técnica de separación de variables como $w(x,t) = q(t)\phi(x)$ donde, junto con las condiciones de borde se llega a un problema de autovalores (frecuencias naturales) y autovectores (formas modales). El modo total de la viga puede ser expresado como:

$$\phi_j(x) = \sum_{k=1}^2 \phi_{j,k}(x) H_k(x) \quad (37)$$

Donde $H_k(x)$ representa la *función de Heaviside* para denotar la unión de los modos en $x = L_1$. Siendo:

$$\phi_{j,k} = C_1 \text{sen}(\beta_{j,k} x) + C_2 \text{cos}(\beta_{j,k} x) + C_3 \text{senh}(\beta_{j,k} x) + C_4 \text{cosh}(\beta_{j,k} x) \quad (38)$$

Dónde:

$$\beta_{j,k}^4 = \frac{\omega_j m_k}{k_k} \quad (39)$$

3.2 Forma modal para un disco

Para este caso la obtención del modo no puede ser obtenida mediante una formulación analítica exacta por lo que se obtiene a partir de elementos finitos. Para ello se utilizó el software *COMSOL Multiphysics 5.2* tal como lo muestra la figura 5.

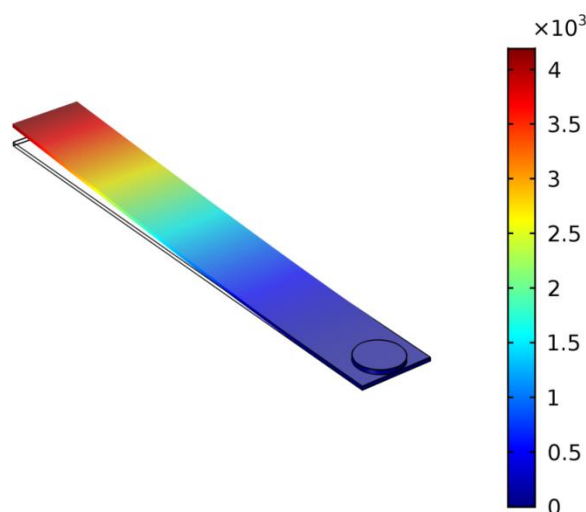


Figura 5. Primer modo de vibración obtenido en COMSOL.

La forma del modo fue exportada al programa *MatLab* donde, mediante la utilización del toolbox *Curve Fitting* se obtuvo la función analítica del modo proponiendo la misma forma modal que la expresión (38), donde para el primer tramo se propone la siguiente aproximación del autovalor:

$$\beta_{j,1}^4 = \frac{\omega_j^2 \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \rho_1 A_1(x) dx}{\frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} E_1 I_1(x) dx} \quad (40)$$

$$\beta_{j,2} = \sqrt[4]{\frac{\omega_j^2 m_s}{k_2}}$$

La aplicación de la ecuación (38) para cada uno de los tramos da un total de 10 constantes a ajustar en un primer comienzo. La consideración de los autovalores propuestos en (40) más las condiciones de borde en el empotramiento y en el extremo libre reducen a cuatro (dos para cada tramo) las constantes a obtener por ajuste de mínimos cuadrados.

4 FACTORES GEOMETRICOS

4.1 Factor geométrico de la placa

De la ecuación (22) se puede observar que existe una proporcionalidad entre la generación de voltaje y los acoplamientos para una misma frecuencia ω (suponiendo a C_p , R , ξ_j constantes) de forma que se puede establecer que:

$$\frac{V}{g} \sim \theta_p \Gamma_p \quad (41)$$

También el coeficiente piezoeléctrico e_{31} es una constante, independiente de la geometría, dado que depende de constantes mecánicas y eléctricas. Por lo tanto, es posible proponer un factor geométrico de la placa al producto de los acoplamientos dividido el e_{31} de forma que:

$$f_{gp} = \frac{\theta_p \Gamma_p}{e_{31}} = \left[\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \phi_{j,1}(x) dx + \rho_2 A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_{j,2}(x) dx \right] \frac{b_p \left(a h_p + \frac{h_p^2}{2} \right)}{h_p} \frac{d\phi_{j,1}}{dx}(L_1) \quad (42)$$

donde f_{gp} depende únicamente del modo (por ende de la geometría del sistema) y de constantes mecánicas tanto del piezoelectrico como de la viga cantiléver pero no así de las constantes piezoelectricas y/o dieléctricas.

4.2 Factor geométrico del disco

Al igual que con la placa, observando la ecuación (34) se puede establecer la misma proporcionalidad entre la generación y los acoplamientos electromecánicos y modales. Procediendo de forma análoga puede nombrarse un *factor geométrico del disco* dependiente solo del modo y de las constantes mecánicas del sistema de forma que:

$$f_{gd} = \frac{\theta_d \Gamma_d}{e_{31}} = \left[\rho_p h_p \int_0^{L_1} b_p(x) \phi_{j,1}(x) dx + \rho_s A_s \int_0^{L_1} \phi_{j,1}(x) dx + \rho_s A_s \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_{j,2}(x) dx \right] \int_0^{L_1} (2a(x) + h_p) \frac{b_p(x)}{2} \frac{d^2 \phi_{j,1}}{dx^2} dx \quad (43)$$

5 COMPARATIVAS

Los factores geométricos, tales como se expresaron anteriormente, dependen claramente del tamaño de la pastilla o del disco. Es por eso que, a la hora de comparar una geometría con la otra, resulta clave elegir las dimensiones adecuadas para los piezoelectricos de forma que posean el mismo volumen.

Esto último implica que para un determinado disco de diámetro d_p y espesor h_p se puede dimensionar la placa considerando tres casos posibles :

5.1 Ajustando ancho

Asumiendo que el largo de la pastilla coincide con el diámetro del disco, y que los espesores son idénticos, el ancho de la placa que produciría un volumen igual entre ambos discos será:

$$b_p = \frac{L_1 \pi}{4} = \frac{d_p \pi}{4} \quad (44)$$

5.2 Ajustando espesor

Por otro lado, asumiendo una pastilla cuadrada $b_p L_1 = d_p^2$ (pastilla cuadrada) el espesor resulta:

$$h_{p_{placa}} = \frac{\pi}{4} h_{p_{disco}} \quad (45)$$

5.3 Ajustando largo

Realizando el mismo procedimiento de igualar (44) y (45) y asumiendo ahora que: $d_p = b_p$

y que los espesores son iguales en ambos casos, el largo de la placa resulta:

$$L_1 = \frac{\pi}{4} d_p \quad (46)$$

6 RESULTADOS

En función de los casos a analizar, se adopta una geometría para el sistema que cumpla las siguientes cualidades: las dimensiones de la viga cantiléver son idénticas en cada una de las cuatro configuraciones y los volúmenes de los piezoeléctricos son iguales. La tabla 1 muestra las geometrías comparadas.

	Viga de acero					Cerámica piezoeléctrica				
	Base (bs) (mm)	Largo (L1+L2)	Espesor (hs)	Módulo de elasticidad (MPa)	Densidad (kg/cm ³)	Base (bp)	Largo (L1)	Espesor (hp)	Módulo de elasticidad (MPa)	Densidad (kg/cm ³)
Disco	20	120	1	200	7900	Diámetro=15		0,5	92	7900
Ajustando ancho	20	120	1	200	7900	11,78	15	0,5	92	7900
Ajustando espesor	20	120	1	200	7900	15	15	0,3926	92	7900
Ajustando largo	20	120	1	200	7900	15	11,78	0,5	92	7900

Tabla 1. Dimensiones geométricas comparadas

Los valores de los factores obtenidos para las geometrías comentadas anteriormente se muestran en la tabla 2. En dicha Tabla se muestran los valores obtenidos por la expresión (42) para la placa y la expresión (43) para el disco. De esta manera, se observa que el mayor valor de factor geométrico corresponde a la placa cuadrada, donde se modifica el espesor para obtener el mismo volumen que el disco piezoeléctrico. Por otro lado, el disco presenta mayor factor geométrico que la placa cuando se ajusta el ancho o el largo de la misma.

	Factor geométrico*10 ⁵	
Disco	2.7893	2do
Placa – ajuste ancho	2.6727	3ro
Placa – ajuste espesor	3.3302	1ro
Placa – ajustando largo	2.3365	4to

Tabla 2. Factores geométricos obtenidos para los valores de la tabla 1.

7 CONCLUSIONES

1. La obtención del modo de vibración a partir de una formulación de elementos finitos en el disco, cuya solución analítica exacta no existe, es válida para considerar los efectos que produce la geometría en la generación de energía a través del cálculo del factor geométrico. A su vez, el ajuste ofrece mejores resultados si se realiza considerando los dos tramos y las relaciones algebraicas entre las constantes de integración que se deben satisfacer por las condiciones de borde del problema.
2. La comparación entre la geometría de placa y de disco, teniendo la restricción de volumen constante, arroja los siguientes resultados:
 - a. Para una placa cuadrada cuyo ancho es igual al diámetro del disco, pero

cuyo espesor es menor, el factor geométrico es más grande en la placa respecto del disco.

- b. Para una placa rectangular cuyo largo es igual al diámetro del disco, y cuyos espesores son idénticos, el factor geométrico es más grande en el disco respecto a la placa.

AGREDECIMIENTOS

Los autores agradecen al CONICET, Secretaria de Ciencia y Tecnología UNS, Agencia Nacional de Promoción Científica y Técnica (PICT-2013-N° 2065), Secretaria de Ciencia y Tecnología UTN FRBB y UNMdP.

REFERENCIAS

- Steven R Anton and Henry A Sodano. A review of power harvesting using piezoelectric materials. *Smart materials and structures*. 2007
- Camargo, J., Ramajo, L., Rubio-Marcos, F., Castro, M. Ferroelectric properties of $\text{Bi}_{0.5}(\text{Na}_{0.8}\text{K}_{0.2})_{0.5}\text{TiO}_3$ ceramics *Advanced Materials Research* 2014
- Cook-Chennault, K.A., Thambi, N., and Sastry, A.M. (2008) Powering MEMS portable devices – a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with emphasis on piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Materials and Structures*, **17**, 043001.
- A. Erturk, D. J. Inman. A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2008
- IEEE Standard on Piezoelectricity. 1987
- Prado-Espinosa, A., Camargo, J., Ramajo, L., Castro, M. Improvement on dielectric and microstructural properties of lead free $\text{Bi}_{0.5}\text{Na}_{0.5}\text{TiO}_3$ ceramics through processing conditions. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*. 2017
- Shad Roundy, Paul K. Wright, Jan Rabaey. A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes. *Computer Communications*. *Computer Communications* 26 1131–1144. 2003
- S Roundy and P KWright. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. *Smart Mater. Struct.* 13 1131–1142. 2004
- Machado SP, Febbo M, Rubio-Marcos F, Ramajo LA, Castro MS. Evaluation of the performance of a lead-free piezoelectric material for energy harvesting. *Smart Mater. Struct* 24, 115011 (8pp), 2015
- Rao Singiresu S. *Vibration of continuous system*. Wiley India Edition., 2013