

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA VIGA EMPRESILLADA STIFFNESS MATRIX OF A BATTENED BEAM

Claudio E. Jouglard y Uri Peker

Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, Mozart 2300, Buenos Aires, Argentina, claudio.jouglard@frba.utn.edu.ar

Palabras clave: Vigas en Celosía, Aproximación Analítica, Elementos Finitos.

Resumen. El uso de vigas en celosía o con presillas se encuentra muy difundido entre las estructuras metálicas para cubrir grandes luces. En general, estas vigas compuestas por una gran cantidad de barras se modelan por elementos finitos considerando cada barra de manera individual lo que lleva a resolver sistemas con un gran número de ecuaciones. A los efectos de predimensionamiento o para verificaciones sencillas es conveniente contar con una solución analítica simplificada que permita tratar a la viga como una viga maciza equivalente. Para ello adoptamos las hipótesis de una gran cantidad de presillas y es posible encontrar mediante cálculo variacional una formulación continua para la deformada de la viga. El objetivo de este trabajo es presentar la matriz de rigidez para un elemento finito de viga empresillada. Este elemento puede incorporarse en un programa de elementos finitos y también puede utilizarse para obtener soluciones aproximadas en pórticos. Se presentan resultados comparando con el modelado completo por elementos finitos que muestran una excelente aproximación.

Keywords: Lattice Beams, Analytical Approximation, Finite Elements

Abstract. The use of lattice or batted beams is very extended in steel structures to cover large spaces. In general, these beams are composed by a large number of bars that are modelled by finite elements which give systems with a large number of equations. In the previous stages of design or to do simple verifications is convenient to have a simplified analytical solution to assimilate the lattice beam to an equivalent solid beam. To do this we assume a large number of a repeated pattern of bars and using variational calculus it is possible to find a continuous formulation for the displacements of the beam. The purpose of this work is to obtain the stiffness matrix for a batted beam. These finite element can be used to be incorporated into a finite element program and also to obtain approximate solutions in frames. Results are shown and comparisons are made with the finite element solution that show a very good approximation.

1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras en celosía (conocidas en inglés como *lattice structures*) tienen gran aplicación entre las estructuras metálicas para cubrir grandes luces sin apoyos intermedios. Además su bajo peso y facilidad de plegado y montaje las hace ideales para aplicaciones aeroespaciales lo que intensificó su estudio en este área a partir de 1970 (Noor, 1988). También se utilizan en estructuras de soporte de antenas (Guzmán, 2014; Martín, 2017) y actualmente en el diseño de nuevos materiales (Helou y Kara, 2018) cuya microestructura exhibe un patrón repetitivo de barras interconectadas.

En líneas generales (Noor, 1988) existen cuatro métodos para analizar estructuras en celosía: 1) método directo, 2) métodos de campo discreto, 3) métodos de estructuras periódicas y 4) analogía de medio continuo. En el método directo la estructura es analizada por elementos finitos y se modela cada barra individualmente. En los métodos de campo discreto se asume que la estructura tiene una cierta regularidad y se plantean ecuaciones de equilibrio o energía en un nodo típico de la viga mediante diferencias finitas o usando series de Taylor para llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales. En los métodos de estructuras periódicas se combinan elementos finitos con matrices de transferencia para reducir los grados de libertad involucrados aunque la solución es puramente numéricamente. Finalmente usando la analogía del medio continuo se reemplaza por un modelo continuo equivalente. Entre las referencias locales podemos mencionar a (Maurizi et al., 2004; Filipich y Bambill, 2003; Filipich et al., 2010; Guzmán et al., 2019; Guzmán, 2014; Martín, 2017), donde se analizan varias estructuras en celosía, en particular, aplicadas a mástiles de antenas.

La idea del presente trabajo consiste en analizar un modelo aproximado de una viga empresillada, quizás el modelo más simple de viga en celosía, y deducir su matriz de rigidez. Se utilizará un método de campo discreto obteniendo ecuaciones diferenciales equivalentes. El objetivo a futuro es poder resolver estructuras más complejas con un número mínimo de grados de libertad de manera de poder analizar y verificar de manera sencilla diferentes alternativas de diseño. Se comparan los resultados con los exactos obtenidos por el método directo usando elementos finitos.

2. MODELO ANALIZADO

Consideremos una viga compuesta empresillada compuesta por dos barras longitudinales (largueros) de longitud L y presillas verticales de altura h separadas uniformemente una distancia d (figuras 1 y 2).

Definimos un sistema de coordenadas local x, y con origen a mitad de la altura y sobre el borde izquierdo como se muestra en la figura 1.

Sobre el larguero superior actúa una carga transversal $q_s(x)$ y una longitudinal $p_s(x)$ y sobre el larguero inferior una carga transversal $q_i(x)$ y una longitudinal $p_i(x)$.

Asumiremos que los únicos elementos que pueden estar cargados son los largueros con carga transversal $q_s(x)$ y longitudinal $p_s(x)$ para el larguero superior y carga transversal $q_i(x)$ y longitudinal $p_i(x)$ para el larguero inferior.

Además, consideramos que los dos largueros son iguales y tienen área A_l e inercia J_l . Las presillas tienen área A_p e inercia J_p y todas las piezas son del mismo material con módulo de elasticidad E .

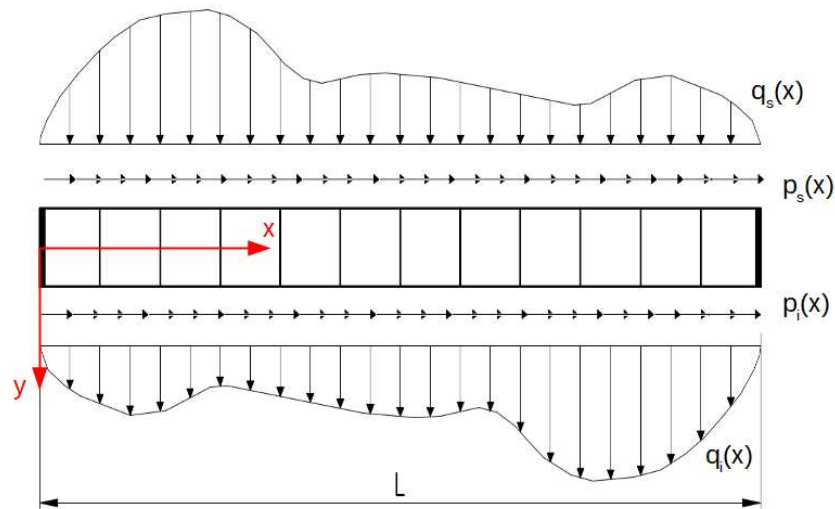


Figura 1: Modelo de viga empresillada.

2.1. Desplazamientos nodales

Las uniones se asumen rígidas y por lo tanto durante la deformación los nodos de la viga se desplazan como cuerpo rígido con traslaciones u, v según x, y y sufren una rotación θ en el plano.

Llamaremos $u_{sk}, v_{sk}, \theta_{sk}$ a los desplazamientos nodales del nodo k del larguero superior y $u_{ik}, v_{ik}, \theta_{ik}$ para el nodo k del larguero inferior.

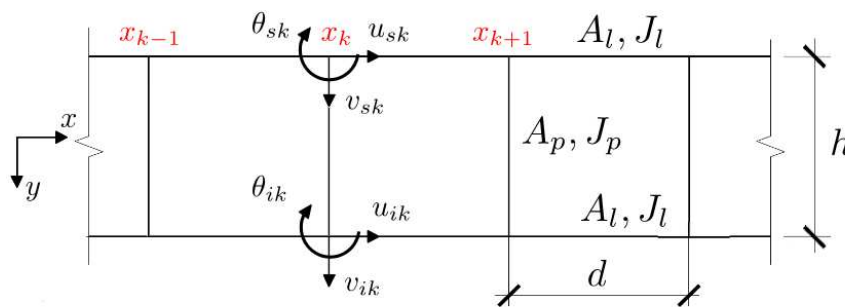


Figura 2: Sector de viga empresillada.

Notemos que si conocemos todos los desplazamientos nodales podemos conocer el estado tensional de cada barra de la viga empresillada.

Si las presillas son suficientemente rígidas se puede producir un efecto de deformación por distorsión, como se muestra en la figura 3. Este efecto es equivalente al de deformación por corte en vigas macizas y se manifiesta por la aparición de una rotación adicional por corte.

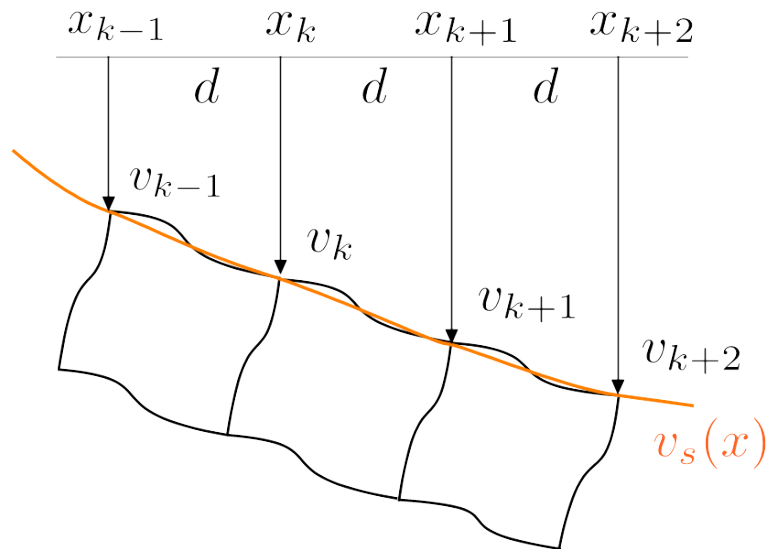


Figura 3: Efecto de distorsión.

Si analizamos el giro en un nodo deformado del larguero superior podemos distinguir tres ángulos (figura 4): 1) θ_s que es el giro efectivo del nodo, 2) ϕ_s que es giro por desplazamiento transversal y 3) ψ_s que es el giro por distorsión.

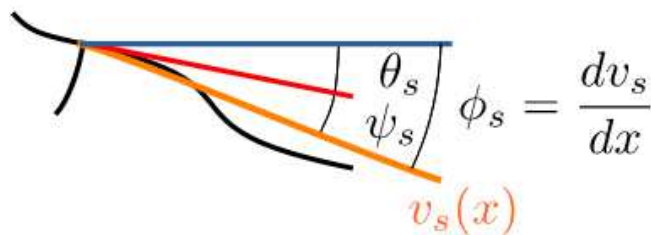


Figura 4: Giro de los nodos.

El ángulo θ_s representa el giro efectivo que tuvo el nodo y por ende cualquier sección vinculada al nodo. El ángulo ϕ_s es el ángulo producido por los desplazamientos transversales $v_s(x)$ que para desplazamientos pequeños se puede asimilar a la pendiente resultando

$$\phi_s = \frac{dv_s}{dx} \quad (1)$$

El ángulo de distorsión ψ_s sería equivalente a la distorsión por corte en una viga maciza y se obtiene por diferencia.

$$\psi_s = \frac{dv_s}{dx} - \theta_s \quad (2)$$

En este trabajo consideraremos sólo el aporte de la deformación por flexión global, esto es, despreciamos la distorsión por corte asumiendo que $\psi_s = 0$ y se verifica

$$\theta_s \approx \frac{dv_s}{dx} \quad (3)$$

2.2. Esfuerzos y desplazamientos en extremos

Asumimos que los bordes de la viga son rígidos y no se deforman. Bajo estas condiciones cada extremo solo puede moverse como cuerpo rígido con dos traslaciones y una rotación que referiremos al punto medio de cada extremo. Llamaremos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ a la traslación según x , traslación según y y rotación del extremo izquierdo, respectivamente, y $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ a los desplazamientos generalizados correspondientes del extremo derecho.

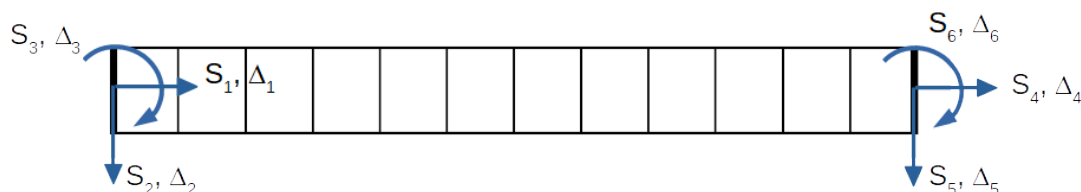


Figura 5: Esfuerzos y desplazamientos en extremos

En cada extremo podemos relacionar los desplazamientos generalizados Δ_i con los desplazamientos en extremos de los largueros.

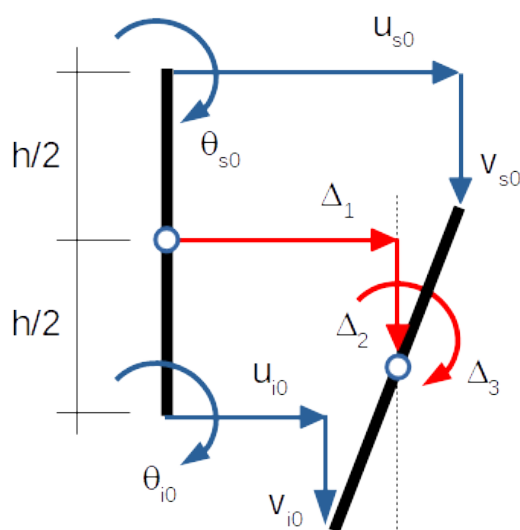


Figura 6: Relaciones de desplazamientos en extremos

Asumiendo que las rotaciones generalizadas Δ_3, Δ_6 sean muy pequeñas, podemos establecer las siguientes relaciones para los desplazamientos en el extremo derecho ($x = 0$) (ver figura 6)

$$\begin{aligned}
 u_{s0} &= \Delta_1 + \Delta_3 \frac{h}{2} & u_{i0} &= \Delta_1 - \Delta_3 \frac{h}{2} \\
 v_{s0} &= \Delta_2 & v_{i0} &= \Delta_2 \\
 v'_{s0} &= \Delta_3 & v'_{i0} &= \Delta_3
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

y para los desplazamientos en el extremo izquierdo ($x = L$)

$$\begin{aligned} u_{sL} &= \Delta_4 + \Delta_6 \frac{h}{2} & u_{iL} &= \Delta_4 - \Delta_6 \frac{h}{2} \\ v_{sL} &= \Delta_5 & v_{iL} &= \Delta_5 \\ v'_{sL} &= \Delta_6 & v'_{iL} &= \Delta_6 \end{aligned} \quad (5)$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CONDICIONES DE CONTORNO

Para obtener las ecuaciones diferenciales aplicaremos cálculo de variaciones planteando la minimización de la energía potencial total del sistema. Los detalles se pueden encontrar en la referencia (Jouglard y Peker, 2019).

Del cálculo variacional resultan las siguientes ecuaciones diferenciales

$$E_l A_l (-u_1'') = p_1 \quad (6a)$$

$$u_2 = \frac{dh^3}{24E_p J_p} \left(p_2 + \frac{E_l A_l dh^2}{12E_p J_p} q_1' \right) + \frac{h}{2} v_1' + \frac{E_l A_l dh^3}{24E_p J_p} \left(\frac{h}{2} v_1''' - \frac{E_l J_l dh^2}{12E_p J_p} v_1'''' \right) \quad (6b)$$

$$v_1'''' - \left(\frac{6E_p J_p}{E_l J_l dh} + \frac{24E_p J_p}{E_l A_l dh^3} \right) v_1'''' = \frac{12E_p J_p}{E_l A_l E_l J_l dh^2} p_2' + \frac{1}{E_l J_l} q_1'' - \frac{24E_p J_p}{E_l A_l E_l J_l dh^3} q_1 \quad (6c)$$

$$\frac{2E_p A_p}{dh} v_2 - \frac{2E_p J_p}{dh} v_2'' + E_l J_l v_2'''' = q_2 \quad (6d)$$

Donde hemos definido las variables auxiliares u_1, v_1, u_2, v_2 como:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_s + u_i & u_2 &= u_s - u_i \\ v_1 &= v_s + v_i & v_2 &= v_s - v_i \end{aligned} \quad (7)$$

Y hemos definido las cargas auxiliares p_1, q_1, p_2, q_2 como

$$\begin{aligned} p_1 &= p_s + p_i & p_2 &= p_s - p_i \\ q_1 &= q_s + q_i & q_2 &= q_s - q_i \end{aligned} \quad (8)$$

Además los esfuerzos generalizados en los extremos se pueden escribir como

$$\begin{aligned} S_1 &= -E_l A_l u'_{10} & S_4 &= E_l A_l u'_{1L} \\ S_2 &= E_l J_l v'''_{10} & S_5 &= -E_l J_l v'''_{1L} \\ S_3 &= -\frac{E_l A_l h}{2} u'_{20} - E_l J_l v''_{10} & S_6 &= \frac{E_l A_l h}{2} u'_{2L} + E_l J_l v''_{1L} \end{aligned} \quad (9)$$

4. MATRIZ DE RIGIDEZ

La matriz de rigidez relaciona los esfuerzos generalizados en extremos S_i con los desplazamientos generalizados Δ_i .

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Delta} \quad (10)$$

Donde \mathbf{S} es el vector de esfuerzos nodales

$$\mathbf{S}^T = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6\}^T \quad (11)$$

y Δ es el vector de desplazamientos nodales

$$\Delta^T = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \ \Delta_4 \ \Delta_5 \ \Delta_6\}^T \quad (12)$$

Luego debemos encontrar los esfuerzos S_i para desplazamientos especificados Δ_i y cargas aplicadas nulas. Para ello el primer paso es determinar las deformadas $u_1(x)$, $u_2(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ para desplazamientos especificados Δ_i en los extremos.

4.1. Deformada para desplazamientos arbitrarios en extremos

Primeramente notemos, de las ecuaciones (4) y (5), que el desplazamiento $v_2(x) = v_s(x) - v_i(x)$ es nulo en los extremos. Además si las cargas son nulas la solución de la ecuación diferencial (6d) debe ser para todo x

$$v_2(x) = 0 \quad (13)$$

Notemos que esta solución también verifica las condiciones de contorno (9) que no dependen de esta variable.

Se puede demostrar que las soluciones de las ecuaciones diferenciales para desplazamientos arbitrarios Δ_i en extremos y cargas nulas son

$$u_1(\eta) = c_1 + c_2\eta \quad (14a)$$

$$v_2(\eta) = 0 \quad (14b)$$

$$v_1(\eta) = c_7 + c_8\eta + c_9\eta^2 + c_{10}\eta^3 + c_{11}e^{kL\eta} + c_{12}e^{-kL\eta} \quad (14c)$$

$$u_2(\eta) = c_{13} + c_{14}\eta + c_{15}\eta^2 + c_{16}e^{kL\eta} + c_{17}e^{-kL\eta} \quad (14d)$$

donde $\eta = x/L$ y los coeficientes c_i son

$$c_1 = 2\Delta_1 \quad (15a)$$

$$c_2 = 2(\Delta_4 - \Delta_1) \quad (15b)$$

$$c_7 = (2 - 24g_u)\Delta_2 - g_u(12L\Delta_3 - 24\Delta_5 + 12L\Delta_6) \quad (15c)$$

$$c_8 = (2 - 12kLh_u)L\Delta_3 - h_ukL(24\Delta_2 - 24\Delta_5 + 12L\Delta_6) \quad (15d)$$

$$c_9 = (6 - 24i_u)\Delta_5 + (12i_u - 2)L\Delta_6 + (24i_u - 6)\Delta_2 + (12i_u - 4)L\Delta_3 \quad (15e)$$

$$c_{10} = (24j_u + 4)\Delta_2 + (12j_u + 2)L\Delta_3 - (24j_u + 4)\Delta_5 + (12j_u + 2)L\Delta_6 \quad (15f)$$

$$c_{11} = e_u(24\Delta_2 + 12L\Delta_3 - 24\Delta_5 + 12L\Delta_6) \quad (15g)$$

$$c_{12} = -f_u(24\Delta_2 + 12L\Delta_3 - 24\Delta_5 + 12L\Delta_6) \quad (15h)$$

$$c_{13} = c_8a_u + 6c_{10}b_u \quad (15i)$$

$$c_{14} = 2c_9a_u \quad (15j)$$

$$c_{15} = 3c_{10}a_u \quad (15k)$$

$$c_{16} = c_{11}\left(a_ukL - b_uk^3L^3\frac{4E_lJ_l}{E_lA_lh^2}\right) \quad (15l)$$

$$c_{17} = -c_{12}\left(a_ukL - b_uk^3L^3\frac{4E_lJ_l}{E_lA_lh^2}\right) \quad (15m)$$

con

$$k = \sqrt{\frac{6E_p J_p}{E_l J_l dh} + \frac{24E_p J_p}{E_l A_l dh^3}} \quad (16)$$

Siendo,

$$a_u = \frac{h}{2L} \quad (17a)$$

$$b_u = \frac{E_l A_l dh^4}{48E_p J_p L^3} \quad (17b)$$

Y definiendo a f_a, f_b como

$$f_a = 12(kL + 2) + 12(kL - 2)e^{kL} + k^3 L^3 \frac{4E_l J_l}{E_l A_l h^2} (1 + e^{kL}) \quad (18a)$$

$$f_b = 12(kL + 2)e^{-kL} + 12(kL - 2) + k^3 L^3 \frac{4E_l J_l}{E_l A_l h^2} (1 + e^{-kL}) \quad (18b)$$

tenemos que las constantes $e_u, f_u, g_u, h_u, i_u, j_u$ son

$$e_u = \frac{1}{f_a} \quad (19a)$$

$$f_u = e^{kL} e_u = \frac{1}{f_b} \quad (19b)$$

$$g_u = e_u - f_u \quad (19c)$$

$$h_u = e_u + f_u \quad (19d)$$

$$i_u = 3e_u((kL + 2) + (kL - 2)e^{kL}) \quad (19e)$$

$$j_u = -2e_u((kL + 2) + (kL - 2)e^{kL}) \quad (19f)$$

4.2. Coeficientes de la matriz de rigidez

Sustituyendo los desplazamientos $u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x)$ y sus derivadas en las expresiones (9) de los esfuerzos S_i podemos encontrar la expresión de estos esfuerzos en función de los desplazamientos Δ_i

$$S_i = \sum_{j=1}^6 k_{ij} \Delta_j \quad (20)$$

Donde k_{ij} son los coeficientes de la matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (21)$$

La matriz de rigidez debe ser simétrica ($k_{ij} = k_{ji}$), ya que todas las fuerzas actuantes son asumidas conservativas, por lo tanto los coeficientes de la matriz de rigidez son

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= -k_{14} = -k_{41} = k_{44} = 2 \frac{E_l A_l}{L} \\
 k_{22} &= -k_{25} = k_{55} = \frac{E_l J_l^G}{L^3} (12 - 48i_u) \\
 k_{23} &= k_{26} = -k_{35} = -k_{56} = \frac{E_l J_l^G}{L^2} (6 - 24i_u) \\
 k_{33} &= k_{66} = \frac{E_l J_l^G}{L} (4 - 12i_u) \\
 k_{36} &= \frac{E_l J_l^G}{L} (2 - 12i_u)
 \end{aligned} \tag{22}$$

donde J_l^G es el momento de inercia baricéntrico de los largueros definido como

$$J_l^G = 2 \left(\frac{A_l h^2}{4} + J_l \right) \tag{23}$$

5. EJEMPLO

Para comparar la aproximación de la matriz de rigidez consideramos una viga empresillada descargada empotrada en el extremo derecho y sometida a un giro unitario en el extremo izquierdo. Esto es, con desplazamientos extremos $\Delta_3 = 1$ y $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$.

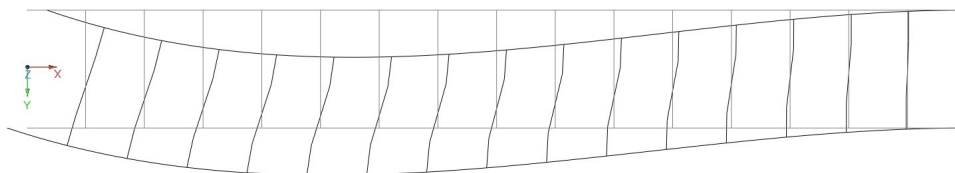


Figura 7: Viga empresillada con giro unitario

En este caso la viga tiene una longitud $L = 8m$, la altura es $h = 1m$ y la separación de presillas $d = 0,5m$. Los largueros tienen una sección circular de $100mm$ de diámetro y las presillas son también de sección circular de $12,5mm$ de diámetro. El material asumido para todas las barras es acero con un módulo de elasticidad de $206000N/mm^2$.

Esta viga fue analizada por elementos finitos y en la figura (8) se muestra la comparación de los desplazamientos verticales con la solución analítica deducida aquí. Numéricamente ambos resultados son prácticamente iguales con una precisión mayor a seis cifras significativas o sea un error relativo menor al 0.0005% .

Debemos resaltar que, en este ejemplo, la solución de elementos finitos tiene 96 grados de libertad mientras la solución analítica involucra como máximo a 6 grados de libertad, los desplazamientos en extremos.

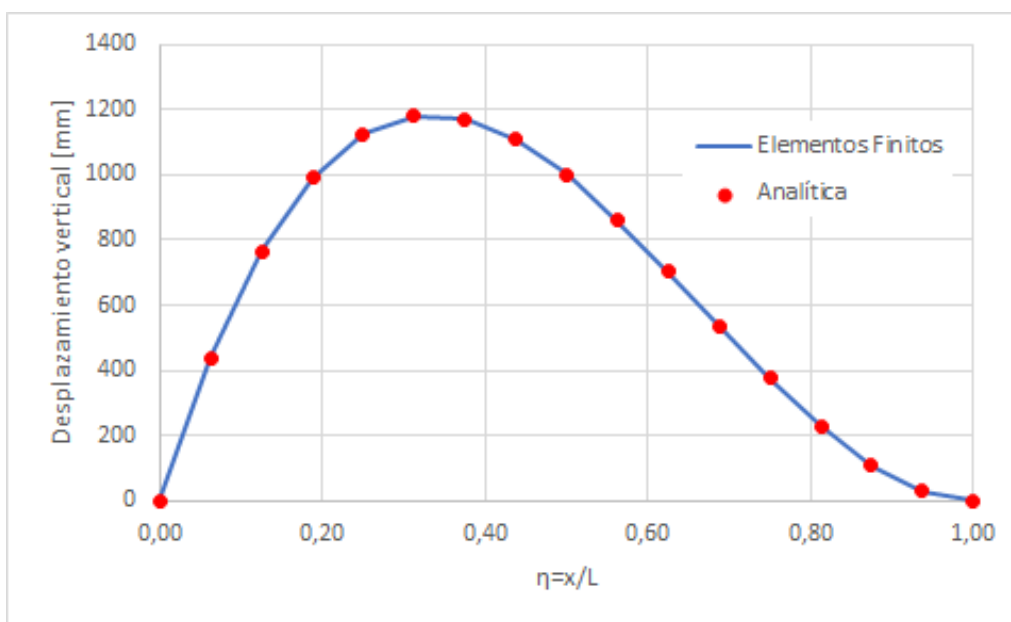


Figura 8: Comparación de deformada vertical

6. CONCLUSIONES

Se ha obtenido una solución analítica aproximada para las deformaciones de una viga empresillada, con esta solución se ha calculado la matriz de rigidez de la viga. Comparando los desplazamientos obtenidos con la solución exacta por elementos finitos se obtienen resultados prácticamente iguales.

Debemos destacar que la obtención de la solución analítica ha sido sumamente complicada y teniendo en cuenta que solamente es una aproximación podría ser más conveniente utilizar métodos más sencillos, como por ejemplo el de aproximaciones polinómicas de las referencias (Filipich y Bambill, 2003; Martín, 2017).

Por otro lado, la matriz de rigidez puede ser incorporada en programas de elementos finitos de manera de tratar a la viga empresillada como si fuese una viga maciza equivalente disminuyendo sensiblemente los grados de libertad. Se espera continuar con estos desarrollos incorporando la deformación global por corte, que toma influencia con el incremento de rigidez de las presillas y la consideración de efectos de segundo orden mediante la modelización de imperfecciones. También se espera extender el desarrollo a estructuras en celosía o periódicas tridimensionales.

REFERENCIAS

- Filipich C.P. y Bambill E.A. Frecuencias Naturales De Piezas Empresilladas Via Series De Potencias. *Mecánica Computacional*, 22(10):877–891, 2003.
- Filipich C.P., Guzmán A.M., y Rosales M.B. Planteo Discreto-Continuo de Piezas Reticuladas Planas y Espaciales. *Mecánica Computacional*, 29(9):863–882, 2010.
- Guzmán A.M., Rosales M.B., y Filipich C.P. Continuous one-dimensional model of a spatial lattice. Deformation, vibration and buckling problems. *Engineering Structures*, 182:290–300, 2019.
- Guzmán A.M. *Estática, Estabilidad y Dinámica de Mástiles Reticulados con Aplicación a Estructuras Arriostradas*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca,

- Argentina, 2014.
- Helou M. y Kara S. Design, analysis and manufacturing of lattice structures: an overview. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 31(3):243–261, 2018.
- Jouglard C.E. y Peker U. Matriz de Rigidez de una Viga Empresillada: Aproximación Flexional Global. Reporte de Investigación: GADE-RI-2019-01, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, 2019.
- Martín H.D. *Utilización de Series de Potencias para la Resolución Económica de Elásticas, Frecuencias y Teoría de Segundo Orden de Entramados de Barras, en el Contexto de la Ingeniería Estructural*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2017.
- Maurizi M.J., Bambill E.A., y Martín H.D. Análisis Discreto de Columnas Celosía. *Mecánica Computacional*, 23(5):411–427, 2004.
- Noor A.K. Continuum Modeling for Repetitive Lattice Structures. *Applied Mechanics Reviews*, 41(7):285–296, 1988.