

ANÁLISIS DE FRECUENCIAS NATURALES EN MATERIALES LAMINADOS CONSIDERANDO LA INFLUENCIA DE LOS ESFUERZOS NORMALES

Raúl Zaradnik^a, Silvia Raichman^b y Anibal Mirasso^c

^a Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Parque General San Martín 5500 Mendoza,
zaradnikmiras@yahoo.com.ar

^b Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Parque General San Martín 5500 Mendoza,
sraichman@uncu.edu.ar

^c Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Parque General San Martín 5500 Mendoza,
aemirasso@uncu.edu.ar

Palabras clave: Vibraciones, vibraciones con cambio de rigidez, materiales compuestos, inestabilidad.

Resumen. Los componentes estructurales de materiales compuestos son en general más flexibles que sus alternativos realizados en materiales tradicionales como los metálicos. En algunas situaciones, como en palas de rotores, de ventiladores y de generadores eólicos, estos componentes estructurales están sometidos a la acción de cargas dinámicas debidas al flujo y es importante conocer las características de vibración de los mismos. Dada la flexibilidad de este tipo de componentes es importante considerar la incidencia de esfuerzos membranales en las frecuencias naturales de vibración. En este trabajo se presenta la extensión de un código de elementos finitos, basado en las hipótesis de Mindlin y ecuaciones cinemáticas no lineales, para resolver problemas de vibraciones libres con la incidencia de los esfuerzos normales. Se discute la formulación planteada y algunos resultados obtenidos para problemas de interés, considerando matrices de masas consistentes y concentradas. Estos son comparados con resultados analíticos y experimentales disponibles en la literatura.

1 INTRODUCCIÓN

El uso cada día más generalizado de los materiales laminados, especialmente los materiales compuestos en base a resinas con fibras, hace necesario investigar y fundamentar los modelos numéricos utilizados para comprender el comportamiento de los mismos. Los componentes estructurales resultantes son en general más flexibles que sus alternativos realizados en materiales tradicionales como los metálicos. En algunas situaciones, como en palas de rotores, de ventiladores y de generadores eólicos, estos componentes estructurales están sometidos a la acción de cargas dinámicas debidas al flujo y es importante conocer las características naturales de vibración de los mismos. Dada la flexibilidad de este tipo de componentes es importante considerar la incidencia de esfuerzos membranales en la rigidez de la estructura, tal como ha sido citado recientemente por Neto et al (2004), ya que de lo contrario se estaría introduciendo una rigidez ficticia en el modelo.

La modificación de la rigidez debido a los esfuerzos membranales es bien conocida en problemas de inestabilidad del equilibrio, tanto para estructuras con trayectorias fundamentales lineales como no lineales (Koiter (1967), Thompson y Hunt (1973), Flores y Godoy (1992)).

La incidencia de los esfuerzos normales en las frecuencias naturales de vibración ha sido planteada en términos analíticos por Timoshenko et al. (1974) para el caso de una viga simplemente apoyada. Las ecuaciones diferenciales que rigen este tipo de comportamiento para estructuras con materiales compuestos han sido presentadas por Jones (1975), Sridaharan (1996), entre otros diversos autores.

El análisis de estas tipologías estructurales con materiales compuestos es ampliamente tratado en la bibliografía y en distintas formulaciones, que pueden agruparse en dos grandes grupos: aquellas que condensan el comportamiento a una única dimensión predominante, derivando en teorías de tipo vigas; y aquellas que lo hacen en dos dimensiones, derivando en las teorías de láminas o cáscaras. Entre los modelos de tipo viga es posible citar los trabajos de Jung et al.(2001), Piovan y Cortinez (2004), Otero (2004), Yu et al. (2005a, b). En los modelos de láminas o cáscaras es de destacar lo realizado por Hinton y Owen (1984).

En este trabajo se presenta la extensión del código de elementos finitos basado en las hipótesis de Mindlin y ecuaciones cinemáticas no lineales desarrollado por Hinton y Owen (1984), para resolver problemas de vibraciones libres con la incidencia de los esfuerzos normales. Se discute la formulación planteada y algunos resultados obtenidos para problemas de interés, considerando matrices de masas consistentes y concentradas. Estos son comparados con resultados analíticos y experimentales disponibles en la literatura.

2 FORMULACIÓN.

Para sistemas estructurales en los cuales la magnitud de las cargas actuantes está controlada por un parámetro λ y los desplazamientos que éstas inducen son tales que su relación con las pequeñas deformaciones es no lineal, el equilibrio entre las acciones externas e internas del sistema se puede expresar en términos del Principio de Trabajos Virtuales de la siguiente manera:

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T * \{\sigma\} * dV = \int_V \delta\{u\}^T * \lambda * \{f_b\} * dV \quad (1)$$

Donde $\{u\}^T$ es el vector de desplazamientos de cualquier punto del sólido; $\{f_b\}$ es el vector de las fuerzas másicas; $\{\varepsilon\}$ es el vector de deformaciones generalizadas, cuyas componentes son las correspondientes al tensor de deformaciones de Green Lagrange (Malvern, (1969));

$\{\sigma\}$ es el “vector de tensiones generalizadas”, cuyas componentes son las tensiones energéticamente equivalentes a las deformaciones de Green Lagrange, y $\delta\{u\}^T$ es el conjunto de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles, que generan las deformaciones virtuales $\delta\{\varepsilon\}^T$ calculadas mediante el operador de Green Lagrange.

2.1 Cinemática adoptada para láminas de tipo Mindlin.

El campo de desplazamientos se puede escribir como (Hinton y Owen, (1984)):

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + z * \theta_y(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + z * \theta_x(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{2}$$

siendo u_1, u_2, u_3 los desplazamientos en las direcciones x, y, z, respectivamente. Las coordenadas rectangulares en el plano de la lámina son x, e y; mientras que z es la coordenada medida en la dirección del espesor de la lámina y con referencia al plano medio de la misma. Los correspondientes desplazamientos del plano medio son u_0, v_0, w_0 , en tanto que θ_x, θ_y son las rotaciones debidas a la flexión de la lámina, de las normales en los planos "yz" y "xz", respectivamente.

Con el campo de desplazamientos adoptado (2), las componentes del vector de deformaciones generalizadas resultan:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_1\} \tag{3}$$

siendo la contribución lineal $\{\varepsilon_0\}$:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ \gamma_{yz0} \\ \gamma_{xz0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z * \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z * \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z * \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \end{Bmatrix} \tag{4}$$

y la parte no lineal $\{\varepsilon_1\}$:

$$\{\varepsilon_1\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{y1} \\ \gamma_{xy1} \\ \gamma_{yz1} \\ \gamma_{xz1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

En esta expresión se han diferenciado las contribuciones de u_0 , v_0 y w_0 respectivamente. Cuando sólo se retiene el aporte de w_0 en las deformaciones no lineales se trata de la llamada hipótesis de Von Karman y ha sido ampliamente considerada en la literatura (Hinton y Owen (1984)). En el presente trabajo se ha retenido la contribución de las tres componentes u_0 , v_0 y w_0 .

2.2 Ecuaciones constitutivas.

Se asume una relación elástica y lineal entre las componentes de tensión y las componentes de deformación de la forma:

$$\{\sigma\} = D * \{\varepsilon\} \quad (6)$$

Siendo $\{\varepsilon\}$ el vector de deformaciones dado por la ecuación (3),

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\} \quad (7)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde:

$$D_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} ; D_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} ; D_{12} = \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$D_3 = G_{12} ; D_4 = K_1 G_{13} ; D_5 = K_2 G_{23}$$

E_1 y E_2 son los módulos de elasticidad en las direcciones principales del elemento; ν_{12} el módulo de Poisson para dichas direcciones; K_1 y K_2 son los factores de corrección por corte en los planos xz e yz respectivamente. Cada elemento se considera formado por láminas y por integración de las mismas se materializa el espesor total (Hinton y Owen (1984)).

2.3 Discretización por Elementos Finitos.

Se adopta el elemento de ocho nodos de Hinton y Owen (1984) con cinco grados de libertad por nodo. Así el campo de desplazamientos (2) resulta:

$$\{u\} = \mathbf{N} \{a\} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1,8} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_i \left(\nu_{1xi} \frac{h}{2} \right) & -N_i \left(\nu_{2xi} \frac{h}{2} \right) \\ 0 & N_i & 0 & N_i \left(\nu_{1yi} \frac{h}{2} \right) & -N_i \left(\nu_{2yi} \frac{h}{2} \right) \\ 0 & 0 & N_i & N_i \left(\nu_{1zi} \frac{h}{2} \right) & -N_i \left(\nu_{2zi} \frac{h}{2} \right) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Siendo la matriz de funciones de forma para un nodo i cualquiera del elemento,

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_i \left(v_{1xi} \zeta \frac{h}{2} \right) & -N_i \left(v_{2xi} \zeta \frac{h}{2} \right) \\ 0 & N_i & 0 & N_i \left(v_{1yi} \zeta \frac{h}{2} \right) & -N_i \left(v_{2yi} \zeta \frac{h}{2} \right) \\ 0 & 0 & N_i & N_i \left(v_{1zi} \zeta \frac{h}{2} \right) & -N_i \left(v_{2zi} \zeta \frac{h}{2} \right) \end{bmatrix} \text{ con } N_i \text{ la función de forma del nodo } i$$

$\{a_i\}^T = \{u_i, v_i, w_i, \beta_{1i}$ y $\beta_{2i}\}$ son las variables nodales que representan los tres desplazamientos de la superficie media, y los giros de la normal a la superficie media en cada nodo, expresados en un sistema local de coordenadas en cada nodo. La relación de estos giros con los giros de la normal a la superficie media referidos a las direcciones coordenadas globales está dada por:

$$\begin{aligned} \theta_{xi} &= \beta_{1i} * v_{2xi} + \beta_{2i} * v_{1xi} \\ \theta_{yi} &= \beta_{1i} * v_{2yi} + \beta_{2i} * v_{1yi} \end{aligned} \tag{11}$$

Donde v_{mi} son los cosenos directores de los ejes “m” respecto a las direcciones principales “n”, todos considerados en el nodo “i”.

Con las interpolaciones dadas en (10) las componentes del vector de deformación lineal $\{\epsilon_0\}$ expresadas en (4) resultan:

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ \gamma_{yz0} \\ \gamma_{xz0} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1,8} B_0(N_i) \begin{Bmatrix} u \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Siendo

$$B_0(N_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{1xi} & -z \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{2xi} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{1yi} & -z \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{2yi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & z \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} v_{1xi} + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{1yi} \right) & -z \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} v_{2yi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{2xi} \right) \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & z \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{1zi} + N_i v_{1yi} & -z \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{2zi} - N_i v_{2yi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & z \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{1zi} + N_i v_{1xi} & -z \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{2zi} - N_i v_{2xi} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Con las interpolaciones (10) las componentes de deformación no lineales $\{\epsilon_1\}$ expresadas en (5) resultan:

$$\{\epsilon_1\} = \frac{1}{2} * A_u * G_u * \{a\} + \frac{1}{2} * A_v * G_v * \{a\} + \frac{1}{2} * A_w * G_w * \{a\} \tag{14}$$

A_u, A_v, A_w , son matrices que consideran la contribución de los desplazamientos de la superficie media u_0, v_0 y w_0 y dependen de los valores de los desplazamientos nodales. Se

pueden expresar de la forma (Hinton y Owen, (1984) y Zienkiewicz y Taylor (1991)):

$$A_{\bullet}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bullet}{\partial x} & \frac{\partial \bullet}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bullet}{\partial y} & \frac{\partial \bullet}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$G_{\bullet} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bullet}{\partial x} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (16)$$

Con estas definiciones el Principio de Trabajos Virtuales (1) resulta en un sistema de ecuaciones no lineales dado por:

$$\{\psi(\{a\}, \lambda)\} = \sum_A \int (B_0 + B_1(\{a\}))^T \{\sigma(\varepsilon(a))\} dA - \lambda \{f\} \quad (17)$$

donde el símbolo sumatoria representa la contribución de cada uno de los elementos finitos.

La solución de la ecuación de equilibrio no lineal (17) conduce a una trayectoria de equilibrio no lineal $\lambda = \lambda(\{a\})$ que puede obtenerse mediante un esquema incremental iterativo desde algún estado de equilibrio conocido $(\{a^m\}, \lambda^m)$. Cada iteración consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\{\psi(\{a\}^{m+1}, \lambda^{m+1})\} = \{r\}_i^{m+1} + K_T^i * \{\Delta a\}_i^{m+1} = 0 \quad (18)$$

con

$$\{r\}_i^{m+1} = \{\psi(\{a\}_i^{m+1}, \lambda^{m+1})\} = \sum_A \int (B_0 + B_1(\{a\}_i^{m+1}))^T \{\sigma(\varepsilon\{a\}_i^{m+1})\} dA - \lambda^{m+1} \{f\} \quad (19)$$

y

$$K_T^i = K_0 + K_1 + \lambda K_{\sigma} \quad (20)$$

$$K_0 = \int_V B_0^T * D * B_0 * dV \quad (21)$$

$$K_1 = \int_V [B_0^T * D * B_1 + B_1^T * D * B_0 + B_1^T * D * B_1] * dV \quad (22)$$

$$K_{\sigma} = \int_V \left\{ G_u^T * \bar{\sigma} * G_u + G_v^T * \bar{\sigma} * G_v + G_w^T * \bar{\sigma} * G_w \right\} * dV \quad (23)$$

La resolución en cada iteración del sistema lineal (18) es equivalente a buscar el valor de $\{\Delta a\}$ que hace estacionario un funcional de energía potencial total dado por:

$$\bar{\pi}(\{\Delta a\}) = \{\Delta a\}^T \{\{r\} + K_T * \{\Delta a\}\} \quad (24)$$

Donde el vector residuo es equivalente a las fuerzas nodales que producen los incrementos de desplazamientos $\{\Delta a\}$.

2.4 Problema de oscilación libre.

Para un configuración de equilibrio conocida $(\{a^m\}, \lambda^m)$ es posible determinar las propiedades dinámicas del sistema en ese estado considerando una perturbación $\{\Delta a\}$ a la configuración de equilibrio, para valores de carga constante, que tendrá asociado un valor de energía potencial total

$$\pi = \frac{1}{2} \{\Delta a\}^T K_T(\{a^m\}, \lambda^m) \{\Delta a\} \quad (25)$$

Y un valor de energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \{\Delta v\}^T M \{\Delta v\} \quad (26)$$

Con la velocidad dada por

$$\Delta v = \frac{d(\Delta a)}{dt} \quad (27)$$

Y la matriz de masa calculada con

$$M = \int_v N^T * \rho * N * dV \quad (28)$$

La ecuación de equilibrio dinámico está dada por el principio de Hamilton

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\pi - T) dt = 0 \quad (29)$$

del que se derivan las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial \pi}{\partial \Delta a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \Delta v} \right) = 0 \quad (30)$$

Considerando (25) a (28) las ecuaciones dadas en (30) pueden escribirse como:

$$K_T(\{a^m\}, \lambda^m) \{\Delta a\} + M \frac{d^2 \{\Delta a\}}{dt^2} = 0 \quad (31)$$

La ecuación (31) admite una solución del tipo:

$$\{\Delta a\} = e^{i\omega t} \{\Delta x\} \quad (32)$$

Sustituyendo la ecuación (32) en (31) resulta un problema de valores propios generalizado

$$[K_T(\{a^m\}, \lambda^m) - \omega^2 M] \{\Delta x\} = 0 \quad (33)$$

O bien considerando las ecuaciones (20) a (23)

$$[(K_0 + K_1(\{a^m\}) + \lambda^m K_\sigma) - \omega^2 M] \{\Delta x\} = 0 \quad (34)$$

La solución de (34) permite determinar las propiedades dinámicas $(\omega, \{\Delta x\})_m$ para cada configuración de equilibrio $(\{a^m\}, \lambda^m)$ solución de (17).

Es oportuno destacar que cuando la solución de (34) admite como menor valor propio la frecuencia ω igual a cero, se trata de un modo de tipo rígido que constituye una configuración para la cual la matriz de rigidez tangente K_T es una matriz singular. Se está en presencia de un

estado de equilibrio crítico en el que el sistema puede perder la estabilidad.

2.5 Matrices de Masa.

Para obtener la matriz de masas del sistema se han considerado dos posibilidades: matriz de masas consistentes y matriz de masas concentradas (Zaradnik, et al (2006)). Para las matrices de masas consistentes se han utilizado las mismas funciones de interpolación que para los desplazamientos y se han resuelto numéricamente las integrales (28) que definen las componentes de la matriz de masa.

Para las matrices de masas concentradas se han propuesto funciones de interpolación distintas a las de los desplazamientos, con una función de peso de tipo exponencial, que respetan las condiciones de: simetría numérica, simetría física, conservación de la cantidad de movimiento y positividad (Felippa, (2004). El detalle de esta formulación está presentado en (Zaradnik, et al (2006)).

3 EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de la formulación implementada y la validación con resultados disponibles en la literatura.

3.1 Viga simplemente apoyada.

Se ha considerado una viga simplemente apoyada y con distribución de esfuerzos axiales P constantes. Para una longitud $L= 2m$; una sección transversal con área A , con inercia J , de ancho $b=0,5m$, de espesor $t=0,01m$; con material homogéneo, isótropo y lineal de módulo de elasticidad $E=200$ GPa y densidad $\rho= 2,4$; las cargas críticas de inestabilidad de Euler están dadas por la siguiente expresión (Timoshenko (1982)):

$$P_{crit} = i^2 \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (35)$$

Así las cargas críticas de inestabilidad para los tres primeros modos, con valores de $i=1,2$ y 3 son, 20562 N; 86247 N y 194055 N respectivamente.

Timoshenko et al. (1974) presenta una solución analítica para las frecuencias naturales de vibración del i -ésimo modo " i " dada por:

$$\omega_0 = i^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E * J}{\rho * A}} \sqrt{1 - \frac{P}{i^2 P_{crit}}} \quad (36)$$

Se realizó un modelo de elementos finitos y para el caso sin carga axial se obtuvieron las frecuencias naturales que se presentan en la Tabla 1.

Modo	Matriz de masas concentradas	Error Relativo	Matriz de masas consistentes	Error Relativo
1	63,709	-2,0%	62,883	-3,3%
2	241,346	-7,2%	251,058	-3,5%
3	500,814	-14,4%	593,781	1,5%

Tabla 1: Frecuencia natural (rad/seg) sin Carga Normal.

Se observa que el modelo con masas consistentes tiene menores errores respecto de la solución teórica. Si bien el modelo de masas concentradas tiene bajo error para el primer

modo de vibración natural, para modos superiores este error se incrementa.

En la Figura 1 se presentan las frecuencias naturales obtenidas para distintos niveles de carga axial usando la matriz de masas consistentes, así como también los resultados teóricos de Timoshenko et al. (1974) que se calculan con la ecuación (36).

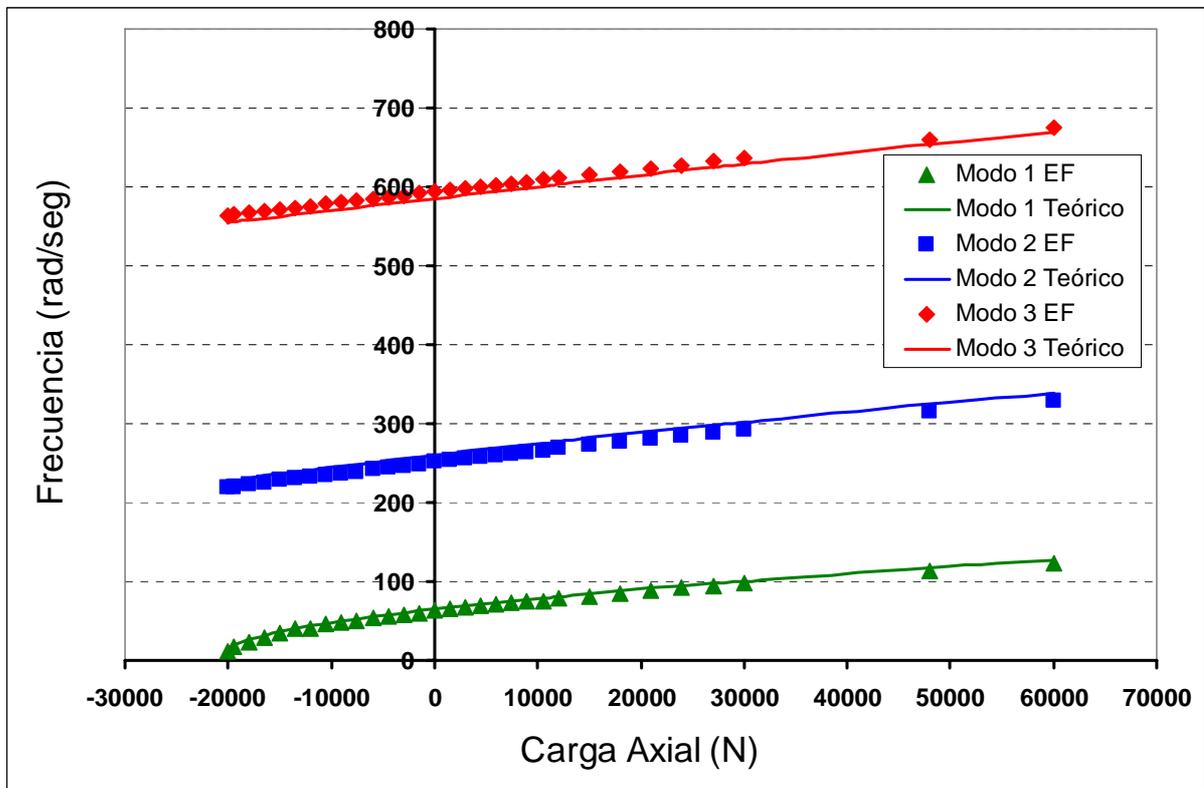


Figura 1: Frecuencias naturales en función de la carga axial.

En la Figura 2 se muestran los resultados para los tres modos en forma normalizada según la curva teórica dada por la ecuación (36).

Esta ecuación establece una relación única para cada valor de frecuencias natural de un determinado modo dividido por la frecuencia de ese modo sin carga axial, con el cociente entre carga axial aplicada y la carga crítica del modo correspondiente.

Se observa una muy buena aproximación de los resultados numéricos con la curva teórica. Se ha representado el ajuste polinómico por mínimos cuadrados para los puntos resultantes del primer modo, y es muy próximo a la solución teórica exacta.

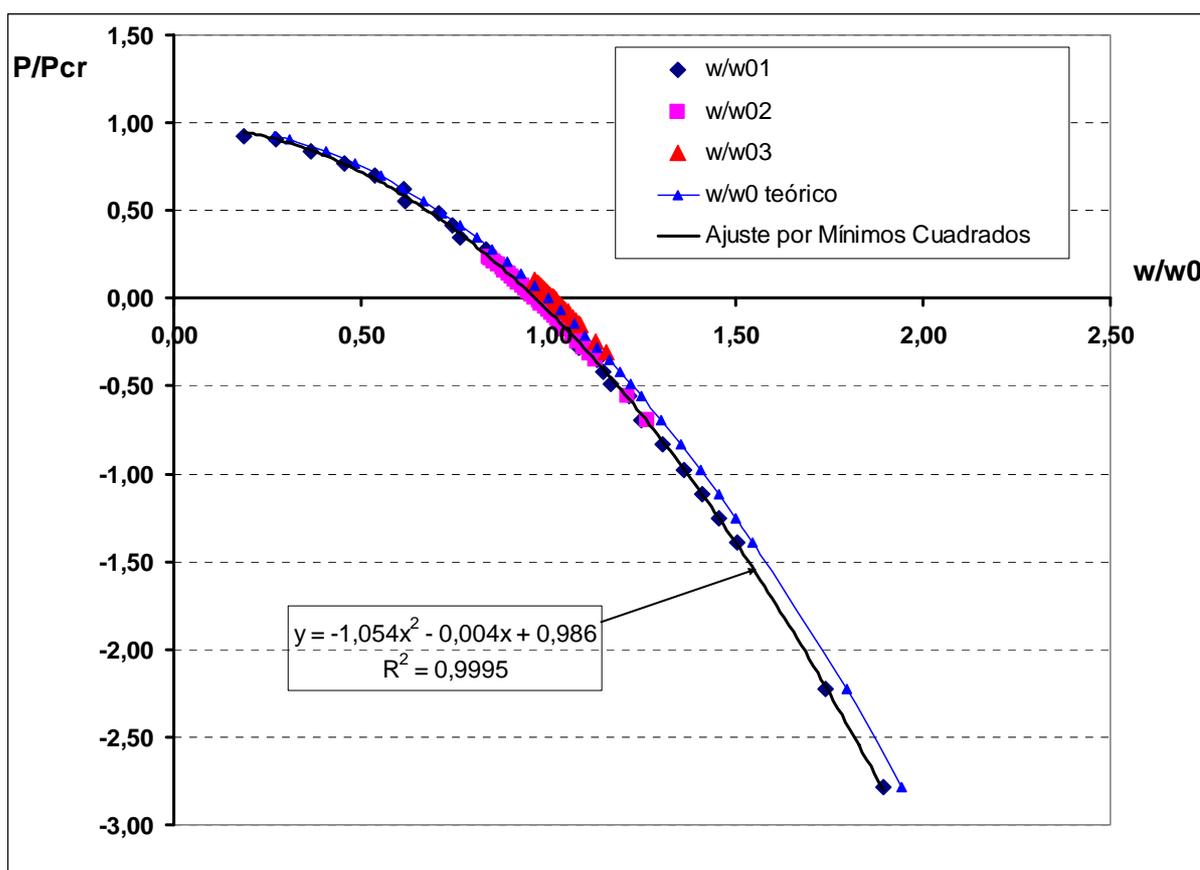


Figura 2: Curva teórica de Timoshenko y resultados numéricos.

3.2 Ménsula de material compuesto

Una ménsula de longitud $L=190\text{mm}$; de sección transversal con ancho $b=12,7\text{mm}$ y espesor $t=3,175\text{mm}$; con material compuesto de grafito y epóxi ha sido analizada por Jung y Chopra(2001), y ensayadas por Abarcar y Cunniff (1972) determinando frecuencias naturales de vibración sin cargas axiales aplicadas. Las propiedades mecánicas están indicadas en la Tabla 2.

Propiedad	Valor
E_{11}	129.1 Gpa
E_{22}	9.408 Gpa
G_{23}	2.541 Gpa
G_{13}	4.304 Gpa
G_{12}	5.157 Gpa
Angulo θ	15° (0.2618 rad)
Coef. De Poissón	0.30
Densidad	1551 kg/m ³

Tabla 2: Propiedades mecánicas del material compuesto.

Se realizó un modelo de elementos finitos y se obtuvieron las frecuencias naturales de vibración para el caso sin cargas axiales y también para cuando actúa una fuerza centrífuga debida a una velocidad de rotación definida. En las Tablas 3 y 4 se presentan los resultados

obtenidos con el modelo de elementos finitos desarrollado, y considerando matrices de masa consistentes y concentradas respectivamente.

Abarcar y Cunniff (1972) han determinado para el primer modo natural de vibración sin carga axial una frecuencia de 82,5 Hz, mientras que para el tercer modo 511,3 Hz. Estos dos modos son de tipo flexión dominante en el plano de menor inercia. El segundo modo es de flexión en el plano de mayor inercia y no fue registrado por Abarcar y Cunniff (1972).

Modo	Revoluciones (rpm)				
	0	750	1000	2000	3000
1	86.8	81.2	84.9	94.2	106.5
2	270.6	296.8	292.3	293.4	297.5
3	488.4	488.3	488.9	494.2	502.6

Tabla 3: Frecuencias naturales en Hz para la ménsula de grafito epoxi, en relación a la velocidad angular, considerando la matriz de masas consistentes.

Modo	Revoluciones (rpm)				
	0	750	1000	2000	3000
1	92.2	86.3	90.2	100.1	113.0
2	286.5	315.1	310.4	311.9	315.1
3	488.6	488.6	488.6	495.0	502.9

Tabla 4: Frecuencias naturales en Hz para la ménsula de grafito epoxi, en relación a la velocidad angular, considerando la matriz de masas concentradas.

De comparar los resultados numéricos obtenidos con los resultados experimentales de Abarcar y Cunniff (1972), se observa que los valores numéricos para el primer modo tienen un error de 5% y del 12% usando las matrices de masas consistentes y concentradas respectivamente. Mientras que para el tercer modo, se tiene un error del orden del 4% usando ambas matrices.

En la Figura 3 se grafican los tres primeros modos naturales de vibración sin carga axial determinados con el modelo de elementos finitos implementado.

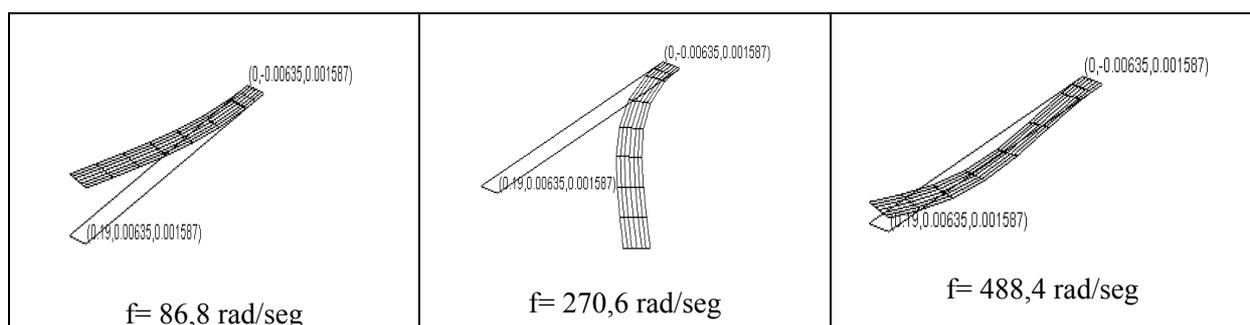


Figura 3: Modos de de vibración sin carga axial.

En la Figura 4 se muestra para este ejemplo como la incidencia de la fuerza centrífuga en las frecuencias naturales de vibración.

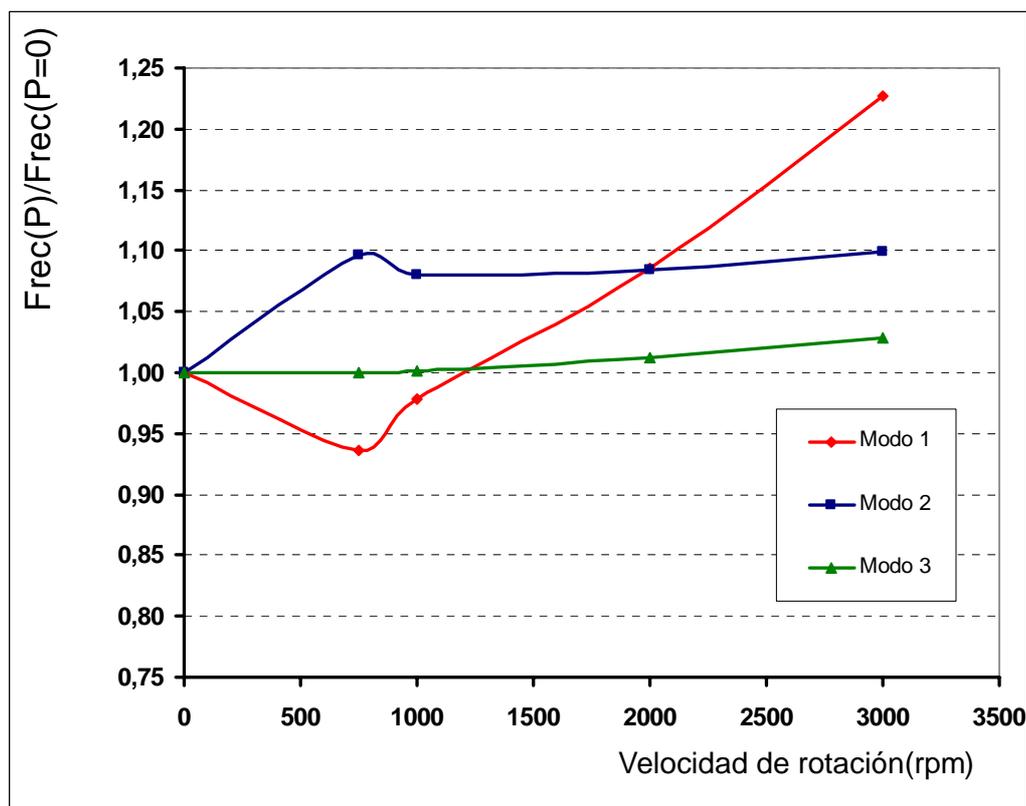


Figura 4: Variación de frecuencia natural con relación a la carga normal aplicada.

Se observa que la incidencia de los esfuerzos axiales afecta más a la primera y segunda frecuencias que a la tercera.

4 CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación que amplía el alcance de un código de elementos finitos de láminas basado en las hipótesis de Mindlin (Hinton y Owen (1984)) permitiendo abordar el análisis de vibraciones libres considerando la no linealidad geométrica del problema, poniendo así en evidencia la incidencia de los esfuerzos normales en las frecuencias naturales de vibración. El modelo implementado incluye dos posibilidades para la evaluación de la matriz de masas del sistema: matriz de masas consistentes y matriz de masas concentradas.

Se presentó en primer lugar el estudio de las frecuencias naturales de vibración para una viga simplemente apoyada de material homogéneo sin carga axial. Se observó que el modelo con matriz de masas consistentes tiene menores errores que el modelo con matriz de masas concentradas respecto de la solución teórica (Timoshenko et al. (1974)). Se mostraron los valores de las frecuencias naturales obtenidos para distintos niveles de carga axial usando la matriz de masas consistentes. Se compararon los resultados numéricos con la curva teórica que establece una relación única para cada valor de frecuencia natural de un determinado modo dividido por la frecuencia de ese modo sin carga axial, con el cociente entre carga axial aplicada y la carga crítica del modo correspondiente. Se observa una muy buena aproximación de los resultados numéricos con la curva teórica.

Se analizó una ménsula de material compuesto de grafito y epóxi. Se obtuvieron las frecuencias naturales de vibración para el caso sin cargas axiales considerando matrices de masa consistentes y concentradas. De comparar los resultados numéricos obtenidos con los resultados experimentales de Abarcar y Cunniff (1972), se observó que los valores numéricos

para el primer modo tienen un error de 5% y del 12% usando las matrices de masas consistentes y concentradas respectivamente, en tanto que para el tercer modo, se tiene un error del orden del 4%, usando ambas matrices.

Se efectuó el estudio de la misma estructura cuando actúa una fuerza centrífuga debida a una velocidad de rotación definida. Se ha podido representar la incidencia de la fuerza centrífuga en las frecuencias naturales de vibración.

Se considera que el modelo resultante es especialmente útil para determinar la incidencia de la carga axial en los valores de las frecuencias naturales de estructuras laminares de materiales homogéneos o compuestos, con trayectorias fundamentales lineales. Se explorará para casos de estructuras con trayectorias de equilibrio no lineales.

REFERENCIAS

- R.B. Abarcar y P.F. Cunniff, The vibration of cantilever beams of fiber reinforced materials, *Journal of Composite Materials*, 6, 10:504-517, 1972.
- F. Beer y E.R. Johnston, Jr., *Mecánica de Materiales*, McGraw Hill, 1982.
- R. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- C. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado, USA 2004.
- F. Flores y L. Godoy, Elastic postbuckling análisis via finite element and perturbation techniques, *Int. J. Num. Meth.Eng.* 33, 1775-1794, 1992.
- E. Hinton y D. Owen, *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press Limited, Swansea, UK, 1984.
- R. M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, Mc Graw Hill, New York, 1975.
- S. Jung; V. Nagaraj, y I. Chopra; Refined Structural Dynamics Model for Composite Rotor Blades, *AIAA Journal*, 39; 2:339-348, 2001
- W.T. Koiter, *Over the Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht*, H.J. Paris, Delft, Traducción al Inglés, NASA Report TTF-10, 1967.
- L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- M. Neto; J. Ambrósio; R. Leal, Composite Materials In Flexible Multibody Systems, *European Congress of Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECCOMAS , 2004.
- A. Otero, Métodos Numéricos Aplicados al Diseño de Nuevos Generadores Eólicos, *Mecánica Computacional Vol XXIII*, Buscaglia, Dari y Zamonsky (Eds), 2004,
- M. Piován y V. Cortínez, Un elemento finito espectral para vigas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos, *Mecánica Computacional Vol. XXIII*, Buscaglia, Dari y Zamonsky (Eds), 2004.
- S. Sridharan, *Bending and Buckling of Composite Laminates*, Department of Civil Engineering, Washington University in St. Louis, 1996.
- J.M.T. Thompson y G.W. Hunt, *A General Theory of Elastic Structures*, John Wiley & Sons, Londres, 1973.
- S. Timoshenko, D. Young y W. Weaver, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, 1974.
- S. Timoshenko, *Resistencia de Materiales*, Espasa Calpe S.A., 1982.
- W. Yu, D. Hodges, V. Volovoi y E. Fuchs, A Generalized Vlasov Theory for Composite Beams”, *Thin Walled Structures*, 43, 2005.

- W. Yu, L. Liao, D. Hodges y V. Volovoi, Theory of Initially Twisted, Composite, Thin Walled Beams, *Thin Walled Structures*, 44, 2005.
- R. Zaradnik, S. Raichman, y A. Mirasso, Formulación de matrices de masas concentradas para análisis dinámico de estructuras de materiales compuestos, *EnIDI, Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería*, Mendoza, 2006.
- O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor. *The finite element method*, volume II. McGraw Hill, 1991.