

## CONSIDERACIONES DE DISEÑO DE RECOLECTORES PENDULARES PARA LA CONVERSIÓN DE ENERGÍA A PEQUEÑA ESCALA EN BOMBAS DE VARILLA

### DESIGN CONSIDERATIONS OF PENDULUM HARVESTERS FOR SMALL-SCALE ENERGY CONVERSION IN RECIPROCATING PUMPS

Lucas Oxarango<sup>a</sup>, Maximiliano Herrero<sup>a</sup> y Franco E. Dotti<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar/frbb>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, CONICET, Argentina*

**Palabras clave:** péndulo paramétrico, bomba reciprocante, mecanismo de cuatro barras, dinámica no lineal.

**Resumen.** En este artículo se analiza la posibilidad de convertir energía a pequeña escala en bombas de varilla, mediante recolectores basados en la dinámica rotatoria del péndulo paramétrico. El objetivo de estos recolectores es extraer energía a partir del movimiento de cabeceo para alimentar sensores y/o luminarias *led* ubicados en la parte superior de la bomba, evitando así un cableado complejo y costoso desde la unidad motora. Mediante un estudio computacional sobre la dinámica no lineal del péndulo paramétrico sometido a una excitación plana, se analizan las posibilidades de lograr respuestas rotacionales, que corresponden al estado más energético. En el diseño, se considera un péndulo con múltiples masas concéntricas, un  $N$ -péndulo. Esto proporciona versatilidad al sistema al permitir la sintonización de la frecuencia natural del sistema pendular.

**Keywords:** parametric pendulum, pumpjack, four-bar linkage, nonlinear dynamics.

**Abstract.** In this article the possibility of small-scale energy conversion in reciprocating pumps is addressed, by means of harvesters based on the rotational dynamics of the parametric pendulum. The purpose of these harvesters is to extract energy from the nodding motion, to power sensors and/or led lamps, located at the top of the pump, thus avoiding complex and expensive wiring from the motor unit. By means of a computational study on the nonlinear dynamics of the parametric pendulum under a planar excitation, we address the possibilities of achieving rotational responses, which correspond to the most energetic state. In the design, a pendulum with multiple concentric masses, i.e. an  $N$ -pendulum, is considered. This provides versatility to the system by allowing the tuning of the natural frequency of the pendulum system.

## 1 INTRODUCCIÓN

Entre la gran cantidad de dispositivos destinados a extraer energía del medio ambiente o en máquinas que contienen movimientos repetidos en el tiempo, los recolectores de péndulo son atractivos debido a la simplicidad de los mecanismos involucrados, en relación a la alta energía cinética disponible en su movimiento de rotación. El concepto es muy simple e intuitivo: un péndulo, con una estructura de soporte fijada a una fuente de movimiento. Si se puede lograr una rotación estable del péndulo, una parte de la energía cinética se puede convertir en energía eléctrica mediante un generador conectado al eje del péndulo (Wiercigroch, 2010). Se consideran principalmente dos fuentes vibratorias: las máquinas o equipos industriales (Dotti et al., 2017) y el movimiento de las olas del mar (Nandakumar et al., 2012; Yurchenko y Alevras, 2013; Reguera et al., 2016). En ambos casos, las rotaciones se pueden lograr solo para algunos escenarios de forzamiento externo. Pero en el caso de las máquinas vibrantes, el movimiento impuesto al péndulo es generalmente armónico y, por lo tanto, más predecible que el movimiento de las olas del mar, de naturaleza estocástica. Esta previsibilidad es una característica muy importante en el diseño de un recolector adecuado, ya que implica que los parámetros de forzamiento se conocen *a priori* en el proceso de diseño.

Las bombas de varilla, empleadas en la industria petrolera, generalmente se encuentran en áreas aisladas donde hay poca o nula infraestructura eléctrica. En tales condiciones, la recolección de energía es apreciada para alimentar sistemas con bajas demandas de energía, como sensores de monitoreo de integridad estructural o luces led de advertencia. Una bomba de varilla convierte el movimiento rotatorio de un motor en un movimiento alternativo, el cual acciona la bomba. Este movimiento alternativo resultante se denomina movimiento de *cabeceo*, está contenido en el plano del mecanismo principal de la bomba, el cual corresponde al conocido mecanismo plano de cuatro barras (McCarthy y Soh, 2011). Si se coloca un recolector pendular sobre la viga balancín, el movimiento de cabeceo de la misma representa el forzamiento de entrada del sistema.

En este artículo, se aborda un estudio acerca de la dinámica no lineal de un péndulo paramétrico de múltiples masas concéntricas excitado por el movimiento de cabeceo del cabezal de una bomba de varilla. Con el objetivo final de diseñar un recolector pendular adecuado, se cuantifica la dinámica de los atractores rotatorios. Esto se realiza mediante un análisis bifurcacional, explorando el plano de fase y el espacio de los parámetros de forzamiento.

## 2 MODELO MATEMÁTICO

La Figura 1a muestra un  $N$ -péndulo esquemático, el cual se halla contenido en el plano  $x'y'$ . Las  $N$  masas se ubican en un arreglo concéntrico con respecto al eje pivot, y cada una de las masas está separada de su consecutiva por una distancia fija dada por  $\psi = 2\pi/N$ . La longitud  $l_1$  se asume mayor o igual que cualquiera de las longitudes restantes  $l_2, l_3, \dots, l_N$ , e idéntica suposición se realiza para la masa  $m_1$  con respecto a  $m_2, m_3, \dots, m_N$ . Ambos,  $l_1$  y  $m_1$  constituyen el *brazo principal*, como se indica. El ángulo  $\theta$  se mide con respecto al brazo principal y denota la posición angular con respecto a la dirección vertical. Se impone al eje pivot  $E$  un movimiento dependiente del tiempo con componentes  $X(t)$  e  $Y(t)$ . El centro de masa del sistema está ubicado en el punto  $C$ . De la mecánica clásica de sistemas de partículas (Chow, 1995), los términos de energía cinética, potencial y disipativa pueden derivarse respectivamente como

$$T = \frac{1}{2} M \left\{ [Y' + l_C \theta' \sin(\theta + \varphi)]^2 + [X' + l_C \theta' \cos(\theta + \varphi)]^2 \right\} + \frac{1}{2} K_0 (\theta')^2, \tag{1}$$

$$V = gM [l_1 - l_C \cos(\theta + \varphi)], \quad D = \frac{1}{2} c_v (\theta')^2 \sum_{i=1}^N l_i^2,$$

donde  $g$  es la gravedad,  $\varphi = \arctan[(x'_C/y'_C)|_{\theta=0}]$  es el ángulo de fase del centro de masa  $C$  con respecto al brazo principal y  $l_C = (x'^2_C + y'^2_C)^{1/2}|_{\theta=0}$  es la distancia desde  $C$  hasta el punto  $E$ . En (1) se ha definido además  $M = \Sigma m_i$ . El factor  $K_0$  en (1) está asociado a la energía cinética relativa al centro de masa, y está dado por

$$K_0 = \sum_{i=1}^N \left\{ m_i \left[ l_i^2 + l_C^2 - 2l_i l_C \cos[(i-1)\psi - \varphi] \right] \right\}. \tag{2}$$

El coeficiente de fricción viscosa  $c_v$  en (1) se define como independiente de las diferentes formas de las  $N$  masas, considerando las mismas son muy similares entre sí. Introduciendo (1) en la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos de un grado de libertad, la ecuación de movimiento para  $X(t)$  e  $Y(t)$  arbitrarios se obtiene como

$$I\theta'' + c_v \theta' \sum_{i=1}^N l_i^2 + M l_C X'' \cos(\theta + \varphi) + M l_C (Y'' + g) \sin(\theta + \varphi) = 0, \tag{3}$$

donde se ha definido la inercia del sistema como  $I = K_0 + M l_C^2$ .

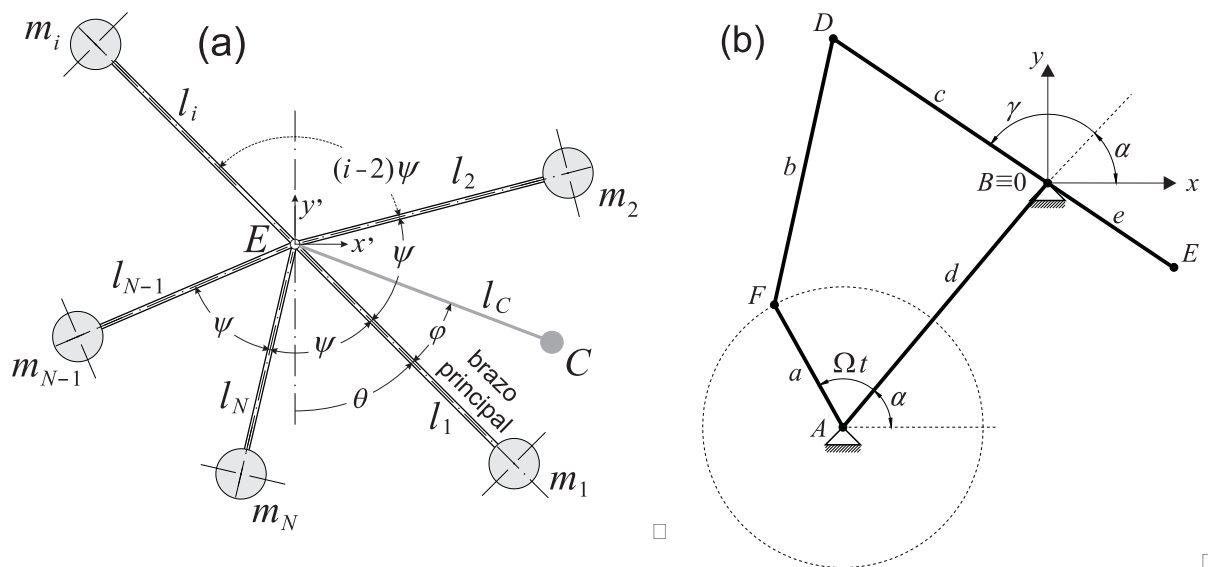


Figura 1: (a) Esquema del  $N$ -péndulo paramétrico. (b) Mecanismo plano de cuatro barras, correspondiente al mecanismo principal de la bomba de varilla.

La Figura 1b presenta un mecanismo de cuatro barras, representativo de una bomba de varilla. Un motor impone un movimiento angular a la manivela  $a$ , a una frecuencia angular constante  $\Omega$ . Entonces, el ángulo  $\beta = \Omega t$  denota la posición angular de dicha manivela. La posición instantánea del punto  $E$  se puede expresar (McCarthy y Soh, 2011) como

$$(X_E, Y_E) = -e \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot (\cos \gamma, \sin \gamma), \tag{4}$$

donde  $\alpha$  es un ángulo fijo que representa la inclinación del mecanismo con respecto a la horizontal y  $\gamma$  está dado por la ecuación

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \beta - \sqrt{[K_1 - K_3 - (1 - K_2) \cos \beta][ -K_1 - K_3 + (1 + K_2) \cos \beta ] + \operatorname{sen}^2 \beta}}{-K_1 + K_3 + (1 - K_2) \cos \beta}. \quad (5)$$

Dado que  $\beta = \beta(t)$ , entonces  $\gamma = \gamma(t)$ . Además, se definen las siguientes constantes asociadas al mecanismo:  $K_1 = d/a$ ,  $K_2 = d/c$  and  $K_3 = (a^2 - b^2 + c^2 + d^2)/(2 a c)$ .

Ahora, asumimos que el  $N$ -péndulo de la [Figura 1a](#) se monta en el punto  $E$  del mecanismo de cuatro barras de la [Figura 1b](#). Entonces, el movimiento impuesto al eje pivot del péndulo viene dado por  $(X, Y) = (X_E, Y_E)$ . Introduciendo (4) en (3), y después de manipulaciones algebraicas elementales, la forma adimensional de (3) se obtiene como

$$\ddot{\theta} + \eta \dot{\theta} + R f(\omega \tau) \cos(\theta + \varphi) + [R h(\omega \tau) + 1] \operatorname{sen}(\theta + \varphi) = 0, \quad (6)$$

donde los parámetros adimensionales de forzamiento se definen como  $\omega = \Omega/\omega_0$  y  $R = e \omega^2 M l_C/I$ , la frecuencia natural del sistema pendular corresponde a  $\omega_0 = (g M l_C/I)^{1/2}$  y el coeficiente de fricción adimensional a  $\eta = (c_v \Sigma l_i^2)/(I \omega_0)$ . Los puntos sobre algunos símbolos en (6) indican derivación con respecto al tiempo adimensional  $\tau = \omega_0 t$ . En (6), el forzado de entrada está representado por las funciones  $f(\omega t)$  y  $h(\omega t)$ , dadas por

$$f(\omega t) = \cos(\alpha + \gamma) \left( \frac{d\gamma}{d\beta} \right)^2 + \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \frac{d^2\gamma}{d\beta^2}, \quad (7)$$

$$h(\omega t) = -\cos(\alpha + \gamma) \frac{d^2\gamma}{d\beta^2} + \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \left( \frac{d\gamma}{d\beta} \right)^2.$$

La (6) puede simplificarse para obtener la ecuación gobernante del péndulo paramétrico clásico (es decir, con un forzamiento sinusoidal simple) ([Clifford y Bishop, 1995](#), [Dotti et al., 2015](#)), considerando  $f(\omega t) = 0$  y  $h(\omega t) = \cos(\omega t)$ .

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se explora la dinámica del  $N$ -péndulo paramétrico gobernado por (6). Tal ecuación se resuelve numéricamente mediante el método clásico de Runge-Kutta implementado en *Mathematica*. En lo que respecta a la recolección energética, la respuesta deseada corresponde a una rotación estable de período 1 (una rotación por cada período de carga, ya sea en sentido horario o antihorario). Entonces, el estudio se centra principalmente en obtener dicho estado estable del sistema.

La [Figura 2](#) muestra el comportamiento bifurcacional de un péndulo forzado paramétricamente por movimiento de cabeceo. La amplitud de forzamiento  $R$  varía entre 0 y 3, lo cual se asume como un rango operativo factible de un recolector pendular realista. La frecuencia de forzamiento  $\omega$  se fija en el estado de resonancia paramétrica principal ( $\omega = 2$ ). Los restantes parámetros también permanecen fijos, siendo sus valores elegidos en orden de representar un mecanismo realista de una bomba de varilla. La observación más llamativa es la asimetría de los atractores con respecto a  $\theta = 0$  (o  $\dot{\theta} = 0$ ). Este comportamiento difiere sustancialmente de lo que sucede con el péndulo paramétrico clásico ([Figura 3](#)), para el cual los atractores se presentan de una manera perfectamente simétrica. La simetría se rompe en el [Figura 2](#) debido a la presencia de la componente horizontal de excitación, relacionado con el término cosenoidal en la ecuación (6) ([Mann y Koplów, 2006](#); [Horton et al., 2011](#)). Para los atractores rotatorios, la asimetría implica que para algunos conjuntos de parámetros una rotación en sentido horario es una respuesta factible del sistema mientras que una rotación en sentido antihorario no lo es, y *viceversa*. Esto se observa claramente en la [Figura 2](#), en los rangos  $0.75 \leq R \leq 0.955$  y  $2.057 \leq R \leq 2.655$ .

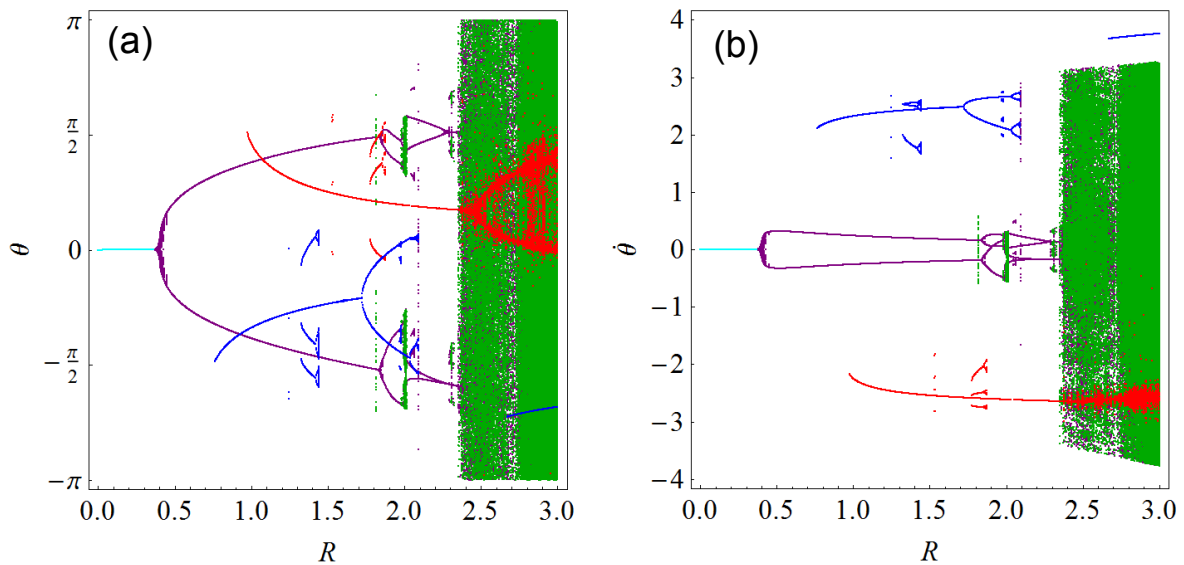


Figura 2: Diagrama de bifurcaciones para un estado de resonancia paramétrica ( $\omega = 2$ ), con  $\eta = 0.1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $K_1 = 2.94$ ,  $K_2 = 1.45$ ,  $K_3 = 2.06$ ,  $\alpha = 0.93$ . (a) Posición angular. (b) Velocidad angular. Referencia: (•): rotaciones horarias, (◐): rotaciones antihorarias, (◑): descanso, (◒): oscilaciones, (◓): caos.

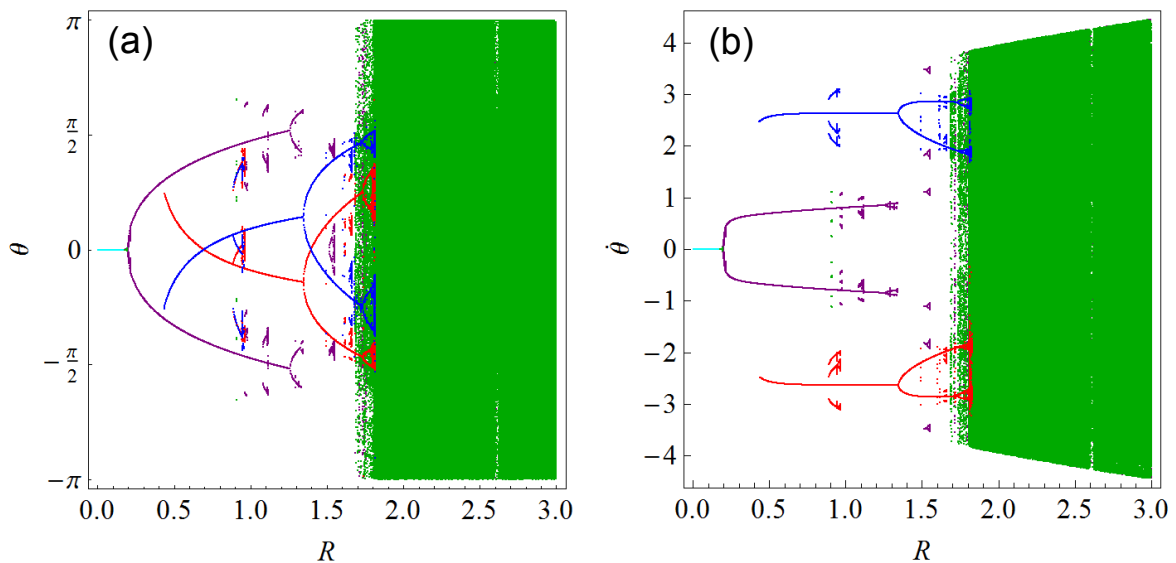


Figura 3: Diagrama de bifurcaciones para un estado de resonancia paramétrica ( $\omega = 2$ ) del péndulo paramétrico clásico, con  $\eta = 0.1$ . (a) Posición angular. (b) Velocidad angular. Referencia: (•): rotaciones horarias, (◐): rotaciones antihorarias, (◑): descanso, (◒): oscilaciones, (◓): caos.

Para un péndulo paramétrico con una excitación elíptica, [Horton et al. \(2011\)](#) mostraron que existe una dirección de rotación preferida (horaria o antihoraria) de acuerdo con la dirección de movimiento del punto pivot alrededor de la elipse. Se observa un comportamiento similar en la [Figura 2](#), ya que la rotación antihoraria se puede obtener para valores menores de  $R$  que las rotaciones horarias. Ahora bien, el punto pivot no tiene una dirección de rotación predominante en el caso bajo estudio. La preferencia se debe seguir al movimiento de la manivela  $a$  de la [Figura 1b](#), que se ha asumido con giro en sentido antihorario. De este modo, las rotaciones en sentido antihorario extraen más energía de la excitación.

Comparando las Figuras 2 y 3, se puede verificar que la excitación de cabeceo favorece al desarrollo de rotaciones del período 1, pudiéndose lograr tal respuesta en el rango  $0.75 \leq R \leq 2.35$  y  $2.7 \leq R \leq 3$ . Esto representa 63% del rango operativo asumido. Por otro lado, con una excitación sinusoidal, las rotaciones del período 1 son posibles solo para el 30% de dicho rango.

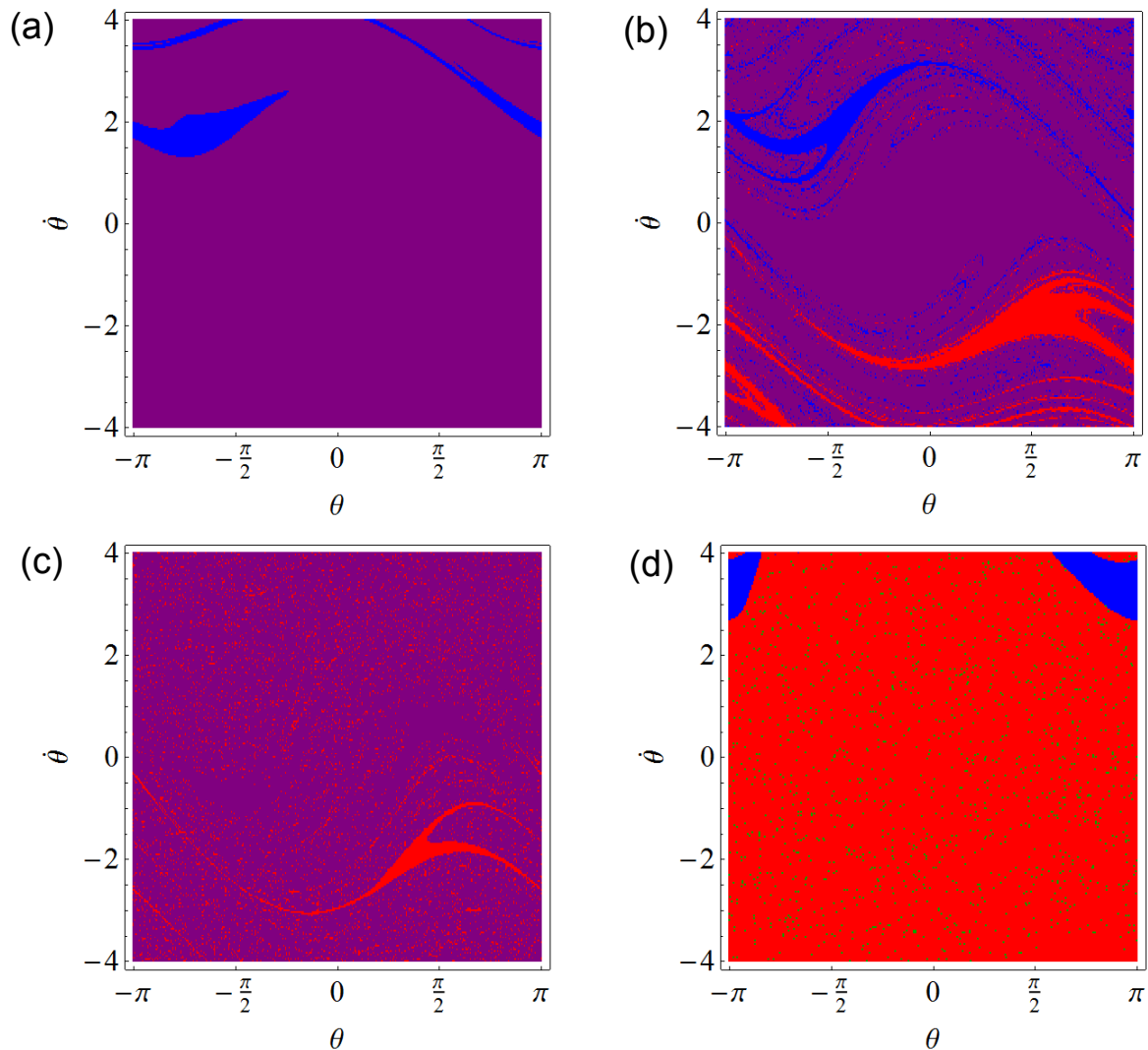


Figura 4: Cuencas de atracción para un estado de resonancia paramétrica ( $\omega = 2$ ) del péndulo paramétrico clásico, con  $\eta = 0.1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $K_1 = 2.94$ ,  $K_2 = 1.45$ ,  $K_3 = 2.06$ ,  $\alpha = 0.93$ . (a)  $R = 0.9$ . (b)  $R = 1.6$ . (c)  $R = 2.3$ . (d)  $R = 2.8$ . Referencia: (•): rotaciones horarias, (•): rotaciones antihorarias, (•): descanso, (•): oscilaciones, (•): caos.

Las cuencas de atracción, es decir, los conjuntos de condiciones iniciales que conducen a un atractor determinado, también muestran evidencia de tal asimetría. La Figura 4a presenta una situación en la que son posibles rotaciones en sentido antihorario pero no se observa una cuenca de rotaciones en sentido horario. En la Figura 4b, ambos atractores rotatorios están disponibles, pero sus cuencas son diferentes en términos de robustez: el 17.6% de las condiciones iniciales producen rotaciones en sentido horario, mientras que el 18.21% produce rotaciones en sentido antihorario. Los atractores también se hallan en diferentes etapas de fractalización en la Figura 4b. La rotación en sentido antihorario aparece primero y también desaparece primero, en una crisis en  $R \approx 2.1$ . En esa etapa, la rotación horaria de período 1 sigue siendo una respuesta factible. La Figura 4c ilustra dicha situación, con una cuenca

bastante robusta de rotaciones negativas.

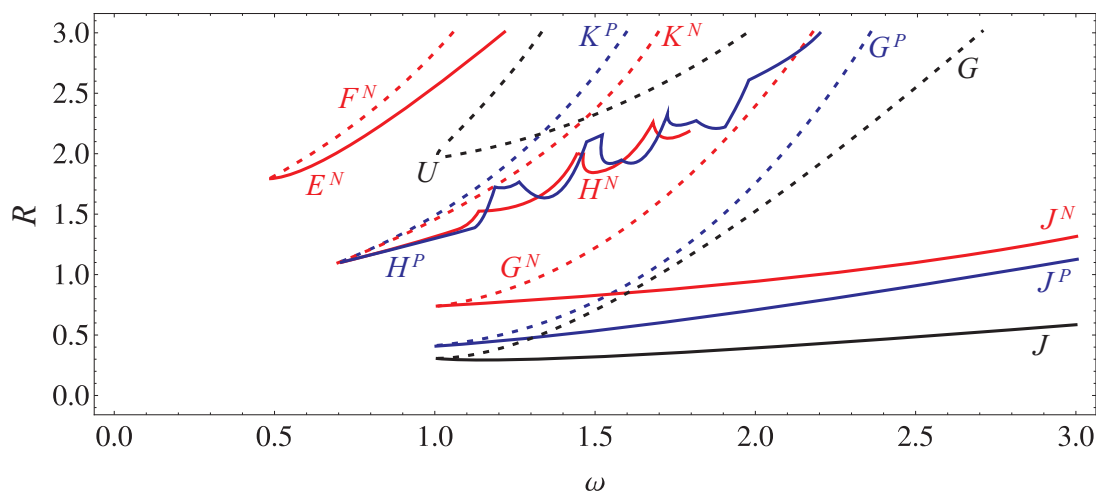


Figura 5: Espacio de parámetros  $R$ - $\omega$ , con  $\eta = 0.1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $K_1 = 2.94$ ,  $K_2 = 1.45$ ,  $K_3 = 2.06$ ,  $\alpha = 0.93$ . Las curvas de bifurcación corresponden a: (—): rotaciones horarias (negativas) debidas a excitación por cabeceo, (---): rotaciones antihorarias (positivas) debidas a excitación por cabeceo, (---): rotaciones del péndulo paramétrico clásico, con  $\eta = 0.1$ .

La Figura 2 evidencia una coexistencia de rotaciones y caos, para  $2.65 \leq R \leq 3$ . En la resonancia principal, tal característica no es posible con una simple excitación sinusoidal. La cuenca asociada se muestra en la Figura 4d. Se pueden alcanzar fácilmente rotaciones en sentido antihorario con altas velocidades iniciales, dado que la cuenca es muy robusta. Pero la mayoría de las condiciones iniciales permiten obtener una respuesta rotatoria horaria de período 2, después de transitorios caóticos largos (Szemplinska-Stupnicka et al., 2000). El caos es en este caso muy difícil de lograr como respuesta estacionaria.

Para obtener una imagen global de la dinámica de las rotaciones de período 1, se construye un espacio de parámetros en el plano  $R$ - $\omega$ , para una excitación de cabeceo (Figura 5). El comportamiento bifurcacional del péndulo paramétrico clásico también se incluye en la Figura 5 (curvas  $J$ ,  $G$  y  $U$ , en negro). Al aumentar  $R$  desde valores pequeños, las rotaciones de período 1 nacen en una bifurcación silla nodo (indicado por  $J$ ,  $J^P$  y  $J^N$ ) y pierden estabilidad en una bifurcación de *flip* (duplicación de período; curvas  $G$ ,  $G^P$  y  $G^N$ ). Al aumentar aún más  $R$ , las rotaciones de período 1 recobran la estabilidad en las zonas de rotación intermedias delimitadas por las curvas  $H^N$ - $K^N$  y  $H^P$ - $K^P$ , que presentan límites fractales. Las rotaciones coexisten con el caos en este punto, y el sistema exhibe una sensibilidad de estado final: variaciones mínimas del estado inicial pueden modificar el atractor finalmente elegido como respuesta estacionaria (Thompson y Stewart, 2003). Para  $R > 2.1$ , las rotaciones horarias se alcanzan después de períodos muy largos de caos transitorio, junto a la curva  $H^N$ . Dados sus límites fractales, dicha curva no pudo identificarse claramente en estos cálculos, y se requiere una investigación más profunda. Para valores altos de amplitud de forzamiento, se obtiene un área pequeña de rotaciones horarias, delimitada por las curvas  $E^N$  y  $F^N$ .

La Figura 5 indica que el valor de  $R$  requerido para obtener rotaciones estables es más alto si el forzamiento es por cabeceo, en comparación con un simple senoidal. Horton et al. (2011) obtuvieron un resultado diferente para una excitación elíptica. Sin embargo, probablemente las curvas  $J^P$  y  $J^N$  dependen de las dimensiones del mecanismo de cuatro barras, que no se han modificado en este estudio. Por lo tanto, esta observación no debe tomarse como una conclusión final.

#### 4 CONCLUSIONES

Este artículo tiene como objetivo contribuir al desarrollo de sistemas pendulares para la extracción de energía en pequeña escala de bombas de varilla, comunes en la industria petrolera. Así, se abordó la dinámica del  $N$ -péndulo paramétrico con una excitación externa proporcionada por el movimiento de cabeceo de un mecanismo de cuatro barras.

El movimiento de cabeceo no solo tiene un componente vertical sino también horizontal, lo que produce un escenario de ruptura de simetría, generando diferencias sustanciales con respecto al péndulo paramétrico clásico con una excitación sinusoidal. Aparecen nuevos atractores rotatorios de período 1 que no son posibles con una excitación sinusoidal. Esto implica que más combinaciones de los parámetros de excitación permiten el movimiento de rotación, lo que aumenta las posibilidades de extracción de energía.

Con un diseño adecuado, basado en una configuración correcta de parámetros de excitación y fricción, se pueden alcanzar y predecir fácilmente rotaciones estables para un recolector pendular. Este diseño adecuado no representa un problema complejo siendo la excitación armónica.

#### 5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del CONICET, la ANPCyT, la CIC de la Provincia de Buenos Aires y la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UTN.

#### REFERENCIAS

- Chow, T., *Classical mechanics*. John Wiley & Sons, New York, United States, 1995.
- Clifford, M.J. y Bishop, S.R., Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A* 201:191-196, 1995.
- Dotti, F.E., Reguera, F. y Machado, S.P., A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> PANACM*, 1516-1529, Buenos Aires, Argentina, 2015.
- Dotti, F.E., Reguera, F. y Machado, S.P., Rotations of the parametric pendulum excited by a reciprocating motion with a view on energy harvesting, *Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics DINAME 2017*, São Sebastião, Brasil, 2017.
- Horton, B., Sieber, J.M. y Wiercigroch, M., Dynamics of the nearly parametric pendulum. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46:436-442, 2011.
- Mann, B.P. y Koplow, M.A., 2006, Symmetry breaking bifurcations of a parametrically excited pendulum. *Nonlinear Dynamics* 46:427-437, 2006.
- McCarthy, J.M. y Soh, G.S., *Geometric design of linkages*. Springer, New York, United States, 2011.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M. y Chatterjee, A., Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications* 43:7-14, 2012.
- Reguera, F., Dotti, F.E. y Machado, S.P., 2016, Rotation control of a parametrically excited pendulum by adjusting its length. *Mechanics Research Communications* 72:74-80, 2016.
- Szemplinska-Stupnicka, W., Tyrkiel, E. y Zubrzycki, A., The global bifurcations that lead to transient tumbling chaos in a parametrically driven pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 10(9):2161-2175, 2000.
- Thompson, J.M. y Stewart, H.B., *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, West



Sussex, England, 2003.

Wiercigroch, M., *A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum*.  
UK Patent Application, 2010.

Yurchenko, D. y Alevras, P., Dynamics of the  $N$ -pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control* 1(4):290-299, 2013.