

LA FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE REINYECCIÓN EN INTERMITENCIA CAÓTICA

THE REINJECTION PROBABILITY DENSITY FUNCTION IN CHAOTIC INTERMITTENCY

Sergio Elaskar^{a,b} y Ezequiel del Río^b

^a*Dto. Aeronáutica, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba e Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, CONICET, Córdoba, Argentina*

^b*Dto. de Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España*

Palabras clave: Intermittencia, caos, mapas.

Resumen. Intermittencia caótica es una ruta hacia el caos donde las soluciones del sistema presentan transiciones entre fases regulares y caóticas. Las fases regulares o laminares son regiones de pseudo-equilibrio y/o soluciones pseudo-periódicas. Se ha observado intermitencia en varios sistemas fluido dinámicos tales como flujos atmosféricos, convección, turbulencia, plasmas, etc. Para describir correctamente el fenómeno de intermitencia caótica es importante evaluar de forma precisa la función densidad de probabilidad de reinyección (RPD). Se destaca que la evaluación experimental o numérica de la función RPD no es una tarea simple debido a la gran cantidad de datos necesarios, por lo tanto se han usado diversos enfoques para obtenerla. De estos la formulación clásica, que considera reinyección uniforme, ha sido la más empleada. Sin embargo, en los últimos años se ha introducido una nueva formulación para obtener la RPD, llamada metodología de función M , que incluye a la reinyección uniforme sólo como un caso particular. En este trabajo se describe esta metodología y sus fundamentos teóricos. Finalmente se muestran ejemplos numéricos.

Keywords: Intermittency, chaos, maps.

Abstract. Chaotic intermittency is a route to chaos where system solutions present transitions between regular and chaotic phases. The regular phases are regions of pseudo-equilibrium and/or pseudo-periodic solutions. Intermittency has been observed in various fluid dynamic systems such as atmospheric flows, convection, turbulence, plasma, etc. Accurate evaluation of the reinjection probability density (RPD) function is extremely important to correctly describe this phenomenon. It is emphasized that the experimental or numerical evaluation of the RPD function is not a simple task due to the large amount of data required. Various approaches have been used to obtain the RPD function. The most employed has been the classical formulation, which uses uniform reinjection. In recent years, a new formulation has been introduced to obtain the RPD, called the M function methodology, which includes uniform reinjection as a particular case. In this work this methodology is described. Finally, numerical examples are studied.

1. INTRODUCCIÓN

Numerosos fenómenos, procesos y mecanismos son modelados por sistemas dinámicos que pueden evolucionar hacia comportamientos caóticos utilizando diferentes rutas, una de las cuales es la intermitencia caótica. El fenómeno de intermitencia tiene aplicaciones en distintos sistemas fluido dinámicos tales como flujos atmosféricos, convectivos, turbulencia, plasmas, etc (Dubois et al., 1983; Sánchez-Arriaga et al., 2007). Por tal motivo, una comprensión más completa y precisa del mismo, ayudará a incrementar nuestro conocimiento y descripción de los mismos.

La intermitencia caótica se caracteriza porque soluciones del sistema dinámico alternan fases de comportamiento caótico con fases laminares o regulares que corresponden a regiones de pseudo-equilibrio o soluciones pseudo-periódicas (Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017; Schuster y Just, 2005). La teoría clásica de intermitencia fue desarrollada aproximadamente hace 40 años (Manneville y Pomeau, 1979; Hirsch et al., 1982). Dicha teoría clasificó a la misma en tres tipos: I, II y III según los multiplicadores de Floquet de la órbita periódica o los valores propios en el mapa local de Poincaré. Para un sistema que depende en forma continua del tiempo, intermitencia de tipo I surge en una bifurcación de *cyclic-fold*, por medio del colapso de una órbita estable y una inestable. En mapas, intermitencia de tipo I se produce mediante una bifurcación tangente inversa, en este caso, un valor propio sale del círculo unitario a través de $+1$. Intermitencia tipo II comienza en una bifurcación subcrítica de Hopf, de modo que dos multiplicadores de Floquet complejos conjugados o dos valores propios complejos conjugados del mapa de Poincaré local salen del círculo unitario. Finalmente, la intermitencia de tipo III está relacionada con una bifurcación de duplicación de período subcrítica, es decir un multiplicador de Floquet sale del círculo unitario a través de -1 .

Los mapas unidimensionales se utilizan ampliamente para estudiar intermitencia caótica (Schuster y Just, 2005; Hirsch et al., 1982), se seguirá dicha línea de trabajo en el artículo. Los mapas que muestran intermitencia se caracterizan por poseer tanto un mapa local como un mapa no lineal que gobierna el proceso de reinyección, es decir que permite a la trayectoria regresar desde la región caótica hacia la laminar repetidas veces, por lo tanto la trayectoria regresa cerca del punto fijo inestable o que ha desaparecido. El mapa local determina el tipo de intermitencia (I, II y III), mientras que el mecanismo de reinyección es el que permite el regreso de las trayectorias desde la región caótica hacia la laminar. Para cuantificar el proceso de reinyección se emplea la función de densidad de probabilidad de reinyección (RPD) (Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017; Schuster y Just, 2005). Esta función expresa la probabilidad de que las trayectorias sean reinyectadas en distintos puntos de la zona laminar, por lo tanto la correcta evaluación de la misma es fundamental para describir con precisión la intermitencia caótica. La teoría clásica considera reinyección uniforme (RPD constante) (Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Schuster y Just, 2005; Hirsch et al., 1982). En los últimos diez años se ha desarrollado una nueva teoría más general para calcular la función RPD, la cual ha encontrado que la función RPD tiene un comportamiento más amplio que el dado por la teoría clásica, siendo ésta sólo un caso particular. La nueva teoría ha mostrado precisión en numerosos mapas con intermitencias tipo I, II, III y V, tanto sea con y sin ruido (Elaskar y del Río, 2017; del Río y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Río et al., 2012; Elaskar y del Río, 2012; del Río et al., 2013, 2014; Krause et al., 2014a,b; Elaskar et al., 2015; del Río y Elaskar, 2016a; Elaskar et al., 2016; del Río y Elaskar, 2016a; Elaskar et al., 2017; Elaskar, 2018; del Río y Elaskar, 2018; Elaskar et al., 2018a,b; Elaskar y del Río, 2018; del Río y Elaskar, 2019, 2020; Elaskar et al., 2021; del Río y Elaskar, 2021).

En este trabajo se describen tanto los conceptos teóricos fundamentales en los que se sustenta la nueva teoría, como la metodología para calcular la función RPD desde una serie de datos. Finalmente se describen ejemplos numéricos en los cuales la teoría muestra su precisión.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Como se expresó en la sección anterior, se analiza el fenómeno de intermitencia caótica en mapas 1D, $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La densidad de probabilidad de reinyección (RPD) determina la probabilidad que las trayectorias sean reinyectadas en diferentes puntos del intervalo laminar y depende de la forma particular del mapa $F(x)$. En primer lugar se describe la relación entre la RPD y la medida de probabilidad, $P(z)$ en un intervalo $z \subset [0, 1]$

$$P(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N I_z(x_n) \quad (1)$$

donde $I_z(x)$ es la función característica: $I_z(x) = 1$, if $x \in z$ or $I_z(x) = 0$, if $x \notin z$.

La medida de probabilidad indica el tiempo que la trayectoria pasa en el intervalo correspondiente del atractor, y está relacionada con la densidad invariante $\rho(x)$ por $P(z) = \int_z \rho(x) dx$. En nuestro contexto $P([0, 1]) = 1$. El intervalo laminar se define como L y s es un subintervalo en la zona laminar $z \subset L$. Antes de considerar la probabilidad $P(z)$ dada por la Ec. (1), la serie de datos se divide en tres subconjuntos

$$\{x_n\} = \{x_{n'}\} \cup \{x_{n''}\} \cup \{x_{n'''}\} \quad (2)$$

y se destaca que entre ellos no hay intersección

$$\{x_{n'}\} \cap \{x_{n''}\} = \{x_{n''}\} \cap \{x_{n'''}\} = \{x_{n'''}\} \cap \{x_{n'}\} = \emptyset \quad (3)$$

Los puntos $x_{n'}$ verifican que $x_{n'} \in z$ y además ya estaban allí en la iteración previa, entonces se tiene que $I_z(x_{n'}) = 1$ y $I_z(x_{n'-1}) = 1$. Además $x_{n''} \in z$ pero en la iteración previa no estaban allí $I_z(x_{n''}) = 1$ y $I_z(x_{n''-1}) = 0$. Finalmente, $x_{n'''} \notin z$. Entonces, la probabilidad $P(s)$ resulta

$$P(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N I_z(x_{n'}) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N I_z(x_{n''}) \quad (4)$$

El primer término en la Ec. (4) es la probabilidad de que la trayectoria se encuentre en z si en la iteración anterior ya estaba allí. Si consideramos que $z = L$, entonces solamente el segundo término del lado derecho de la Ec. (4) define la RPD, llamada aquí $\phi(x)$, por la siguiente relación

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N I_L(x_{n''}) = \lambda \int_L \phi(x) dx \quad (5)$$

λ se introduce porque la función $\phi(x)$ se normaliza en el intervalo L

$$\int_L \phi(x) dx = 1 \quad (6)$$

La función $\phi(x)$ determina las características fundamentales de la intermitencia caótica, como la densidad de probabilidad de longitudes laminares y el exponente característico usado para identificar el tipo de intermitencia.

Por otra parte y con la finalidad de establecer conceptos, se introduce un mapa definido en $[0, 1]$ que posee intermitencia tipo II

$$x_{n+1} = F(x_n) \equiv \begin{cases} F_1(x_n) = (1 + \varepsilon)x + (1 - \varepsilon)x^p, & x_n < x_r \\ F_2(x_n) = (F_1(x_n) - 1)^\gamma, & x_n \geq x_r \end{cases} \quad (7)$$

x_r es la raíz de la ecuación $F_1(x_r) = 1$. F_1 gobierna la dinámica alrededor de la zona laminar, mientras que F_2 determina el mecanismo de reinyección desde la región caótica hacia la laminar. El mapa tiene un punto fijo, $x_0 = 0$, que es inestable si $\varepsilon > 0$, y para $0 < \varepsilon \ll 1$ existe intermitencia tipo II. Se destaca que para $\gamma = 1$ se restablece el mapa original estudiado por Manneville (Manneville, 1980). Por otra parte, para $\gamma \neq 1$ es interesante estimar algunas características de $\phi(x)$ en una vecindad de $x = 0$. Teniendo en cuenta que todos los puntos reinyectados en la región laminar, definida por el intervalo $L = [0, c]$, provienen de puntos cercanos a x_r , como muestra la flecha verde en la Figura 1. Es decir, para $x' > x_r$, todos los puntos en el intervalo $(x', x' + \Delta x')$ mapean directamente en el intervalo $(F_2(x'), F_2(x' + \Delta x'))$. Entonces, usando el operador de Perron-Frobenius (Elaskar y del Río, 2017) se tiene

$$\phi(x) = \frac{k \rho(x')}{F_2'(x')} \quad (8)$$

donde $F_2'(x') = dF_2(x')/dx'$. El factor k se introduce porque la densidad $\rho(x)$ se normaliza en todo el intervalo $[0, 1]$, mientras que $\phi(x)$ se normaliza sólo en el intervalo laminar, es decir, $\int_0^c \phi(\tau) d\tau = 1$. Si se evalúa la expresión (8) con la función Ec. (7) se encuentra que

$$\phi(x) = \frac{k \rho(x')}{\gamma F_1'(x')} x^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad (9)$$

con $F_1'(x') = dF_1(x')/dx'$, y se ha hecho uso de

$$x = F_2(x') = (F_1(x') - 1)^\gamma \Rightarrow F_1(x') = x^{1/\gamma} + 1 \quad (10)$$

Por ser el intervalo laminar una zona pequeña alrededor del punto fijo, es razonable considerar una aproximación lineal de $F_1(x')$ en el intervalo $(x_r, F_2^{-1}(c))$ y entonces aproximar a $F_1'(x')$ como una constante. Además, si la densidad $\rho(x')$ es también considerada constante, se obtiene

$$\phi(x) = \lambda x^\alpha \quad \text{where} \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} - 1. \quad (11)$$

donde λ está dada por la Ec. (6).

Esta última ecuación indica que la RPD posee un comportamiento más amplio que el de la reinyección uniforme, siendo ésta sólo un caso particular cuando $\alpha = 0$. Se destaca que la función PRD dependerá en gran medida del exponente γ , que determina la curvatura del mapa en la región marcada por segmentos de colores en la Figura 1. Sólo los puntos en esa región serán mapeados dentro de la región laminar.

3. METODOLOGÍA DE LA FUNCIÓN M

Dado el marco teórico establecido en la sección previa, se introduce en esta sección una metodología de cálculo de la función RPD usando valores obtenidos en experimentos o simulaciones numéricas, sin la necesidad de conocer el mapa.

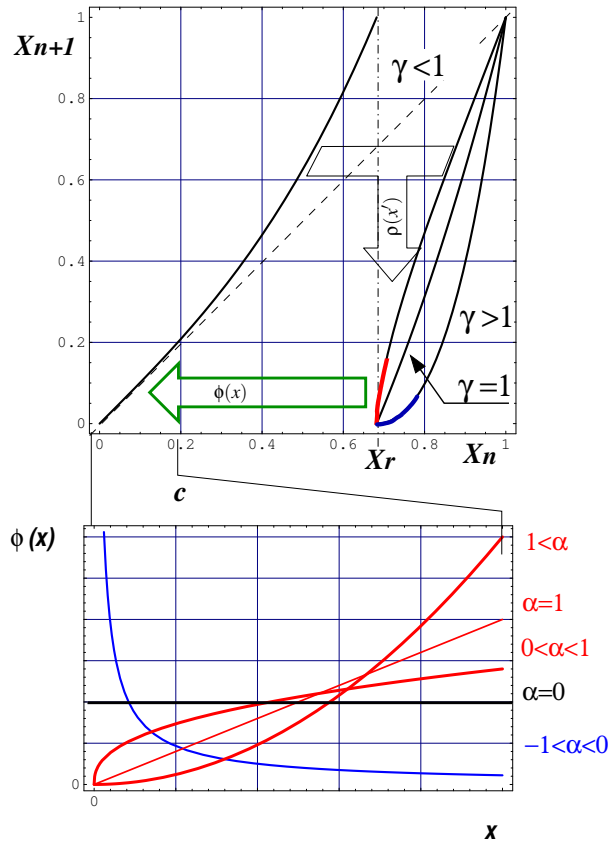


Figura 1: Figura superior: Mapas definidos por las ecuación (7) con intermitencia tipo II. También se indican tres mecanismos de reinyección para diferentes valores de γ . Figura inferior: RPD de la Ec. (11) definida en el intervalo laminar $(0, c)$. Las RPDs tienen el mismo color que la región donde se generan en el mapa en de la figura superior.

Como la función RPD es una ley de potencias, Ec. (11), el punto clave para resolver el problema del ajuste del modelo es introducir la siguiente integral:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{\int_{x_t}^x \tau \phi(\tau) d\tau}{\int_{x_t}^x \phi(\tau) d\tau} & \text{if } \int_{x_t}^x \phi(\tau) d\tau \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

donde x_t es un punto inicial de integración. Se demuestra que la función $M(x)$ es una función lineal para una RPD dada por la Ec. (11), por lo tanto la función $M(x)$ es una herramienta fundamental para encontrar los parámetros \hat{x} y α que determinan la función RPD (Elaskar, 2018).

La evaluación de la función $M(x)$ se lleva a cabo mediante el integral dado por la Ec. (12), por lo tanto su cálculo numérico es más robusto que la evaluación directa de la función RPD porque permite reducir las fluctuaciones estadísticas inclusive para un número bajo de datos y reducir la influencia del ruido (del Río et al., 2012).

En la práctica la función $M(x)$ es calculada desde una serie de datos que pueden ser obtenidos mediante simulaciones numéricas o desde estudios experimentales. Además, se destaca que la Ec. (12) es un promedio sobre los puntos de reinyección en el intervalo (x_t, x) , por lo que se puede escribir

$$M(x) = M_j \equiv \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j x_k, \quad x_{j-1} < x \leq x_j \quad (13)$$

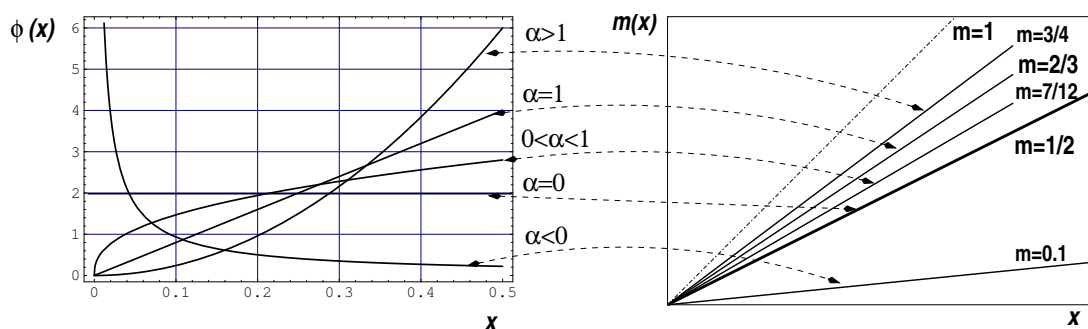


Figura 2: RPDs para diferentes valores de α mostrando funciones decrecientes y no decrecientes. La línea discontinua representa el valor límite $m = 1$.

donde el conjunto de datos obtenidos para un número N de puntos de reinyección, $\{x_j\}_{j=1}^N$ ha sido previamente ordenado de menor a mayor, es decir, $x_j \leq x_{j+1}$. Para la función RPD dada por la Ec. (11), la definición (12) establece que la función $M(x)$ sigue una ley lineal

$$M(x) = \begin{cases} m(x - \hat{x}) + \hat{x} & \text{if } x \geq \hat{x} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

donde $m \in (0, 1)$ es un parámetro y \hat{x} puede ser aproximado por $\hat{x} \approx \inf\{x_j\}$. Por lo tanto, si se usa la Ec. (12) la función RPD resulta

$$\phi(x) = \lambda(\alpha)(x - \hat{x})^\alpha, \quad \text{with } \alpha = \frac{2m - 1}{1 - m}, \quad (15)$$

$\lambda(\alpha)$ es la constante de normalización que satisface

$$\int_L \phi(x) dx = 1, \quad (16)$$

donde L es la longitud del intervalo laminar.

Si se emplea la aproximación por mínimos cuadrados se puede estimar el parámetro m en la Ec. (14) y con el mismo determinar la función RPD por medio de las Ecs. (15) y (16).

La Figura (2) muestra diferentes funciones RPD dependiendo del exponente α para $\hat{x} = 0$ y $c = 0,5$. También se muestra cómo α depende de la pendiente m de acuerdo con la Ec. (15).

Cuando $m = 1/2$ se recupera la formulación clásica de intermitencia caótica que considera a la función RPD como uniforme, es decir $\phi(x) = \text{cte}$. Por otra parte, para $m < 1/2$ se tiene que $\alpha < 0$ y la función RPD tiende hacia infinito para $x \rightarrow 0$ como se muestra en la Figura (2). En el caso contrario, $m > 1/2$, la función RPD verifica que $\phi(0) = 0$. En este último caso, hay dos posibilidades, que la RPD sea cóncava o convexa, que están separadas por la pendiente $m = 2/3$ (ver Figura 2). Además, la función RPD dada por la Ec. (15) posee dos casos límites:

$$\phi_0(x) = \lim_{m \rightarrow 0} \phi(x) = \delta(x - \hat{x}), \quad \phi_1(x) = \lim_{m \rightarrow 1} \phi(x) = \delta(x - c) \quad (17)$$

Se destaca que $\lambda(\alpha) \rightarrow 0$ in ambos casos.

4. RESULTADOS

En esta sección se presentan resultados de la teoría explicada en las secciones anteriores. Se estudian dos mapas, uno con intermitencia tipo III y otro con intermitencia tipo I.

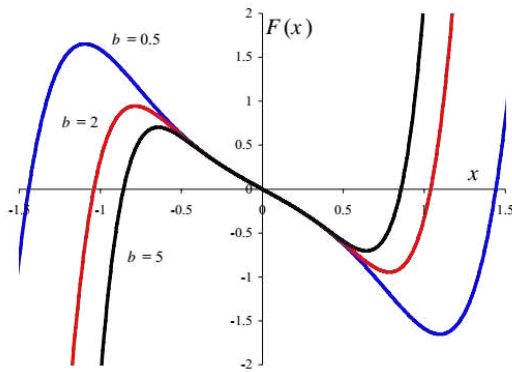


Figura 3: Mapa con intermitencia tipo III dado en la Ec. (18) para distintos valores de b con $a = 1$ y $c = 6$.

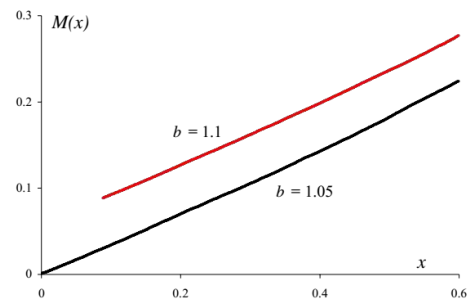


Figura 4: Función M para el mapa dado por la Ec. (18) con $b = 1,05 - 1,1$, $a = 1$ y $c = 6$.

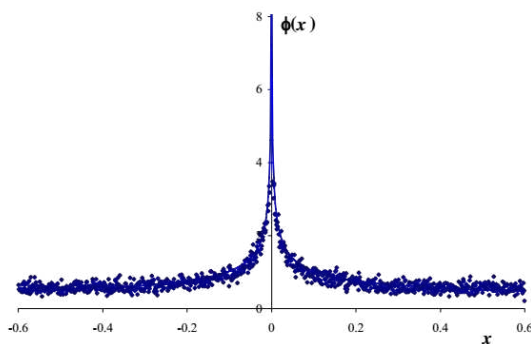


Figura 5: RPD para el mapa dado por la Ec. (18) con $b = 1,05 - 1,1$, $a = 1$ y $c = 6$.

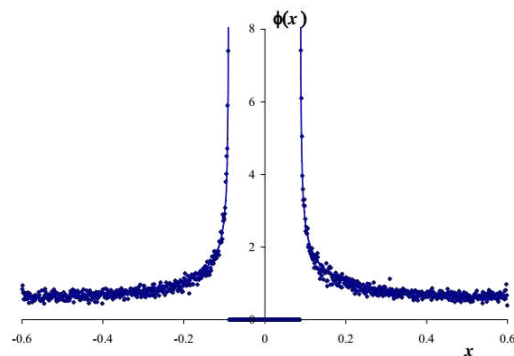


Figura 6: RPD para el mapa dado por la Ec. (18) con $b = 1,05 - 1,1$, $a = 1$ y $c = 6$.

El mapa que muestra intermitencia tipo III es el siguiente

$$F(x) = -(1 + \varepsilon)x - ax^3 + bx^c \sin(x) \tag{18}$$

donde $x_0 = 0$ es un punto fijo del mapa. Para $0 < \varepsilon \ll 1$ el punto fijo pierde su estabilidad e intermitencia tipo III aparece. En la Figura 3 se muestra el mapa para distintos valores del parámetro b .

La función $M(x)$ es indicada en la Figura 4 para dos valores de b . Para $b = 1,05$ el valor mínimo de reinyección coincide con el punto fijo inestable, mientras que para $b = 1,1$ se verifica que $\hat{x} > x_0$. Para el cálculo de dichas funciones $M(x)$ se ha implementado la Ec. (13). Se observa que ambas $M(x)$ son funciones lineales, por lo tanto la función RPD estará dada por la Ec. (15). La Figuras (5) y (6) muestran las funciones $\phi(x)$ correspondientes. Las curvas continuas son las RPDs calculadas con la formulación teórica aquí presentada y los puntos son datos numéricos. Para la obtención de los valores numéricos se genera un proceso iterativo para el mapa en estudio, además se divide el intervalo laminar en subintervalos N_s , para luego calcular el histograma de las reinyecciones y la función RPD numérica.

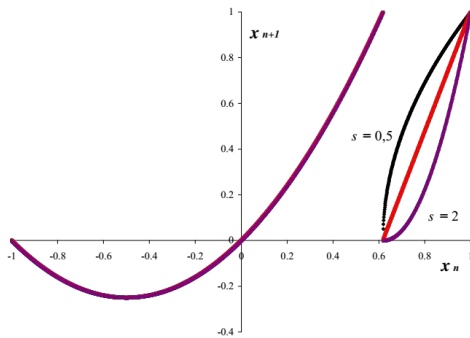


Figura 7: Mapa con intermitencia tipo I dado en la Ec. (19) para distintos valores de s con $a = 1$.

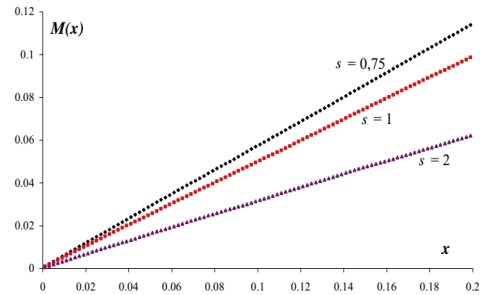


Figura 8: Función M para el mapa dado por la Ec. (19) con $s = 0,75 - 1 - 2$ y $a = 1$.

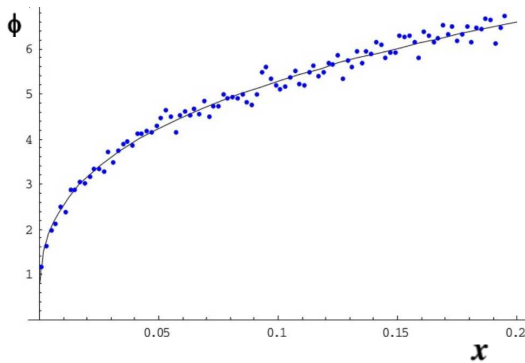


Figura 9: RPD para el mapa dado por la Ec. (19) con $\gamma = 0,75$ y $a = 1$.

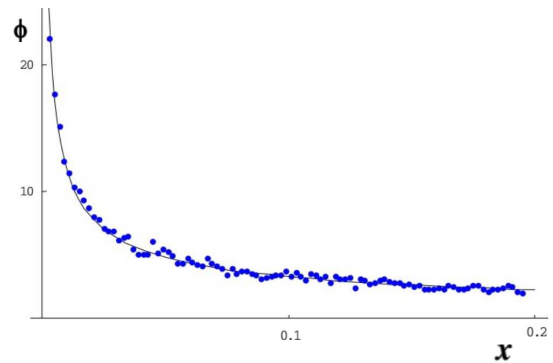


Figura 10: RPD para el mapa dado por la (19) con $\gamma = 2$ y $a = 1$.

También se analiza el proceso de reinyección para intermitencia tipo I por medio del siguiente mapa

$$F(x) = \begin{cases} \varepsilon + x + ax^2 & \text{if } x \geq x_r \\ \left(\frac{x-x_r}{1-x_r}\right)^s & \text{if } x < x_r \end{cases} \quad (19)$$

donde x_r verifica $\varepsilon + x_r + ax_r^2 = 1$. Para $\varepsilon < 0$ el punto x_0 es un punto fijo estable, el cual desaparece para $\varepsilon > 0$ generando el canal característico de intermitencia tipo I que aparece luego de una bifurcación tangente. La Figura 7 muestra el mapa para distintos exponentes s . Las Figuras 19, 9 y 10 muestran las funciones $M(x)$ y $\phi(x)$ para distintos valores del exponente s . Las líneas continuas son los resultados teóricos y los puntos los datos numéricos. En todos los casos se observa una muy buena concordancia.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado en este trabajo, de forma resumida, los conceptos fundamentales en los que se sustenta la nueva teoría de intermitencia caótica. Además los resultados obtenidos son comparados con datos numéricos encontrándose una muy buena concordancia.

La teoría clásica de intermitencia utiliza la hipótesis de RPD constante (Nayfeh y Balachan-

dran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017; Schuster y Just, 2005). La teoría aquí explicada considera una hipótesis menos restrictiva de densidad constante en los puntos que gobiernan el proceso de reinyección, es decir en los puntos de pre-reinyección, obteniendo que la RPD puede ser representada por una función exponencial dada por la Ec. (15) (Elaskar y del Río, 2017; del Río y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Río et al., 2012; Elaskar y del Río, 2012; del Río et al., 2013, 2014; Krause et al., 2014a,b; Elaskar et al., 2015; del Río y Elaskar, 2016a,b; Elaskar et al., 2016; del Río y Elaskar, 2016a; Elaskar et al., 2017, 2018a,b; Elaskar, 2018; del Río y Elaskar, 2018; Elaskar et al., 2018a; Elaskar y del Río, 2018; del Río y Elaskar, 2019, 2020; Elaskar et al., 2021; del Río y Elaskar, 2021). Esta teoría ha permitido describir un comportamiento más amplio del proceso de reinyección y por ende del fenómeno de intermitencia, siendo la teoría clásica sólo un caso particular de la nueva.

Además, es importante destacar que algunos casos denominado anómalos y que la teoría clásica no pudo explicarlos son solamente casos particulares en la nueva formulación de intermitencia caótica (Elaskar y del Río, 2017; del Río et al., 2013). Es decir, la nueva teoría explica y describe estos casos con mucha precisión.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por SECyT de la UNC. Los autores también agradecen al IDIT, al Dto. de Aeronáutica de la UNC y al Dto. de Física de la ETSIAE, UPM.

REFERENCIAS

- del Río E. y Elaskar S. New characteristic relation in type ii intermittency. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 20:1185–1191, 2010.
- del Río E. y Elaskar S. The intermittency route to chaos. *Handbook of Applications of Chaos Theory*. Christos H. Skiadas, Charilaos Skiadas, Eds. CRC Press Book, ISBN 9781466590434. Paris, 1:3–20, 2016a.
- del Río E. y Elaskar S. On the intermittency theory. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 26:1650228, 2016b.
- del Río E. y Elaskar S. Experimental evidence of power law reinjection in chaotic intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 64:122–134, 2018.
- del Río E. y Elaskar S. New type of intermittency in discontinuous maps. *Proc. of the Internat. Conf. Theoretical Approaches in Non-Linear Dynamical Systems*, 1:97–109, 2019.
- del Río E. y Elaskar S. Experimental results versus computer simulations of noisy Poincaré maps in an intermittency scenario. *Regular and Chaotic Dynamics*, 25:281–294, 2019.
- del Río E. y Elaskar S. Type III intermittency without characteristic relation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31:043127, 2021.
- del Río E., Elaskar S., y Donoso J. Laminar length and characteristic relation in type i intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 19:967–976, 2014.
- del Río E., Elaskar S., y Makarov S. Theory of intermittency applied to classical pathological cases. *Chaos*, 19:967–976, 2013.
- del Río E., Sanjuán M., y Elaskar S. Effect of noise on the reinjection probability density in intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17:3587–3596, 2012.
- Dubois M., Rubio M., y Berge P. Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1446–1449, 1983.
- Elaskar S. *Studies on Chaotic Intermittency*. Doctoral Thesis, Universidad Politécnica de Madrid, Spain, 2018.

- Elaskar S. y del Río E. Intermittency reinjection probability function with and without noise effects. *Latest Trends in Circuits, Automatics Control and Signal Processing. ISBN: 978-1-61804-131-9, Barcelona*, 1:145–154, 2012.
- Elaskar S. y del Río E. *New Advances on Chaotic Intermittency and its Applications*. Springer, 2017.
- Elaskar S. y del Río E. Discontinuous reinjection probability density function in type v intermittency. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 13:121001–10, 2018.
- Elaskar S., del Río E., y Costa A. Reinjection probability density for type iii intermittency with noise and lower boundary of reinjection. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 12:031020–11, 2017.
- Elaskar S., del Río E., y Donoso J. Reinjection probability density in type iii intermittency. *Physica A*, 390:2759–2768, 2011.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. Non-uniform reinjection probability density function in type v intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 92:683–697, 2018a.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. Some characteristics of the m function methodology to describe the reinjection process in chaotic intermittency. *Open Access J. Math. Theor. Phys.*, 1:168–173, 2018b.
- Elaskar S., del Río E., Krause G., y Costa A. Effect of the lower boundary of reinjection and noise in type ii intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 79:1411–1424, 2015.
- Elaskar S., del Río E., y Zapico E. Evaluation of the statistical properties for type-ii intermittency using the perron-frobenius operator. *Nonlinear Dynam.*, 86:1107–1116, 2016.
- Elaskar S., del Río E., y Lorenzón D. Calculation of the Statistical Properties in Intermittency Using the Natural Invariant Density. *Symmetry*, 13:935–950, 2021.
- Hirsch J., Huberman B., y Scalapino D. Theory of intermittency. *Physical Review A*, 25:519–532, 1982.
- Krause G., Elaskar S., y del Río E. Noise effect on statistical properties of type i intermittency. *Physica A*, 402:318–329, 2014a.
- Krause G., Elaskar S., y del Río E. Type i intermittency with discontinuous reinjection probability density in a truncation model of the derivative nonlinear schrödinger equation. *Nonlinear Dynam.*, 402:318–329, 2014b.
- Manneville p. y Pomeau Y. Intermittency and Lorenz model. *Physical Letters A*, 75:1–2, 1979.
- Manneville P. Intermittency, self-similarity and 1/f spectrum in dissipative dynamical systems. 41:1235–1243, 1980.
- Marek M. y Schreiber I. *Chaotic Behaviour of Deterministic Dissipative Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- Nayfeh A. y Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley, 1995.
- Sánchez-Arriaga G., Sanmartín J., y Elaskar S. Damping models in the truncated derivative nonlinear schrodinger equation. *Phys. Plasmas*, 14:082108, 2007.
- Schuster H. y Just W. *Deterministic Chaos*. Wiley VCH, 2005.
- Sparrow C. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Springer-Verlag, 1982.