

## ABSORCIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS MEDIANTE CAPAS PERFECTAMENTE ACOPLADAS

### ELASTIC WAVE ABSORPTION BY PERFECTLY MATCHED LAYERS

Adriano Trono<sup>a,b</sup>, Denis Lorenzón<sup>a,b</sup>, Federico Pinto<sup>a,b</sup> y Marcelo A. Ceballos<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) – CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [idit@fcrfyn.edu.ar](mailto:idit@fcrfyn.edu.ar), <http://www.inv.idit.uncor.edu/>*

<sup>b</sup>*FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [depestructuras@fcefyn.unc.edu.ar](mailto:depestructuras@fcefyn.unc.edu.ar), <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

**Palabras clave:** Capa perfectamente acoplada (PML), Interacción Suelo-Estructura, Radiación de ondas.

**Resumen.** La modelación de efectos de interacción suelo-estructura presenta complejidades asociadas a la característica ilimitada del medio físico, la no-linealidad material del suelo y eventualmente la no-linealidad geométrica producida por el balanceo de estructuras. Para modelar de manera simultánea estos efectos es menester resolver las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo. Pero aún existen deficiencias en las condiciones de borde incorporadas en los códigos de elementos finitos para representar adecuadamente la radiación de ondas sísmicas salientes cuando el análisis se realiza en el dominio del tiempo. En este sentido, las capas perfectamente acopladas (PML) permiten absorber satisfactoriamente ondas inclinadas al contorno y superficiales. Se utiliza la formulación débil de Kucukcoban y Kallivokas (Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.200, 2011, 57-76) para desarrollar un elemento de borde PML mixto rectangular de cuatro nudos que puede ensamblarse a un modelo de elementos finitos del sitio permitiendo un esquema de integración explícita en el dominio del tiempo. Además, se esquematiza el ensamble del sistema global de ecuaciones a partir de la partición de las matrices del sistema del modelo del sitio y del borde PML.

**Keywords:** Perfect Matched Layer, Soil-Structure Interaction, Wave Radiation.

**Abstract.** Numerical modeling of soil-structure effects poses challenges associated with the unbounded characteristics of the ground, the material non-linearity of soils, and oftentimes the geometrical non-linearity produced by the rocking mode of the structure. To model these effects simultaneously, it is often required that the equations of motions are solved in the time domain. However, the boundary conditions incorporated in conventional finite element codes to adequately represent the outgoing seismic waves in the time domain, generally present shortcomings in fully absorbing the outgoing energy. In this sense, the perfect matched layers (PML) allow a satisfactory absorption of inclined waves and surface waves. The weak formulation presented by Kucukcoban and Kallivokas (Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.200, 2011, 57-76) is herein used to develop a four-node, rectangular mixed PML boundary element that can be assembled to a conventional finite element model of the site, allowing an explicit time integration scheme for the solution. In addition, the assembly of the global system of equations is outlined from the partition of system matrices of site model and of PML boundary.

## 1. INTRODUCCIÓN

La modelación de efectos de interacción suelo-estructura presenta complejidades asociadas a la característica ilimitada del medio físico, la no-linealidad material del suelo y eventualmente la no-linealidad geométrica producida por el balanceo de estructuras. Para modelar de manera simultánea estos efectos es menester integrar las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo. Pero aún existen deficiencias para representar adecuadamente la radiación de ondas sísmicas entrantes y salientes no perpendiculares al contorno de la región modelada cuando el análisis es en el dominio del tiempo. Para ello es menester la colocación de condiciones de borde que representen adecuadamente el flujo de energía entrante y saliente al contorno de la región de análisis.

Para modelar el flujo de ondas salientes en modelos de elementos finitos [Basu y Chopra \(2003\)](#) estudian problemas de interacción suelo-estructura utilizando capas perfectamente acopladas (Perfect Matched Layer – PML) en el dominio de la frecuencia y absorben de manera satisfactoria las ondas salientes inclinadas y superficiales. [Kucukcoban y Kallivokas \(2011\)](#) transforman la formulación fuerte del espacio bi-dimensional PML al dominio del tiempo utilizando un enfoque híbrido. En este trabajo se utiliza un caso particular de dicha formulación para desarrollar un elemento finito PML mixto rectangular de cuatro nudos que puede ensamblarse a un modelo de elementos finitos estándar con esquema de integración explícita en el dominio del tiempo. Además, se esquematiza el ensamble del sistema global de ecuaciones a partir de la malla de elementos regulares y de la malla de elementos PML.

El objetivo general de este trabajo es que este tipo de elementos absorbentes pueda utilizarse en combinación con el Método de Reducción del Dominio ([Bielak et al. ,2003](#)) para el análisis de interacción suelo-estructura ante la incidencia de ondas sísmicas inclinadas SV y ondas de Rayleigh.

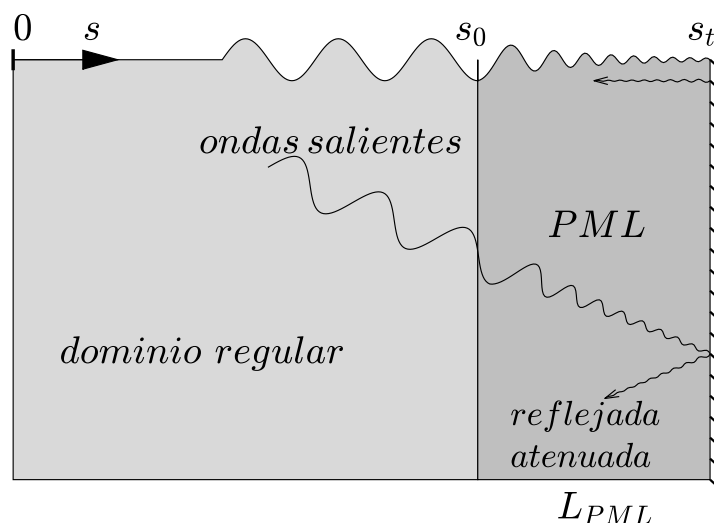


Figura 1: Borde PML en la dirección  $s$ .

## 2. BORDES ABSORBENTES PML

Para modelar la característica infinita del medio físico, se colocan capas PML absorbentes en los bordes del dominio de interés, denominado dominio regular o interior. Esta capa de material absorbente puede disminuir considerablemente las reflexiones numéricas de ondas incidentes con independencia del ángulo de incidencia. La zona PML consiste en un espacio deformado donde la posición se convierte en una posición compleja mediante el mapeo de

coordenadas utilizando funciones de estiramiento. En esta región las ecuaciones clásicas de la teoría de la elasticidad se cumplen en el espacio estirado complejo y no el espacio físico. Para evitar reflexiones en los bordes debe cumplirse que en la interfase las coordenadas estiradas deben coincidir con las coordenadas físicas (Basu y Chopra, 2003).

Sea  $s$  la coordenada física en la dirección normal al borde del dominio regular, se define  $\tilde{s}$  en el sistema coordenado estirado:

$$s \rightarrow \tilde{s} = s_0 + \int_{s_0}^s \lambda_s(s' - s_0, \omega) ds' \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de excitación,  $\lambda_s$  es la función de estiramiento (para la coordenada  $s$ ) y  $s_0$  denota la abscisa de los puntos de la interfase entre el dominio regular y estirado (ver Figura 1). A partir de Ec. (1) se tiene que los sistemas coordenados físico y estirado se relacionan a través de:

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{s_0}^s \lambda_s(s' - s_0, \omega) ds' = \lambda_s(s, \omega) \rightarrow \frac{d}{d\tilde{s}} ( ) = \frac{1}{\lambda_s(s, \omega)} \frac{d}{ds} ( ) \quad (2)$$

Se deduce que el espacio físico es un caso particular de espacio estirado con  $\lambda_s = 1$ . El acoplamiento perfecto es la condición que evita las reflexiones de onda entre medios estirados y se cumple si las funciones de estiramiento de ambos medios coinciden en la interfase. Esto implica que en la interfase  $\lambda_s(s_0) = 1$ . Además, la función de estiramiento debe ser no nula y continua. Entre las varias formas de funciones de estiramiento posibles, se adopta la forma más utilizada por ser sencilla de implementar, por tener una variación suave en el perfil PML y tener mejor rendimiento para absorber ondas de baja frecuencia:

$$\lambda_s(s, \omega) = \alpha_s(s) + \frac{1}{i\omega} \beta_s(s) \quad (3)$$

con

$$\alpha_s(s) = 1 + \alpha_0 \left( \frac{(s-s_0)n_s}{L_{PML}} \right)^n, \quad \beta_s(s) = \beta_0 \left( \frac{(s-s_0)n_s}{L_{PML}} \right)^m, \quad s_0 \leq s \leq s_t \quad (4)$$

donde  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  determinan el valor que alcanzará la función de estiramiento en el borde externo del dominio estirado y se utilizan como parámetros de ajuste, mientras que  $n$  y  $m$  son los grados de los polinomios elegidos (habitualmente 1 o 2).  $L_{PML} = s_t - s_0$  es el espesor de la capa absorbente y  $n_s$  es la componente en la dirección  $s$  del versor saliente perpendicular al borde. Zhang et al. (2019) utilizan los siguientes valores óptimos para los parámetros de ajuste:

$$\alpha_0 = \frac{(n+1) 10 ES}{2L_{PML}} \log\left(\frac{1}{R}\right), \quad \beta_0 = \frac{(m+1) c_p}{2L_{PML}} \log\left(\frac{1}{R}\right), \quad s_0 \leq s \leq s_t \quad (5)$$

donde  $R$  es el coeficiente de reflexión,  $ES$  es el tamaño promedio del elemento finito y  $c_p$  es la velocidad de onda P.

### 3. FORMULACIÓN FUERTE PML MEDIANTE ENFOQUE HÍBRIDO

Para reducir el costo computacional se recurre al enfoque híbrido presentado por Kucukcoban y Kallivokas (2011) y modificado por Poursartrip (2017) que utiliza elementos finitos mixtos en el dominio PML y clásicos en el dominio regular.

La ecuación de la onda para un material lineal elástico en ausencia de fuerzas de cuerpo puede ser escrito a través del siguiente sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo:

$$\operatorname{div}(S^T) = \rho \ddot{u} \quad (6)$$

$$S = \mu[\nabla u + \nabla u^T] + \lambda(\operatorname{div}(u))I \quad (7)$$

donde  $S$  es el tensor de tensiones de Cauchy,  $u$  es el vector de desplazamientos,  $\rho$  es la densidad del material,  $I$  es la matriz identidad y  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé.

La ecuación de la onda en el dominio PML debe cumplirse en el sistema coordenado estirado. Se aplica la transformada de Fourier y la regla obtenida en Ec. (2) al caso bidimensional de la Ec. (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{S}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \hat{S}_{yx}}{\partial \tilde{y}} = (i\omega)^2 \rho \hat{u}_x \\ \frac{\partial \hat{S}_{xy}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \hat{S}_{yy}}{\partial \tilde{y}} = (i\omega)^2 \rho \hat{u}_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial \hat{S}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial \hat{S}_{yx}}{\partial y} = (i\omega)^2 \rho \hat{u}_x \\ \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial \hat{S}_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial \hat{S}_{yy}}{\partial y} = (i\omega)^2 \rho \hat{u}_y \end{cases} \quad (8)$$

donde  $S_{ij}$  y  $u_j$  son las componentes del tensor de tensiones y del vector de desplazamientos, respectivamente, el signo ( $\hat{\quad}$ ) denota transformada de Fourier de la variable subtendida y  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  son las coordenadas del sistema estirado. Para simplificar este problema se proponen funciones de estiramiento  $\lambda_x(x, \omega)$  y  $\lambda_y(y, \omega)$  que solo dependen de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Multiplicando el sistema obtenido en Ec. (8) por  $\lambda_x \lambda_y$ :

$$\operatorname{div}(\hat{S}^T \Lambda) = (i\omega)^2 \rho \lambda_x \lambda_y \hat{u} \quad (9)$$

donde  $\Lambda$  es el tensor de estiramiento y se define como:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_y & 0 \\ 0 & \beta_x \end{bmatrix} + \frac{1}{i\omega} \begin{bmatrix} \beta_y & 0 \\ 0 & \beta_x \end{bmatrix} = \Lambda_e + \frac{1}{i\omega} \Lambda_p \quad (10)$$

Cabe aclarar que el tensor de estiramiento se vuelve la matriz identidad en el dominio regular. Reemplazando Ec. (3) y Ec. (10) en Ec. (9):

$$\operatorname{div} \left( \hat{S}^T \Lambda_e + \frac{1}{i\omega} \hat{S}^T \Lambda_p \right) = \rho (a(i\omega)^2 \hat{u} + b(i\omega) \hat{u} + c \hat{u}) \quad (11)$$

donde  $a = \alpha_x \alpha_y$ ,  $b = \alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x$  y  $c = \beta_x \beta_y$ . Se repite el mismo procedimiento y se aplica la transformada de Fourier de la Ec. (7) en el sistema coordenado estirado:

$$\hat{S} = \mu \left( \nabla \hat{u} \begin{bmatrix} 1/\lambda_x & \\ & 1/\lambda_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\lambda_x & \\ & 1/\lambda_y \end{bmatrix} \nabla \hat{u}^T \right) + \lambda \left( \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_y} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) I \quad (12)$$

Multiplicando Ec. (12)(9) por  $\lambda_x \lambda_y$ :

$$\lambda_x \lambda_y \hat{S} = \mu (\nabla \hat{u} \Lambda + \Lambda \nabla \hat{u}^T) + \lambda \operatorname{div}(\Lambda \hat{u}) I \quad (13)$$

Multiplicando Ec. (13) por  $(i\omega)$  y usando Ec. (3) y Ec. (10):

$$\begin{aligned} a(i\omega) \hat{S} + b \hat{S} + \frac{1}{i\omega} c \hat{S} &= (i\omega) \mu (\nabla \hat{u} \Lambda_e + \Lambda_e \nabla \hat{u}^T) \\ &+ \mu (\nabla \hat{u} \Lambda_p + \Lambda_p \nabla \hat{u}^T) + (i\omega) \lambda \operatorname{div}(\Lambda_e \hat{u}) I + \lambda \operatorname{div}(\Lambda_p \hat{u}) I \end{aligned} \quad (14)$$

Las Ec. (14) y Ec. (11) constituyen el sistema de ecuaciones diferenciales del espacio estirado en el dominio de la frecuencia. Para obtener el sistema en el dominio del tiempo se aplica la transformada inversa de Fourier:

$$\operatorname{div}\left(S^T \Lambda_e + \int_0^t S^T d\tau \Lambda_p\right) = \rho(a\ddot{u} + b\dot{u} + cu) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a\dot{S} + bS + c \int_0^t S^T d\tau \\ = \mu(\nabla\dot{u}\Lambda_e + \Lambda_e\nabla\dot{u}^T + \nabla u\Lambda_p + \Lambda_p\nabla u^T) + \lambda \left(\operatorname{div}(\Lambda_e\dot{u} + \Lambda_p u)\right) I \end{aligned} \quad (16)$$

Y se introduce el tensor historia de tensiones como variable auxiliar del problema:

$$S(x, y, t) = \int_0^t S^T(x, y, \tau) d\tau \quad (17)$$

Reemplazando Ec. (17) en Ec. (15) y Ec. (16):

$$\operatorname{div}(\dot{S}\Lambda_e + S\Lambda_p) = \rho(a\ddot{u} + b\dot{u} + cu) \quad \text{en } \Omega_{PML} \times J \quad (18)$$

$$\begin{aligned} a\dot{S} + bS + cS = \mu(\nabla\dot{u}\Lambda_e + \Lambda_e\nabla\dot{u}^T + \nabla u\Lambda_p + \Lambda_p\nabla u^T) \\ + \lambda \left(\lambda \operatorname{div}(\Lambda_e\dot{u} + \Lambda_p u)\right) I \quad \text{en } \Omega_{PML} \times J \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $\Omega_{PML}$  es el dominio PML y  $J = [0, T]$  es el intervalo de tiempo de interés. Las ecuaciones precedentes podrían utilizarse para modelar también el dominio regular con  $\lambda_x = \lambda_y = 1$ . Sin embargo, para reducir el costo computacional se recurre al enfoque híbrido desarrollado por [Kucukcoban y Kallivokas \(2011\)](#) que aplica elementos finitos mixtos en el dominio PML y una formulación clásica en términos de desplazamientos en el dominio regular:

$$\operatorname{div}\{\mu[\nabla u + \nabla u^T] + \lambda(\operatorname{div}(u))I\} = \rho\ddot{u} \quad \text{en } \Omega_{RD} \times J \quad (20)$$

El sistema se encuentra inicialmente en reposo y sujeto a las siguientes condiciones de borde y de interfase:

$$\{\mu[\nabla u + \nabla u^T] + \lambda(\operatorname{div}(u))I\} \mathbf{n}^+ = \mathbf{g}_n \quad \text{en } \Gamma_N^{RD} \times J \quad (21)$$

$$(\dot{S}\Lambda_e + S\Lambda_p) \mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_N^{PML} \times J \quad (22)$$

$$u = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D^{PML} \times J \quad (23)$$

$$u^+ = u^- \quad \text{en } \Gamma^I \times J \quad (24)$$

$$\{\mu[\nabla u + \nabla u^T] + \lambda(\operatorname{div}(u))I\} \mathbf{n}^+ + (\dot{S}^T \Lambda_e + S\Lambda_p) \mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma^I \times J \quad (25)$$

donde  $\mathbf{g}_n$  es la tensión en el borde del dominio regular,  $\Gamma^I$  es la interfase entre los dominios regular y PML,  $\Gamma_N^{PML}$  y  $\Gamma_N^{RD}$  los bordes libres y  $\Gamma_D^{PML}$  el borde donde se restringe los desplazamientos horizontal y vertical. Las Ec. (24) y (25) implican continuidad de desplazamientos y equilibrio en la interfase, respectivamente (ver [Figura 2](#)).

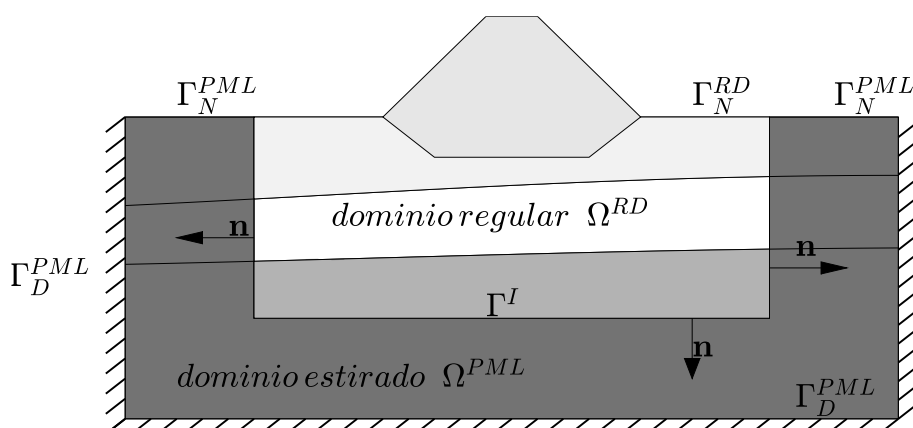


Figura 2: Esquema del modelo plano.

#### 4. FORMA VARIACIONAL MIXTA

Según Brezzi (1988) existen dos formas variacionales posibles para implementar elementos finitos mixtos. La diferencia entre ambas reside en si la integración por partes se hace sobre la ecuación de equilibrio Ec. (18) o sobre la ecuación constitutiva Ec. (19), y en los requerimientos de regularidad para las funciones de forma de desplazamientos y tensiones (integral temporal de las tensiones en este caso). En este trabajo se elige la primera opción por requerir menor regularidad en las funciones de forma de historia de tensiones. Se suma el residuo ponderado por el vector función de peso  $\mathbf{W}(x)$  en la Ec.(18) y Ec. (20), se integra por partes y se incorporan Ec. (24) y Ec. (25) para eliminar los términos de borde asociados a la interfase:

$$\int_{\Omega^{RD}} \mathbf{W}(x) \rho \ddot{u} d\Omega^{RD} + \int_{\Omega^{RD}} \nabla \mathbf{W} : \mathbf{S} d\Omega^{RD} + \int_{\Omega^{PML}} \mathbf{W}(x) \rho (a\ddot{u} + b\dot{u} + cu) d\Omega^{PML} + \int_{\Omega^{PML}} \nabla \mathbf{W} : (\dot{\mathbf{S}} \Lambda_e + \mathbf{S} \Lambda_p) d\Omega^{PML} = \int_{\Gamma_N^{RD}} \mathbf{W} g_n d\Gamma^{RD} \quad (26)$$

Se integra el residuo ponderado de la Ec. (19) por la función de peso  $T(x)$  en el dominio de la PML:

$$\int_{\Omega^{PML}} \mathbf{T}(x) : (a\ddot{\mathbf{S}} + b\dot{\mathbf{S}} + c\mathbf{S}) d\Omega^{PML} = \int_{\Omega^{PML}} \mathbf{T}(x) : (\mu[\nabla \dot{u} \Lambda_e + \Lambda_e (\nabla \dot{u})^T + \nabla u \Lambda_p + \Lambda_p (\nabla u)^T] + \lambda[\text{div}(\Lambda_e \dot{u} + \Lambda_p u)] \mathbf{I}) d\Omega^{PML} \quad (27)$$

El primer y segundo término de Ec. (26) están asociados a la implementación estándar del método de elementos finitos en el dominio regular en términos de desplazamientos. Los términos que se integran en el dominio PML de Ec. (26) y Ec. (27) están asociados a los elementos finitos absorbentes mixtos. En este trabajo se detalla la obtención de las matrices elementales de masa, rigidez y amortiguamiento de este tipo de elementos de capa de borde. Se utilizan elementos rectangulares de cuatro nudos con funciones de forma bilineales  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$  que aproximan tanto desplazamientos como historia de tensiones en cada elemento.

##### 4.1 Notación matricial para los tensores involucrados

A continuación, se detalla la notación matricial elegida para los vectores y tensores involucrados en Ec. (26) y Ec. (27). Los desplazamientos y la función de ponderación dentro

de un elemento finito se obtienen como combinación lineal de las funciones de forma y de peso, respectivamente

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}, \quad \mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}_w \mathbf{w} \quad (28)$$

con

$$\mathbf{u}^T = [u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_x^3 \quad u_y^3 \quad u_x^4 \quad u_y^4] \quad (29)$$

$$\mathbf{w}^T = [w_x^1 \quad w_y^1 \quad w_x^2 \quad w_y^2 \quad w_x^3 \quad w_y^3 \quad w_x^4 \quad w_y^4] \quad (30)$$

$$\mathbf{N}_w = \mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & & N_2 & & N_3 & & N_4 & \\ & N_1 & & N_2 & & N_3 & & N_4 \\ & & N_1 & & & N_3 & & \\ & & & N_2 & & & & N_4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Al tensor de historia de tensiones se lo expresa como un vector:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{S} \quad (32)$$

con

$$\mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} N_1 & & N_2 & & N_3 & & N_4 & \\ & N_1 & & N_2 & & N_3 & & N_4 \\ & & N_1 & & & N_3 & & \\ & & & N_2 & & & & N_4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{S}^T = [S_{11}^1 \quad S_{22}^1 \quad S_{12}^1 \quad S_{11}^2 \quad S_{22}^2 \quad S_{12}^2 \quad S_{11}^3 \quad S_{22}^3 \quad S_{12}^3 \quad S_{11}^4 \quad S_{22}^4 \quad S_{12}^4]$$

donde  $\mathbf{S}$  es el vector de incógnitas de historia de tensión en los cuatro nudos del elemento. Para simplificar el cuarto término de Ec. (26) se utiliza la propiedad de simetría del tensor historia de tensiones:

$$\nabla \mathbf{W} : \dot{\Lambda}_e = \nabla \mathbf{W} \Lambda_e : \dot{\mathbf{S}} = \delta \varepsilon^e : \dot{\mathbf{S}} \quad \text{y} \quad \nabla \mathbf{W} : \Lambda_p = \nabla \mathbf{W} \Lambda_p : \mathbf{S} = \delta \varepsilon^p : \mathbf{S} \quad (34)$$

donde los tensores  $\delta \varepsilon^e = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{W} \Lambda_e + \Lambda_e \nabla \mathbf{W}^T)$  y  $\delta \varepsilon^p = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{W} \Lambda_p + \Lambda_p \nabla \mathbf{W}^T)$  pueden ser expresados como vectores

$$\delta \varepsilon^e = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{11}^e \\ \delta \varepsilon_{11}^e \\ 2\delta \varepsilon_{12}^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{w}, \quad \delta \varepsilon^p = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{11}^p \\ \delta \varepsilon_{11}^p \\ 2\delta \varepsilon_{12}^p \end{bmatrix} = \mathbf{B}_\beta \mathbf{w} \quad (35)$$

con

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_y \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_y \end{bmatrix}$$

Para efectuar el producto punto entre matrices en la Ec. (27) se definen los tensores  $\varepsilon^p = 1/2(\nabla u \Lambda_p + \Lambda_p (\nabla u)^T)$  y  $\varepsilon^e = 1/2(\nabla u \Lambda_e + \Lambda_e (\nabla u)^T)$  y se expresan en forma vectorial (notar que a diferencia de los tensores  $\delta \varepsilon^p$  y  $\delta \varepsilon^e$  la componente “12” no se multiplica por dos):

$$\varepsilon^p = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^p \\ \varepsilon_{22}^p \\ \varepsilon_{12}^p \end{bmatrix} = \mathbf{B}_\beta^u \mathbf{u} \quad , \quad \dot{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11}^e \\ \dot{\varepsilon}_{22}^e \\ \dot{\varepsilon}_{12}^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}_\alpha^u \dot{\mathbf{u}} \quad (37)$$

con

$$\mathbf{B}_\beta^u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\beta_x}{2} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\beta_y}{2} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\beta_x}{2} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\beta_y}{2} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\beta_x}{2} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\beta_y}{2} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \frac{\beta_x}{2} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\beta_y}{2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{B}_\alpha^u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\alpha_x}{2} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\alpha_y}{2} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\alpha_x}{2} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\alpha_y}{2} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\alpha_x}{2} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\alpha_y}{2} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \frac{\alpha_x}{2} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\alpha_y}{2} \end{bmatrix}$$

La función de peso  $T(x)$  de la Ec. (27) se propone simétrica y se expresa de forma vectorial:

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ 2T_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_T \mathbf{T} \quad (39)$$

con

$$\mathbf{N}_T = \begin{bmatrix} N_1 & & N_2 & & N_2 & & N_4 & & \\ & N_1 & & N_2 & & N_3 & & N_4 & & \\ & & 2N_1 & & 2N_2 & & 2N_3 & & 2N_4 & \\ T_{11}^1 & T_{22}^1 & T_{12}^1 & T_{11}^2 & T_{22}^2 & T_{12}^2 & T_{11}^3 & T_{22}^3 & T_{12}^3 & T_{11}^4 & T_{22}^4 & T_{12}^4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para realizar el producto interno del último término de la Ec. (27), recordando que  $\alpha_x$  y  $\beta_x$  no dependen de  $y$  y  $\alpha_y$  y  $\beta_y$  no dependen de  $x$ , se definen las siguientes matrices diagonales:

$$A^p = \text{div}(\Lambda_p u) I = \begin{bmatrix} \beta_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta_x \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & \beta_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta_x \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \dot{A}^e = \text{div}(\Lambda_e \dot{u}) I \quad (41)$$

Se expresa  $\text{div}(\Lambda_p u)$  y  $\text{div}(\Lambda_e \dot{u})$  como combinación lineal de las funciones de forma:

$$\text{div}(\Lambda_p u) = \text{div} \left( \begin{bmatrix} \beta_y & 0 \\ 0 & \beta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \right) = \beta_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta_x \frac{\partial u_y}{\partial y} = \mathbf{h}_\beta \mathbf{u} \quad (42)$$

$$\text{div}(\Lambda_e \dot{u}) = \text{div} \left( \begin{bmatrix} \alpha_y & 0 \\ 0 & \alpha_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{bmatrix} \right) = \alpha_y \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \alpha_x \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} = \mathbf{h}_\alpha \dot{\mathbf{u}}$$

con

$$\mathbf{h}_\beta = \left[ \beta_y \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \beta_x \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad \beta_y \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \beta_x \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad \beta_y \frac{\partial N_3}{\partial x} \quad \beta_x \frac{\partial N_3}{\partial y} \quad \beta_y \frac{\partial N_4}{\partial x} \quad \beta_x \frac{\partial N_4}{\partial y} \right] \quad (43)$$

$$\mathbf{h}_\alpha = \left[ \alpha_y \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \alpha_x \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad \alpha_y \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \alpha_x \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad \alpha_y \frac{\partial N_3}{\partial x} \quad \alpha_x \frac{\partial N_3}{\partial y} \quad \alpha_y \frac{\partial N_4}{\partial x} \quad \alpha_x \frac{\partial N_4}{\partial y} \right]$$

A partir de Ec. (42) las matrices de la Ec.(41) pueden expresarse en notación vectorial como

$$\begin{bmatrix} A_{11}^p \\ A_{22}^p \\ A_{12}^p \end{bmatrix} = \mathbf{H}_\beta \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \dot{A}_{11}^e \\ \dot{A}_{22}^e \\ \dot{A}_{12}^e \end{bmatrix} = \mathbf{H}_\alpha \dot{\mathbf{u}}, \quad \text{con} \quad \mathbf{H}_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{h}_\beta \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{h}_\alpha \quad (44)$$



### 4.2 Elemento mixto PML

Se incorporan Ec. (28), Ec. (32) y Ec. (35) en los términos de Ec. (26) que se integran en el dominio  $\Omega^{PML}$  y se incorporan Ec. (28), Ec. (32), Ec. (37), Ec. (39) y Ec. (44) en la Ec. (27):

$$\sum_{e=1}^{NE} \mathbf{w}^T \left( \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_w^T \rho c \mathbf{N}_u d\Omega^{PML} \mathbf{u} + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{N}_s d\Omega^{PML} \mathbf{S} + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_w^T \rho b \mathbf{N}_u d\Omega^{PML} \dot{\mathbf{u}} \right. \\ \left. + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{N}_s d\Omega^{PML} \dot{\mathbf{S}} + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_w^T \rho a \mathbf{N}_u d\Omega^{PML} \ddot{\mathbf{u}} \right) = TDR \quad (45)$$

$$\sum_{e=1}^{NE} \mathbf{T}^T \left( - \left( \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_T^T 2\mu \mathbf{B}_\beta^u d\Omega^{PML} + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}^T \lambda \mathbf{H}_\beta d\Omega^{PML} \right) \mathbf{u} + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_T^T c \mathbf{N}_s d\Omega^{PML} \mathbf{S} \right. \\ \left. - \left( \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_T^T 2\mu \mathbf{B}_\alpha^u d\Omega^{PML} + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}^T \lambda \mathbf{H}_\alpha d\Omega^{PML} \right) \dot{\mathbf{u}} \right. \\ \left. + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_T^T b \mathbf{N}_s d\Omega^{PML} \dot{\mathbf{S}} + \int_{\Omega_e^{PML}} \mathbf{N}_T^T a \mathbf{N}_s d\Omega^{PML} \ddot{\mathbf{S}} \right) = 0 \quad (46)$$

Donde  $\Omega_e^{PML}$  es el dominio de un elemento finito,  $NE$  el número de elementos en que se divide la región PML y  $TDR$  es el término de carga menos los términos integrados en el dominio regular en Ec.(26). Se agrupan las incógnitas de desplazamientos e historia de tensiones en el vector de incógnitas elementales  $\mathbf{d}_e^T = [\mathbf{u}^T \mathbf{S}^T]$  y se utilizan Ec. (45) y Ec. (46) para obtener las matrices del sistema de cada elemento mixto en la zona PML:

$$k_{PML} = \int_{\Omega_e^{PML}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_w^T \rho c \mathbf{N}_u & \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{N}_s \\ -\mathbf{N}_T^T 2\mu \mathbf{B}_\beta^u - \mathbf{N}^T \lambda \mathbf{H}_\beta & \mathbf{N}_T^T c \mathbf{N}_s \end{bmatrix} d\Omega_e^{PML} \quad (47)$$

$$c_{PML} = \int_{\Omega_e^{PML}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_w^T \rho b \mathbf{N}_u & \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{N}_s \\ -\mathbf{N}_T^T 2\mu \mathbf{B}_\alpha^u - \mathbf{N}^T \lambda \mathbf{H}_\alpha & \mathbf{N}_T^T b \mathbf{N}_s \end{bmatrix} d\Omega_e^{PML} \quad (48)$$

$$m_{PML} = \int_{\Omega_e^{PML}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_w^T \rho a \mathbf{N}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_T^T a \mathbf{N}_s \end{bmatrix} d\Omega_e^{PML} \quad (49)$$

donde  $k_{PML}$ ,  $c_{PML}$  y  $m_{PML}$  son las matrices de un elemento de la región PML.

### 4.3 Sistema de ecuaciones

Dadas las matrices del sistema en deformación plana del dominio regular,  $\mathbf{M}^{RD}$ ,  $\mathbf{C}^{RD}$  y  $\mathbf{K}^{RD}$ , pueden utilizarse las Ecs. (47), (48) y (49) para ensamblar las matrices del sistema PML,  $\mathbf{M}^{PML}$ ,  $\mathbf{C}^{PML}$  y  $\mathbf{K}^{PML}$ , y obtener un sistema general de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (50)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del dominio completo (regular y PML). El ensamble de las matrices del sistema se esquematiza en Ec. (51) y Ec. (52). Se particionan las matrices del dominio regular (supraíndice **RD**) en submatrices asociadas a los desplazamientos interiores (subíndice **1**) y desplazamientos de la interfase (subíndice  $\Gamma^I$ ). Las matrices del dominio PML (supraíndice **PML**) se particionan en submatrices asociadas a los desplazamientos de la interfase (subíndice  $\Gamma^I$ ), a los desplazamientos interiores (subíndice **U**) y a las historias de tensiones (subíndice  $\Sigma$ ). En el vector  $\mathbf{d}$  se colocan los desplazamientos  $\mathbf{U}_1^{RD}$  de

los nudos interiores del dominio regular, los desplazamientos  $\mathbf{U}_{\Gamma^I}$  de la interfase, los desplazamientos  $\mathbf{U}^{PML}$  de los nudos internos al dominio PML y las historias de tensiones  $\boldsymbol{\Sigma}$  de todos los nudos de la PML. En el vector de cargas  $\mathbf{f}$  se colocan las cargas  $\mathbf{f}^{RD}$  aplicadas en el interior del dominio regular.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{RD} \\ \mathbf{U}_{\Gamma^I} \\ \mathbf{U}^{PML} \\ \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{RD} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{RD} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\Gamma^I 1}^{RD} & \mathbf{M}_{\Gamma^I \Gamma^I}^{RD} + \mathbf{M}_{\Gamma^I \Gamma^I}^{PML} & \mathbf{M}_{\Gamma^I U}^{PML} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{U \Gamma^I}^{PML} & \mathbf{M}_{UU}^{PML} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\Sigma}^{PML} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{RD} & \mathbf{K}_{\Gamma^I 1}^{RD} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\Gamma^I 1}^{RD} & \mathbf{K}_{\Gamma^I \Gamma^I}^{RD} + \mathbf{K}_{\Gamma^I \Gamma^I}^{PML} & \mathbf{K}_{\Gamma^I U}^{PML} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{U \Gamma^I}^{PML} & \mathbf{K}_{UU}^{PML} & \mathbf{K}_{U\Sigma}^{PML} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Sigma U}^{PML} & \mathbf{K}_{\Sigma\Sigma}^{PML} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^{RD} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Gamma^I 1}^{RD} & \mathbf{C}_{\Gamma^I \Gamma^I}^{RD} + \mathbf{C}_{\Gamma^I \Gamma^I}^{PML} & \mathbf{C}_{\Gamma^I U}^{PML} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{U \Gamma^I}^{PML} & \mathbf{C}_{UU}^{PML} & \mathbf{C}_{U\Sigma}^{PML} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\Sigma U}^{PML} & \mathbf{C}_{\Sigma\Sigma}^{PML} \end{bmatrix} \quad (52)$$

A partir de Ec. (23) se restringen los desplazamientos en  $\Gamma_D^{PML}$  y no se efectúa ninguna restricción (incluso en  $\Gamma_N^{PML}$ ) sobre los grados de libertad de historia de tensiones.

## 5. CONCLUSIONES

Se presentan las matrices elementales de un elemento PML mixto de cuatro nudos, que pueden ensamblarse a las matrices del sistema de una formulación clásica en términos de desplazamientos. Este tipo de elementos puede incorporarse a los códigos existentes y permiten integrar las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo. A diferencia de otras formulaciones híbridas, la matriz de masa resulta no singular, por lo que puede aplicarse un esquema de integración explícita. Sin embargo, presenta la desventaja de que las matrices globales del sistema resultan asimétricas por la asimetría de las matrices de los elementos PML.

Queda pendiente para futuros trabajos aplicar este tipo de elementos absorbentes en combinación con el método de reducción del dominio para el análisis de interacción suelo-estructura ante la incidencia de ondas sísmicas inclinadas SV y ondas de Rayleigh, y comparar el rendimiento de este tipo de bordes en relación con el de los bordes viscosos estándar.

## REFERENCIAS

- Basu, U. y Chopra, A.K., Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192, 1337-1375 (2003).
- Kucukcoban, S. y Kallivokas, L.F., Mixed perfectly-matched-layers for direct transient analysis in 2D elastic heterogeneous media. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 200, 57-76 (2011).
- Bielak, J. Loukakis, K., Yoshiaki, H. Yoshimura, C., Domain reduction method for three-dimensional earthquake modeling in localized regions, part I: theory, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 93, No.2 pp.817-824. 2003.
- Zhang, W. Esmaeilzadeh Seylabi, E., Taciroglu E., An ABAQUS toolbox for soil-structure interaction analysis. *Computer and Geotechnics*, 114, 103143 (2019).
- Poursartip, B., Topographic amplification of seismic motion. *Dissertation for the degree of doctor of philosophy*, The University of Texas at Austin, 2017.
- Brezzi, F., A survey of mixed finite element methods. *Finite elements*. Springer Science and Business Media, New York, 1988.