

EL PRIMER EXPONENTE DE LYAPUNOV COMO HERRAMIENTA DE PREDICCIÓN GLOBAL EN SISTEMAS DINÁMICOS DE PÉNDULO PARAMÉTRICO

THE FIRST LYAPUNOV EXPONENT AS A GLOBAL PREDICTION TOOL IN PARAMETRIC PENDULUM DYNAMICAL SYSTEMS

Lucas Oxarango y Franco E. Dotti

Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina. gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar/frbb>. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Palabras clave: Dinámica no lineal, exponente característico de Lyapunov, péndulo paramétrico.

Resumen. En este artículo se utiliza una metodología de cálculo numérico que emplea el primer exponente de Lyapunov como indicador del comportamiento bifurcacional global en sistemas dinámicos. Este método cuenta con un costo computacional muy bajo si se lo compara con la construcción numérica de un espacio de parámetros o un diagrama de bifurcaciones. Así, el método en consideración pretende ser utilizado a modo de cálculo preliminar en el estudio de la dinámica, con el objeto de identificar zonas en los espacios paramétricos que resulten de interés para un análisis más detallado. El presente estudio se enmarca en el desarrollo de una tecnología que apunta a extraer energía ambiental mediante sistemas de péndulos paramétricos, por lo que el principal foco se centra en la búsqueda de eficiencia de cálculo en este tipo de sistemas.

Keywords: Nonlinear dynamics, Lyapunov characteristic exponent, parametric pendulum.

Abstract. In this article a numerical calculation methodology by means of the first Lyapunov characteristic exponent as a global bifurcational behavior of dynamical systems is used. This method has a low computational cost if its compared with the numerical construction of a parameter space or a bifurcation diagram. Thereby, the considered method aims to be used as a previous evaluation in the dynamical study, with the purpose to identify interesting zones in the parameter space for a more extensive study. This study is part of the development of a technology that aims to extract environmental energy through parametric pendulum systems, so the main focus is on the search for calculation efficiency in this kind of systems.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, diversos métodos han sido desarrollados para el análisis, identificación y caracterización de las respuestas de sistemas dinámicos no lineales (Peitgen et al., 1992; Strogatz, 2018). Entre ellos destacan los exponentes característicos de Lyapunov (LCE por sus siglas en inglés), debido a su simplicidad y su aplicación directa en la identificación de atractores caóticos. Así, para una configuración dada de un sistema dinámico, el cálculo de los LCE permite identificar si una respuesta es o no caótica a partir únicamente de dos condiciones iniciales cercanas.

En este artículo se pretende aprovechar esa simplicidad para realizar una rápida identificación de algunos aspectos clave del comportamiento dinámico del péndulo paramétrico. Si bien este método podría aplicarse a diversidad de sistemas dinámicos, la elección del péndulo paramétrico se debe a que el presente estudio se enmarca en el desarrollo de una tecnología que apunta a extraer energía ambiental a partir del movimiento rotatorio de este tipo de sistemas (Wiercigroch, 2010; Nandakumar et al., 2012; Yurchenko y Alevras, 2013; Dotti y Virla, 2021). En tal marco, uno de los desafíos más importantes es mantener las rotaciones estables del péndulo y recuperarlas cuando se pierden debido a cambios en el forzamiento externo. Esto se logra mediante una acción de control, consistente en una pequeña corrección de torque, que debe ser administrada de forma conveniente y con la mayor celeridad posible con el objetivo de lograr una mayor eficiencia (Reguera et al., 2016; De Paula et al., 2017). De aquí la necesidad de herramientas computacionales de predicción rápidas y precisas como el método que se propone, basado en el primer LCE.

2. EXPONENTE CARACTERÍSTICO DE LYAPUNOV

El LCE es una herramienta para diagnosticar la presencia de caos en sistemas dinámicos (Strogatz, 2018). El caos en un sistema determinístico se caracteriza por una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto implica que dos trayectorias que inician muy cerca entre sí en el espacio de fase experimentarán un alejamiento exponencial durante su evolución temporal. La distancia entre dos trayectorias de un sistema dinámico puede expresarse como

$$d(t) = d_0(t)e^{\lambda t}, \quad (1)$$

donde λ representa el LCE y d_0 la distancia inicial entre las trayectorias. Así, si $\lambda > 0$, se produce una separación exponencial indicativa de la presencia de caos.

Para cualquier sistema dinámico de n ecuaciones, existe un espectro característico de Lyapunov de n exponentes, que proporcionan una medida de como varían las distancias, áreas y volúmenes en el espacio de fase (Shimada y Nagashima, 1979; Benettin et al., 1980). Estos n exponentes quedan ordenados como $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$. Sin embargo, como criterio de evaluación de caos se puede utilizar únicamente el primer exponente (λ_1), que al ser el mayor resulta dominante en términos de las características de expansión o contracción el sistema.

Se puede definir el primer exponente de Lyapunov (λ_1) como

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \ln \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})}. \quad (2)$$

Se han desarrollado diversas metodologías y algoritmos que permiten estimar el espectro de Lyapunov (Osedelec, 1968; Shimada y Nagashima, 1979; Benettin et al., 1980; Wolf et al., 1985). Sin embargo, Moon (1987) describió un método simple para estimar el primer exponente.

El mismo consiste en resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\dot{x} = f(x, c), \quad (3)$$

para cierta configuración de parámetros c , y luego evaluar el mismo sistema linealizado de la forma

$$\dot{\eta} = A \cdot \eta, \quad (4)$$

donde A representa el Jacobiano del sistema, y η la separación entre las condiciones iniciales. Al resolver ambos sistemas en simultáneo, el coeficiente de variación entre distancias $d(t_k)/d_0(t_{k-1})$ se estima mediante la expresión

$$\frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} = \frac{|\eta(\tau, t_k)|}{|\eta(0, t_k)|}, \quad (5)$$

que reemplazada en (2) permite calcular el máximo exponente de Lyapunov por cada evolución temporal τ . Por último, para cada cálculo se normaliza la separación η .

3. PÉNDULO PARAMÉTRICO

La dinámica del péndulo paramétrico amortiguado ha sido ampliamente estudiada por diversos autores y si bien su formulación es sencilla, presenta una gran riqueza admitiendo la coexistencia de respuestas rotatorias, oscilatorias y caóticas (Leven y Koch, 1981; Clifford y Bishop, 1995; Garira y Bishop, 2003). Es debido a estas características que se ha vuelto un ejemplo clásico en el estudio de dinámica no lineal. Su ecuación gobernante está definida como

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (1 + P \cos(\omega t)) \sin(\theta) = 0, \quad (6)$$

donde θ es el ángulo de rotación, β el coeficiente de fricción, P la magnitud del forzamiento paramétrico y ω la frecuencia de forzamiento.

Debido a su capacidad para detectar respuestas caóticas, se utiliza el máximo ECL para identificar los atractores existentes, considerando variaciones de los parámetros P y ω en (6), acorde a lo propuesto por Moon (1987).

4. RESULTADOS Y DISCUSIONES

En primer lugar se construyó un espacio de parámetros similar al desarrollado por Clifford y Bishop (1995) y Garira y Bishop (2003), pero evaluando el primer LCE. Los valores fueron filtrando según si son positivos, negativos o nulos, además de clasificarlos según si la velocidad $\dot{\theta}$ es distinta o igual a cero. En la Figura 1 se observan las posibles respuestas del péndulo paramétrico dependiendo de los valores de forzamiento y frecuencia elegidos, considerando $\beta = 0,15$ (Leven y Koch, 1981), halladas a partir de la evaluación del exponente.

El espacio de parámetros se construyó tomando una variación $\Delta P = 0,01$ y $\Delta \omega = 0,01$ y como tiempo evaluación del primer LCE se consideró $\tau = 1$ s. Se utilizó el integrador de Runge-Kutta de orden 4 para un tiempo de simulación de 2500 s.

La transición entre respuestas (reposo, oscilación o rotación, caos) de la Figura 1 debería verse delimitadas por una franja de bifurcaciones. Sin embargo, mediante el la evaluación del primer LCE solo se pudieron estimar algunas de ellas. Esto se debe a que, si bien se observan cambios en el signo del exponente y valores del mismo muy cercanos a cero, la precisión queda relegada a que se considera al cero como un valor del orden de $|10^{-4}|$. Por lo tanto se desprecian combinaciones de parámetros en donde puede ocurrir una bifurcación. Además, en las zonas de

la Figura 1 donde el primer LCE es negativo y la velocidad distinta de cero, coexisten respuestas estables oscilatorias y rotatorias, las cuales no pudieron ser identificadas mediante este método.

A pesar de consideraciones tomadas, el espacio de parámetros refleja con buena precisión las posibles respuestas del péndulo para los valores de parámetros considerados. Esto puede ser de utilidad para estudiar zonas de interés.

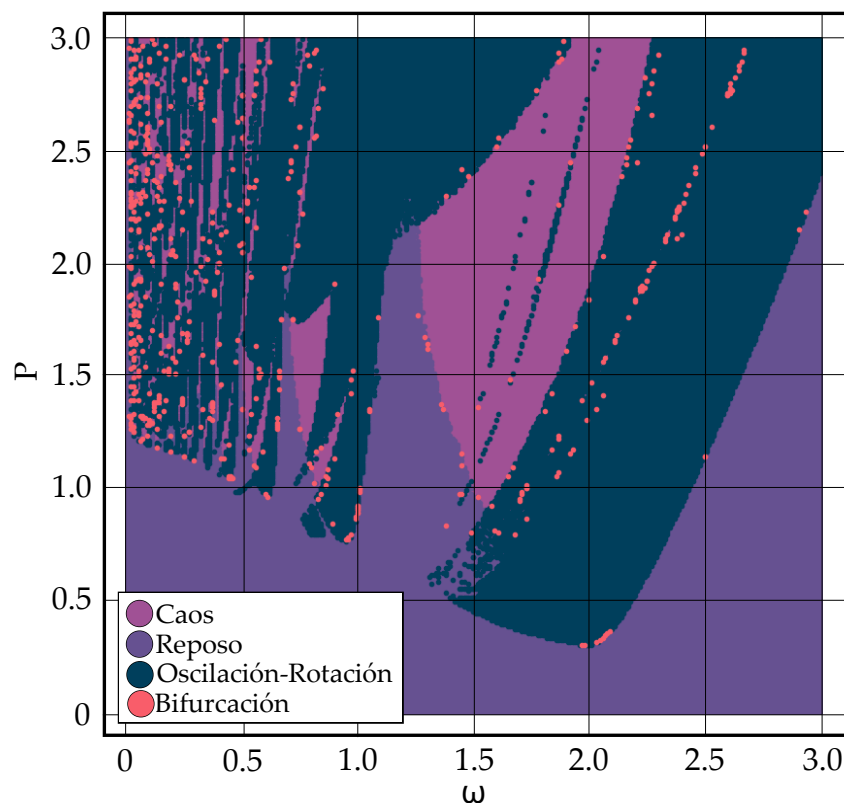


Figura 1: Espacio de parámetros del péndulo paramétrico construido mediante la evaluación del primer exponente de Lyapunov.

Para el caso de $\omega = 1,56$, se identifican valores del primer LCE variando la amplitud de forzamiento entre $0 \leq P \leq 3$. En la Figura 2a se aprecia que el exponente correspondiente a $P = 1,5$ es negativo, similar a lo hallado por [Leven y Koch \(1981\)](#). Luego se compararon los resultados obtenidos con el diagrama de bifurcaciones para los mismos parámetros. En las Figuras 2a y 2b se observan 3 zonas bien definidas correspondientes a respuestas caóticas ($0,9 \leq P \leq 2,5$) y no caóticas ($0 \leq P \leq 0,5$ y $2,5 \leq P \leq 3,0$ aproximadamente) y dos zonas de transición ($0,5 \leq P \leq 1$ y $P \approx 2,5$) correspondientes a cuando el exponente cambia de signo. Para evaluar el primer LCE se utilizó una variación $\Delta P = 0,01$.

Haciendo un análisis en profundidad para valores de forzamiento $1,45 \leq P \leq 1,55$ mediante mapas de Poincaré, se puede apreciar en la Figura 3a el atractor estable de periodo 4 y la cascada de doble periodo hacia caos para $P \approx 1,53$. En la Figura 3b se puede observar la proyección del espacio de fase para una amplitud de forzamiento de $P = 1,5$.

De igual manera a lo observado alrededor de $P = 1,5$, en la Figura 4a se puede apreciar una cascada período dos para $P = 1,2$ y $\omega = 1,56$, estimada a partir de identificar valores cercanos a cero del primer LCE para $P \approx 1,2$. Además, se puede observar un atractor de periodo 8 en la proyección del espacio de fase (Figura 4b).

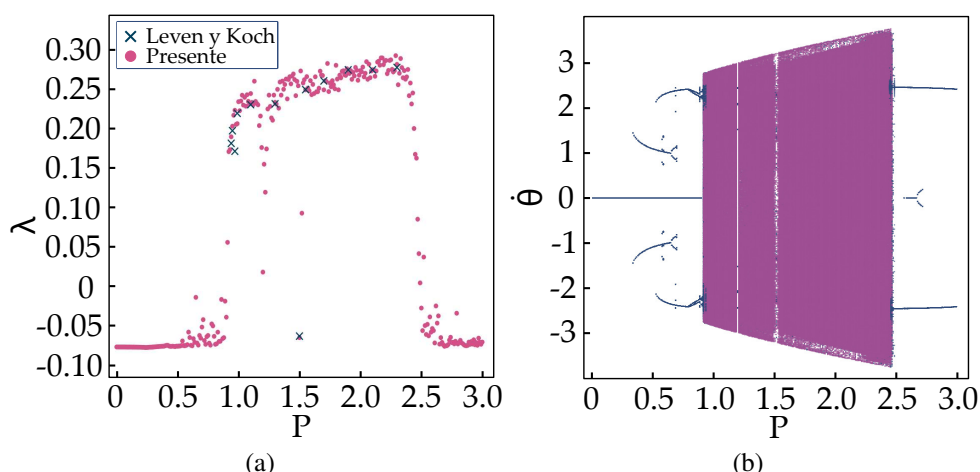


Figura 2: Barrido paramétrico para $0 \leq P \leq 3$, $\omega = 1,56$, $\beta = 0,15$. (a) Evaluación del primer LCE. (b) Diagrama de bifurcaciones, respuestas caóticas (violeta) no caóticas (azul).

En ambos casos los transitorios son muy largos, por lo cual para la construcción del diagrama de bifurcaciones se empleó un tiempo de simulación de 8000 s.

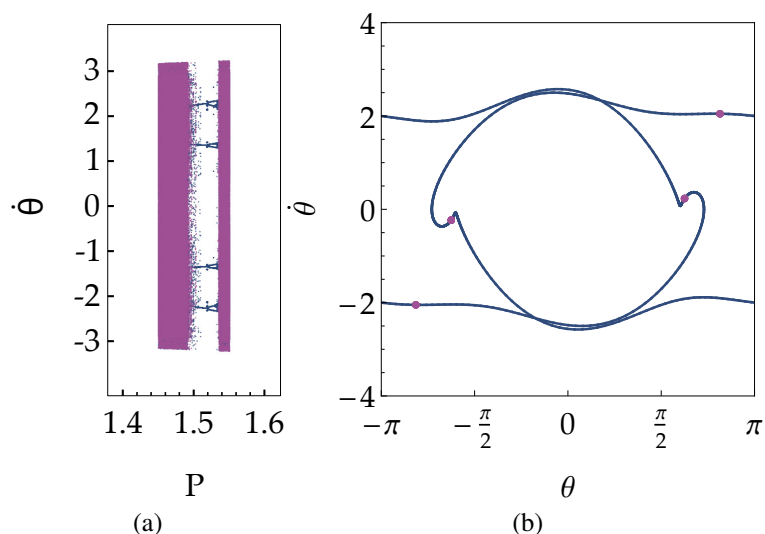


Figura 3: Respuestas no caóticas embebidas en caos $\omega = 1,56$, $\beta = 0,15$. (a) Diagrama de bifurcaciones para $1,45 \leq P \leq 1,55$, respuestas caóticas (violeta) no caóticas (azul). (b) Puntos de Poincaré (violeta) sobre la proyección del espacio de fase (azul) para $P = 1,5$ y $\omega = 1,56$ ($\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\theta}_0 = -3$).

Observando la región de transición para valores de forzamiento $0,5 \leq P \leq 1,0$ en la Figura 5a, se aprecia una gran variación entre los valores del primer LCE. Esto impide concluir que en ese rango de valores de forzamiento la respuesta del péndulo paramétrico sea caótica o no. En la Figura 5b se pueden observar una serie de bifurcaciones de doble periodo en cascada para $P \approx 0,93$, acorde a lo hallado por Leven y Koch (1981). Estos valores fueron estimados para una variación de forzamiento $\Delta P = 0,0001$.

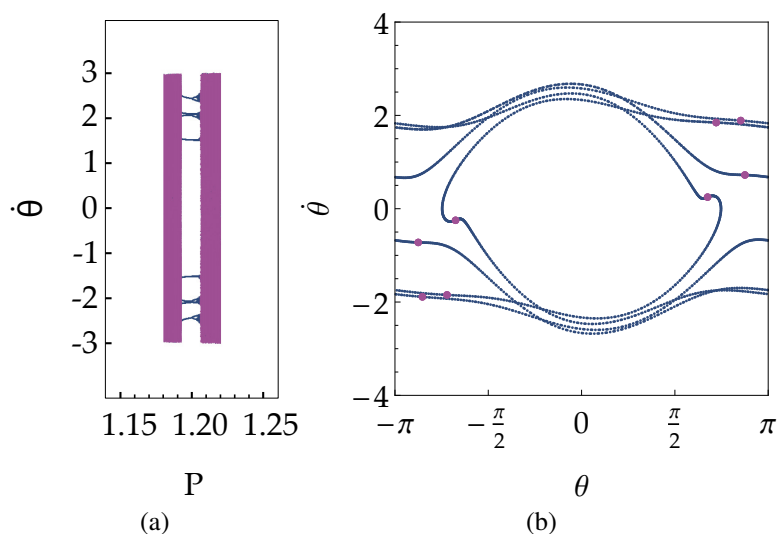


Figura 4: Respuestas no caóticas embebidas en caos $\omega = 1,56$, $\beta = 0,15$. (a) Diagrama de bifurcaciones para $1,18 \leq P \leq 1,22$, respuestas caóticas (violeta) no caóticas (azul). (b) Puntos de Poincaré (violeta) sobre la proyección del espacio de fase (azul) para $P = 1,2$ y $\omega = 1,56$ ($\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\theta}_0 = -3$).

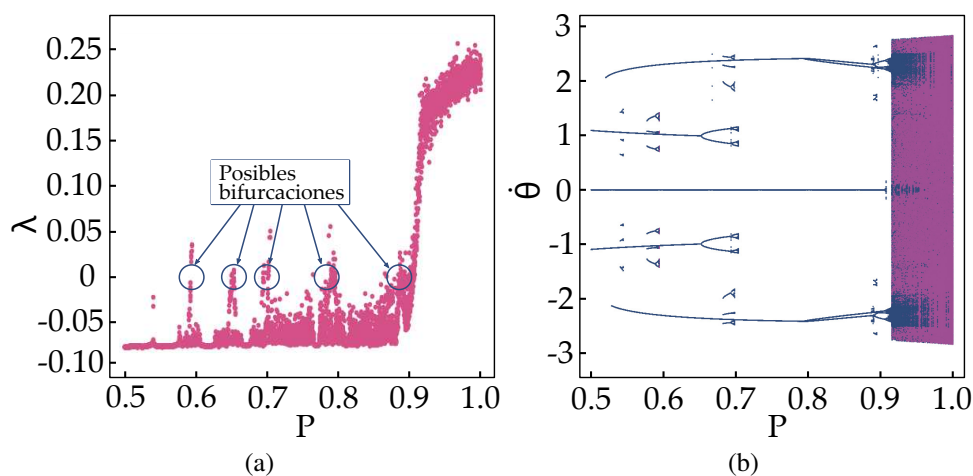


Figura 5: Barrido paramétrico para $0 \leq P \leq 1$, $\omega = 1,56$, $\beta = 0,15$. (a) Evaluación del primer LCE. (b) Diagrama de bifurcaciones, respuestas caóticas (violeta) no caóticas (azul).

Asimismo, resulta interesante comparar los intervalos del forzamiento correspondientes al cambio de signo del exponente para identificar posibles bifurcaciones (Figura 5a), para luego apreciarlas en el diagrama de bifurcaciones de la Figura 5b, hallado mediante mapas de Poincaré.

Para frecuencias de forzamiento (ω) entre 0 y 1 del espacio de parámetros (Figura 1), se puede observar erosión en las respuestas del péndulo paramétrico. Esto impidió identificar zonas claras donde la respuesta es caótica o no caótica. Es entonces que para comprender la dinámica en esta región del espacio de parámetros, se consideró un caso particular y se analizó su comportamiento. Se seleccionó $\omega = 0,5$ y se realizó un barrido de forzamiento para valores entre 0 y 3, con una variación $\Delta P = 0,01$ para calcular el exponente.

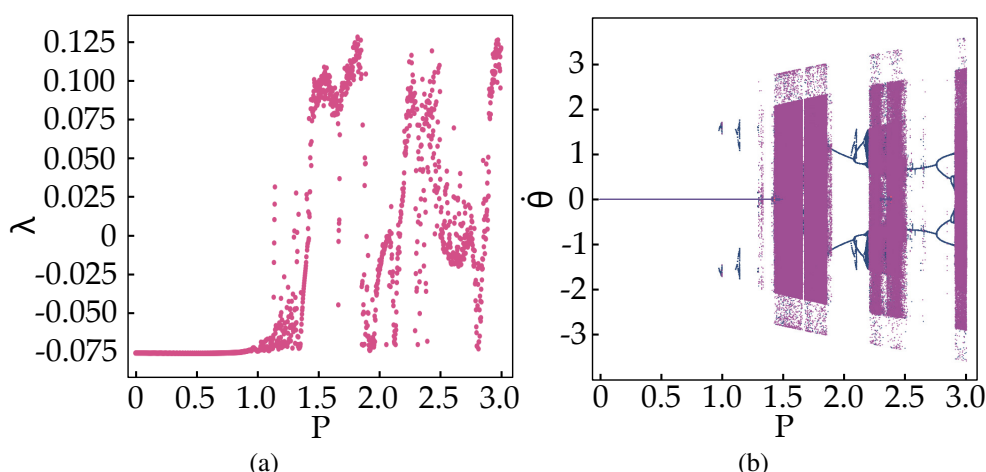


Figura 6: Barrido paramétrico para $0 \leq P \leq 3$, $\omega = 0,5$, $\beta = 0,15$. (a) Evaluación del primer LCE. (b) Diagrama de bifurcaciones, respuestas caóticas (violeta) no caóticas (azul).

En la Figura 6a se observan los valores que toma el primer LCE. Se puede apreciar que para valores de amplitud de forzamiento entre 1,4 y 1,8 y 2,2 y 2,5 es positivo, indicativo de caos, y es negativo en $0 \leq P \leq 1$ y $1,8 \leq P \leq 2,2$, lo que indica respuestas no caóticas.

Hay zonas de transición donde el exponente cambia de signo para valores de amplitud de forzamiento $1 \leq P \leq 1,4$ y $2,5 \leq P \leq 3$. Por lo tanto, para estos valores puede haber bifurcaciones del comportamiento.

Se comparó el LCE con el diagrama de bifurcaciones de la Figura 6b. En el mismo se apreciaban las bifurcaciones y las zonas donde coexisten respuestas oscilatorias y rotatorias, y otras en las que hay presencia de caos. Para valores de forzamiento alrededor de $P = 2,5$, si se quieren obtener respuestas no caóticas, tales como rotaciones, se deben evitar los largos periodos transitorios. En este caso se seleccionó un tiempo de simulación de 8000 s.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se estudió la dinámica del péndulo paramétrico a partir del exponente característico de Lyapunov. Se identificaron configuraciones de parámetros donde la respuesta es caótica y donde pueden haber otras tales como oscilaciones o rotaciones. Debido a la manera en que fue implementado el método, se ignora información tal como las bifurcaciones en la respuesta y las características de las soluciones no caóticas. Sin embargo, se pueden delimitar las zonas en el espacio paramétrico para estudiar luego el sistema dinámico con otras herramientas. En el caso del péndulo paramétrico, permite hacer un análisis *a priori* para seleccionar las zonas de parámetros consideradas de interés, y así realizar un estudio en profundidad de esos valores. Se ha demostrado así la utilidad del enfoque planteado sobre un sistema dinámico abordable en términos de costo computacional. No obstante, esta herramienta puede aplicarse en sistemas más complejos, permitiendo aproximaciones rápidas y confiables a rangos de parámetros que originen respuestas de interés, sin la necesidad de resolver numéricamente un espacio de parámetros o un diagrama de bifurcaciones. Cabe mencionar que esto último puede resultar prohibitivo en sistemas complejos. Así, se prevé emplear este método en el estudio de un sistema compuesto por un grupo de varios péndulos paramétricos con transmisibilidad vibratoria, con el objeto de abordar el fenómeno de sincronización y evaluar sus posibles ventajas en términos de generación energética.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca, a la Comisión Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, y a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica.

REFERENCIAS

- Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., y Strelcyn J.M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, 15(1):9–20, 1980.
- Clifford M. y Bishop S. Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A*, 201(2):191–196, 1995. ISSN 0375-9601. doi:[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00255-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00255-2).
- De Paula A.S., Savi M.A., Vaziri V., Pavlovskaja E., y Wiercigroch M. Experimental bifurcation control of a parametric pendulum. *Journal of Vibration and Control*, 23(14):2256–2268, 2017.
- Dotti F. y Virla J.N. Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16, 2021. doi:10.1115/1.4050699.
- Garira W. y Bishop S. Rotating solutions of the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 263:233–239, 2003. doi:10.1016/S0022-460X(02)01435-9.
- Leven R. y Koch B. Chaotic behaviour of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A*, 86(2):71–74, 1981.
- Moon F. *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 1987. ISBN 9780471856856.
- Nandakumar K., Wiercigroch M., y Chatterjee A. Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43:7–14, 2012. ISSN 0093-6413. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2012.03.003>.
- Osedelec V. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic exponents for dynamical systems. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.
- Peitgen H.O., Jürgens H., Saupe D., y Feigenbaum M.J. *Chaos and fractals: new frontiers of science*, volumen 7. Springer, 1992.
- Reguera F., Dotti F.E., y Machado S.P. Rotation control of a parametrically excited pendulum by adjusting its length. *Mechanics Research Communications*, 72:74–80, 2016. ISSN 0093-6413. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.01.011>.
- Shimada I. y Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of theoretical physics*, 61(6):1605–1616, 1979.
- Strogatz S.H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- Wiercigroch M. A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum. *UK patent application*, 2010.
- Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., y Vastano J.A. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: nonlinear phenomena*, 16(3):285–317, 1985.
- Yurchenko D. y Alevras P. Dynamics of the n-pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control*, 1, 2013. doi:10.1007/s40435-013-0033-x.