

ESTUDIO COMPARATIVO DE METODOLOGÍAS PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS DE VIGAS QUE INCLUYEN LAS NO LINEALIDADES DE VON KÁRMÁN

COMPARATIVE STUDY OF METHODOLOGIES FOR ANALYZING BEAM STRUCTURES THAT INCLUDE VON KÁRMÁN'S NON-LINEARITIES

Emmanuel Beltramo^{a,b}, Martín E. Pérez Segura^{a,b}, Bruno A. Roccia^{b,c} y Sergio Preidikman^{a,b}

^a*IDIT - CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, idit@fcefyn.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>*

^b*Dpto. de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, depestructuras@fcefyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

^c*Bergen Offshore Wind Centre (BOW), Geophysical Institute, University of Bergen, Norway, post@uib.no <http://www.uib.no>*

Palabras clave: No linealidad de Von Kármán, viga de Timoshenko, marco de referencia co-rotacional, análisis estático.

Resumen. En este trabajo se realiza un estudio comparativo de los resultados obtenidos al aplicar distintas variantes de un modelo de viga para el análisis de estructuras que experimentan grandes desplazamientos y rotaciones. El modelo consiste en una formulación de elementos finitos de viga basada en la teoría de Timoshenko que incluye, de manera consistente, las no linealidades geométricas de Von Kármán. Para resolver las ecuaciones que gobiernan la evolución espacial de la estructura, se adoptan dos descripciones cinemáticas: la primera considerando un marco de referencia absoluto y la segunda uno co-rotacional. El estudio se centra en problemas estáticos considerando, en cada caso, la aplicabilidad y velocidad de convergencia. Los resultados obtenidos muestran concordancia con aquellos expuestos en la bibliografía. Finalmente, se establecen pautas generales sobre el desempeño del modelo presentado.

Keywords: Von Kármán's non-linearities, Timoshenko's beam, co-rotational frame, static analysis.

Abstract. This article presents a comparative study of the results obtained by the implementation of different alternatives of a beam model for the analysis of structures undergoing large deflections and rotations. The model consists in a beam finite element formulation based on Timoshenko's theory that includes consistently Von Kármán's geometric non-linearities. In order to solve the governing equations of the structure, two kinematic descriptions are harnessed: the first one considering an absolute reference frame and the second one considering a co-rotational one. The study addresses static problems and analyses the applicability and convergence speed of each description. Finally, since the findings are in agreement with those published in the literature, general guidelines are established regarding the performance of the model.

1. INTRODUCCIÓN

En el últimas décadas, el interés en el estudio de componentes estructurales que experimentan grandes desplazamientos y rotaciones ha crecido considerablemente. En este sentido, los esquemas de análisis han adoptado, casi exclusivamente, alguna variante del Método de los Elementos Finitos (FEM) que, al tratar estos tipos de estructuras, incorporan indefectiblemente modelos no lineales. El proceso de aplicación del FEM a un problema estructural puede dividirse en dos grandes etapas. La primera de ellas engloba todos los aspectos relacionados a la formulación del modelo, abarca aspectos cinemáticos, constitutivos y de discretización, y finaliza con el planteo de un sistema de ecuaciones algebraicas. La segunda etapa consiste en el método de solución de dicho sistema de ecuaciones y comprende principalmente los aspectos numéricos y de implementación del método, así como también conceptos cinemáticos relacionados con el uso de marcos de referencia. En lo que a formulaciones respecta, existen diversas alternativas que van desde las denominadas *geoméricamente exactas*, como la propuesta por Da Lozzo y Auricchio (2010), hasta formulaciones híbridas que incorporan no linealidades parciales para capturar fenómenos específicos (Reddy, 2014). Mientras que los métodos de solución pueden ser directos o incrementales, en descripciones absolutas o actualizadas (Bergan et al., 1978). La elección tanto de la formulación como del método de solución resultan determinantes en la validez y aplicabilidad de los análisis.

En este trabajo, se adopta una formulación tridimensional de elementos finitos de viga basada en la teoría clásica de Timoshenko que incluye, de manera consistente, las no linealidades geométricas de Von Kármán. Utilizando como base esta formulación, se analizan comparativamente tres métodos de solución para resolver las ecuaciones algebraicas que de ella se obtienen: *i*) un método directo en un marco de referencia absoluto; *ii*) un método incremental en un marco de referencia absoluto; y *iii*) un método incremental en un marco de referencia co-rotacional.

Luego de esta sección introductoria, en la Sección 2 y en la Sección 3 se exponen de forma resumida los principios básicos de la formulación y del modelo de FEM adoptados. En la Sección 4 se introducen los métodos de solución utilizados. Luego, en la Sección 5, se presentan casos de estudio que, a pesar de su simplicidad, son sumamente representativos y se encuentran frecuentemente en la literatura especializada. Finalmente, en la Sección 6 se enuncian las conclusiones del presente trabajo.

2. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO Y RELACIONES CONSTITUTIVAS

En esta sección se sintetizan los aspectos cinemáticos más relevantes del modelo de viga y se presentan las relaciones constitutivas que gobiernan el comportamiento de su material. En el siguiente desarrollo los subíndices con letras latinas adoptan valores de 1 a 3, mientras que los subíndices con letras griegas van de 2 a 3. Además, se aplica la notación de Einstein para la suma.

2.1. Espacio de configuración

Una viga puede concebirse como un cuerpo tridimensional \mathcal{B}_0 compuesto por una colección infinita de puntos materiales $p \in \mathcal{B}_0$. Inmersa en un espacio euclídeo, la localización espacial de estos puntos se define en términos del producto cartesiano entre una línea recta $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$, denominada *eje de la viga*, y un dominio plano \mathcal{A}_0 , denominado *sección transversal*. La cinemática del cuerpo bajo deformación se describe a partir de dos espacios de configuración: un estado de referencia denotado por \mathcal{C}_0 y un estado actual denotado por \mathcal{C} , tal como se presenta en la Fig. 1. Para especificar la configuración \mathcal{C}_0 se considera un sistema de coordenadas local fijo en el

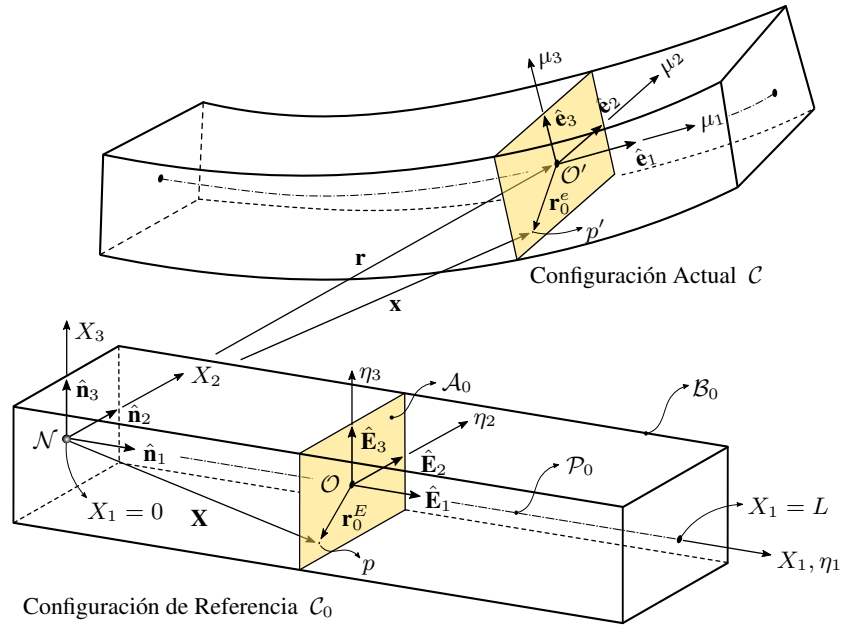


Figura 1: Representación de una viga embebida en el espacio euclídeo tridimensional.

espacio X_i con origen en el punto \mathcal{N} y una base ortonormal dextrógrica asociada $\hat{\mathbf{n}}_i$. A su vez, para una sección transversal arbitraria se introduce un sistema de coordenadas η_i con origen en el punto \mathcal{O} junto a una base ortonormal dextrógrica $\hat{\mathbf{E}}_i$. Los versores $\hat{\mathbf{E}}_\alpha$ están contenidos en el plano de la sección y el versor $\hat{\mathbf{E}}_1$ es normal a ella, tangente al eje X_1 . Por otro lado, para especificar la configuración \mathcal{C} se introduce un sistema de coordenadas μ_i con origen en el punto \mathcal{O}' y una base ortonormal dextrógrica $\hat{\mathbf{e}}_i$. Los versores $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$ están contenidos en el plano de la sección, mientras que el versor $\hat{\mathbf{e}}_1$ es normal a este plano. En este trabajo, la cinemática de la viga se estudia siguiendo un enfoque Lagrangiano y se sustenta en las siguientes hipótesis: *H1*) se adopta la teoría clásica de Timoshenko, es decir que se consideran los efectos de las deformaciones de corte y de los giros por flexión; *H2*) las contracciones laterales debido a elongaciones axiales se consideran despreciables, esto significa que se ignora el efecto Poisson; y *H3*) la rotación de la sección transversal se asume pequeña y se aproxima hasta el primer orden, y el desplazamiento del eje de la viga se considera pequeño respecto a su longitud.

2.2. Campo de desplazamiento

A partir de la Fig. 1, el vector posición de un punto material arbitrario p en la configuración \mathcal{C}_0 se define por:

$$\mathbf{X}(X_1, \eta_\alpha) = X_1 \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{r}_0^E(\eta_\alpha), \quad (1)$$

donde $\mathbf{r}_0^E(\eta_\alpha) = \eta_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha$ es el vector que localiza al punto p respecto de \mathcal{O} . A su vez, el punto p en la configuración \mathcal{C} se denota por p' y su vector posición es:

$$\mathbf{x}(X_1, \mu_\alpha) = \mathbf{r}(X_1) + \mathbf{r}_0^e(\mu_\alpha) = \mathbf{r}(X_1) + \mu_\alpha \boldsymbol{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha, \quad (2)$$

donde $\mathbf{r}_0^e(\mu_\alpha) = \mu_\alpha \boldsymbol{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha$ es el vector que localiza al punto p' respecto de \mathcal{O}' y $\boldsymbol{\Lambda}(X_1) \in SO(3)$ es un tensor de rotación uniparamétrico definido por $\boldsymbol{\Lambda}(X_1) = \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_i$. El campo de desplazamiento $\mathbf{U}(X_i) \in \mathbb{R}^3$ se obtiene por medio de la diferencia entre los vectores $\mathbf{x}(X_1, \mu_\alpha)$ y $\mathbf{X}(X_1, \eta_\alpha)$, es decir:

$$\mathbf{U}(X_i) = \mathbf{x}(X_i) - \mathbf{X}(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + [\boldsymbol{\Lambda}(X_1) - \mathbf{I}] X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis $H3$ se puede aproximar al tensor $\Lambda(X_1)$ por medio de uno de primer orden $\Lambda(X_1) \approx \mathbf{I} + \tilde{\Theta}(X_1)$. En este sentido, si se sustituye tal aproximación en la Ec. (3) se obtiene el campo de desplazamiento linealizado $\mathbf{U}_l(X_i) \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{U}_l(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\Theta}(X_1)X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \mathbf{U}_0(X_1) + \boldsymbol{\theta}(X_1) \times X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha, \quad (4)$$

donde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ es el tensor identidad, $\tilde{\Theta}(X_1) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ es un tensor antisimétrico y $\boldsymbol{\theta}(X_1) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ su vector axial asociado. Las componentes cartesianas del tensor (o del vector) $\theta_i(X_i)$ pueden interpretarse como rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes X_i .

2.3. Campo de deformación

El tensor de deformación de Green-Lagrange $\mathbf{E}_{gl}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ se define por:

$$\mathbf{E}_{gl}(X_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}), \quad (5)$$

donde $\mathbf{H} = \mathbf{U}_l(X_i) \otimes \nabla$ es el tensor gradiente de desplazamiento y $\nabla \equiv \partial(\cdot)/\partial X_i \hat{\mathbf{E}}_i$ el operador Nabla (Reddy, 2019).

El tensor de deformación de Von Kármán se puede derivar del tensor de Green-Lagrange reteniendo las componentes lineales de deformación y las no lineales que satisfacen la hipótesis cinemática de Von Kármán. Esta hipótesis afirma que las rotaciones provenientes de los desplazamientos transversales del eje de la viga son moderadas, lo cual implica que los cuadrados de la derivada de $U_0^\alpha(X_1)$ respecto a la coordenada espacial X_1 no deben despreciarse. Con el propósito de simplificar consistentemente los diversos términos y, siguiendo los trabajos expuestos en la literatura (Zhu et al., 2010; Reddy y Mahaffey, 2013), se propone:

$$\left(\frac{\partial U_0^\alpha}{\partial X_1} \right)^2 \sim O(\theta_i), \quad \frac{\partial U_0^1}{\partial X_1} \sim O(\theta_i), \quad O \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial X_1} \right) \approx O(\tilde{\Theta}) \sim O(\theta_i) \quad (6)$$

A partir de lo mencionado, se efectúa un análisis de orden sobre los términos no lineales de la Ec. (5) y se retienen todas aquellas componentes de $O(\theta_i)$ inclusive. De ello resulta el tensor de deformación de Von Kármán $\mathbf{E}_{vk}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{E}_{vk}(X_i) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right], \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\partial U_0^2}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_2 + \frac{\partial U_0^3}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_3 \quad (7)$$

Un análisis de la Ec. (7) permite notar que sólo existen tres componentes no nulas: $E_{11}(X_1)$, $E_{12}(X_1)$ y $E_{13}(X_1)$.

2.4. Relaciones constitutivas

El comportamiento del material de la viga se evalúa por medio de la ley de Hooke generalizada. Para un cuerpo elástico tridimensional sujeto a condiciones isotérmicas, esta ley está dada por (Reddy, 2019):

$$\mathbf{S}(X_i) = \mathbb{C} : \mathbf{E}_{vk}(X_i), \quad (8)$$

donde $\mathbf{S}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ es el tensor de tensiones simétrico de Piola-Kirchoff y $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ es el tensor de elasticidad simétrico. En virtud de la isotropía y homogeneidad del material, \mathbb{C} se caracteriza con solo dos constantes elásticas, las cuales son el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν .

3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

3.1. Esquema de interpolación elemental

En el contexto del modelo de viga, la línea $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$ que describe al eje de la misma se divide en N_{el} subdominios elementales tal que:

$$[0, L] = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} I_e^{h_e}, \quad I_e^{h_e} \subset [X_1^i, X_1^j], \quad (9)$$

donde L representa a la longitud de la viga, $I_e^{h_e}$ denota a un elemento finito típico, X_1^i y X_1^j son las coordenadas cartesianas del nodo inicial y final del elemento finito, y $h_e = X_1^j - X_1^i$ indica su longitud.

En el ámbito de las estructuras, es bien conocido que los elementos basados en la teoría de Timoshenko pueden experimentar un efecto indeseado denominado *bloqueo por corte*. Sin embargo, si las no linealidades geométricas de Von Kármán también son consideradas, los elementos pueden incurrir, además, en *bloqueo membranal* en determinadas situaciones. Según expone Reddy (2014) esto se debe a la incapacidad del elemento de representar un estado de deformación axial nula. Para evitar estos fenómenos numéricos se recurre a la integración reducida de determinados términos de rigidez y al uso de funciones de forma particulares.

En este trabajo, para interpolar el desplazamiento del eje elemental $\mathbf{U}_0^e(X_i)$ y las rotaciones infinitesimales $\theta^e(X_i)$ en el interior de un subdominio arbitrario $I_e^{h_e}$ se considera en un elemento finito recto de dos nodos. Cada nodo posee seis grados de libertad, tres rotaciones y tres giros. Los desplazamientos y giros del nodo i se denotan por medio de $u_{ik}^e \in \mathbf{u}_i^e$ y $\theta_{ik}^e \in \boldsymbol{\theta}_i^e$, mientras que los desplazamientos y giros asociados al nodo j se indican por medio de $u_{jk}^e \in \mathbf{u}_j^e$ y $\theta_{jk}^e \in \boldsymbol{\theta}_j^e$. En tanto que el subíndice k indica el eje X_i respecto al cual se mide la variable geométrica. Por simplicidad, se agrupa a los grados de libertad nodales en un vector columna $\boldsymbol{\eta}_e \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$

$$\boldsymbol{\eta}_e = [\mathbf{u}_i^e \quad \boldsymbol{\theta}_i^e \quad \mathbf{u}_j^e \quad \boldsymbol{\theta}_j^e]^T \quad (10)$$

El desplazamiento axial ${}_e U_0^1(X_1)$ y las rotaciones ${}_e \theta_i(X_1)$ se interpolan utilizando a los polinomios lineales de Lagrange como funciones de forma. Por su parte, la interpolación de los desplazamientos transversales ${}_e U_0^\alpha(X_1)$ se basa en las funciones de forma cuadráticas del esquema de interpolación ligada propuesto por Oñate (2013). Este esquema evita el bloqueo por corte cuando se integran de forma exacta los términos lineales de rigidez pero, es necesario emplear integración reducida en los términos no lineales para evitar el bloqueo membranal. En virtud de lo mencionado, se puede expresar:

$$\mathbf{U}_0^e(\xi) = \mathbf{N}_u(\xi) \boldsymbol{\eta}_e, \quad \boldsymbol{\theta}^e(\xi) = \mathbf{N}_\theta(\xi) \boldsymbol{\eta}_e, \quad (11)$$

donde ξ es una coordenada natural que se relaciona con la coordenada espacial X_1 por medio de la transformación afín del elemento (Reddy, 2019) y $\mathbf{N}_u(\xi), \mathbf{N}_\theta(\xi) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$ se denominan matrices de interpolación de desplazamientos y giros.

3.1.1. Aproximación elemental del campo de desplazamiento

El campo de desplazamiento en el interior de un subdominio genérico $I_e^{h_e}$ se obtiene sustituyendo la Ec. (11) en la Ec. (4):

$$\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha) = \bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e, \quad (12)$$

donde $\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$ es una matriz compuesta por el tensor identidad y las coordenadas X_α .

3.2. Ecuaciones de equilibrio elemental

Las ecuaciones de equilibrio a nivel elemental se obtienen por medio del principio de trabajo virtual (Reddy, 2017):

$$\delta W_I = \delta \bar{W}_E, \quad (13)$$

donde δW_I denota el trabajo virtual desarrollado por los esfuerzos internos y $\delta \bar{W}_E$ indica el trabajo virtual realizado por las cargas externas no conservativas. Considerando que sobre el elemento actúa un sistema de fuerzas y momentos distribuidos, teniendo en cuenta las Ecs. (7) y (8), y luego de algunos desarrollos, resulta el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio elemental no lineal:

$$\mathbf{K}_e(\boldsymbol{\eta}_e) \boldsymbol{\eta}_e = \mathbf{F}_e + \mathbf{M}_e, \quad (14)$$

donde $\mathbf{K}_e(\boldsymbol{\eta}_e) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ es la matriz de rigidez elemental no lineal y $\mathbf{F}_e, \mathbf{M}_e \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$ constituyen los vectores de fuerzas y momentos nodales respectivamente.

4. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Para resolver las ecuaciones de equilibrio estructural se adoptan dos descripciones cinemáticas diferentes: la primera de ellas considera un marco de referencia absoluto (MRA) y la segunda, un marco de referencia co-rotacional (MRC).

4.1. Métodos de solución en un MRA

En lo que respecta a la primera descripción, se implementan dos procedimientos iterativos de solución: el método directo o de Picard (referido a partir de aquí como S1) y el método de Newton-Raphson (referido a partir de aquí como S2). En S1, una vez conocida la solución en la iteración $r - 1$ se computa la solución en la iteración r a partir de:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\eta}^{(r-1)})\boldsymbol{\eta}^{(r)} = \mathbf{F}^{(r-1)} \quad (15)$$

En S2, por su parte, luego de calcular la solución en la iteración $r - 1$ se obtiene la solución en la iteración r por medio de:

$$\mathbf{K}_t(\boldsymbol{\eta}^{(r-1)})\Delta\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}^{(r-1)} - \mathbf{K}(\boldsymbol{\eta}^{(r-1)})\boldsymbol{\eta}^{(r-1)}, \quad \boldsymbol{\eta}^{(r)} = \boldsymbol{\eta}^{(r-1)} + \Delta\boldsymbol{\eta}, \quad (16)$$

donde $\mathbf{K}_t(\boldsymbol{\eta})$ es la matriz de rigidez tangente de la estructura. En ambos casos las iteraciones inician con un vector de grados de libertad nodal nulo. Mayores detalles de implementación se encuentran en la obra de Reddy (2014).

4.2. Método de solución en un MRC

Para resolver las ecuaciones de equilibrio utilizando un MRC se implementa una versión *ad-hoc* del procedimiento co-rotacional propuesto por Elkaranshaw et al. (2018) y Nguyen y Tran (2016). Esta versión adopta el modelo antes presentado para resolver problemas bidimensionales (referido a partir de aquí como S3). La idea principal detrás del *método co-rotacional* es introducir un sistema de referencia local que se mueve y rota con cada elemento durante el proceso de deformación. Considerando este nuevo sistema local, el desplazamiento del elemento puede descomponerse en dos partes: un movimiento de cuerpo rígido y un movimiento de deformación pura. Esto, al expresarse en un sistema de referencia global, resulta

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{D}_e^r + \mathbf{T}_r \boldsymbol{\eta}_e^d, \quad (17)$$

donde $\mathbf{D}_e \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$ representa el vector de grados de libertad elementales expresados en el sistema de referencia global, $\mathbf{D}_e^r \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$ denota el vector de grados de libertad asociado al movimiento de cuerpo rígido del elemento, $\mathbf{T}_r \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ es la matriz de transformación entre el sistema de referencia local co-rotacional y el sistema de referencia global y, $\boldsymbol{\eta}_e^d \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$ es el vector de grados de libertad nodales asociados a la deformación pura del elemento expresado en el sistema co-rotacional.

El sistema co-rotacional de cada elemento se define con su origen en el nodo inicial y el primero de sus ejes en dirección al nodo final. De este modo, $\boldsymbol{\eta}_e^d$ en la Ec. (17) cumple con las siguientes condiciones:

$$\boldsymbol{\eta}_e^d = [\mathbf{0} \quad {}_r\boldsymbol{\theta}_i^e \quad {}_r\mathbf{u}_j^e \quad {}_r\boldsymbol{\theta}_j^e]^T, \quad (18)$$

donde ${}_r\mathbf{u}_j^e = \{\Delta L \quad 0 \quad 0\}^T$, siendo ΔL el cambio en la longitud del elemento. Además, ${}_r\boldsymbol{\theta}_i^e$ y ${}_r\boldsymbol{\theta}_j^e$ son los giros nodales respecto al sistema co-rotacional [Le et al. \(2011\)](#).

Teniendo en cuenta la Ec. (17) y la Ec. (18), las fuerzas internas sobre cada elemento dependerán únicamente de la deformación asociada a $\boldsymbol{\eta}_e^d$, es decir

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\eta}_e^d)\boldsymbol{\eta}_e^d = \mathbf{F}_e^d \quad (19)$$

El vector de fuerzas internas $\mathbf{F}_e^d \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$ puede introducirse sin mayor dificultad en un esquema de solución iterativo similar a S2. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que luego de cada iteración los sistemas de referencia co-rotacionales de cada elemento deben actualizarse y junto con ellos las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas internas.

5. CASOS DE ESTUDIO

Los métodos de solución antes resumidos se aplican a los casos de estudio siguientes.

5.1. Caso 1

En este caso de estudio se evalúa el comportamiento de una viga bi-empotrada sujeta a una carga distribuida constante. Las propiedades mecánicas y geométricas de la viga se resumen en la Fig. 2a y en la Fig. 2b se grafica el desplazamiento vertical del nodo central de la viga en función de la carga distribuida.

En términos generales, los resultados obtenidos usando las tres alternativas de son aceptables. Los desplazamientos computados por medio de S1 y S2 son prácticamente idénticos entre sí y presentan una diferencia del 1,1 % comparado con el de [Reddy \(2014\)](#) para el máximo valor de carga, mientras que el desplazamiento obtenido a través de S3 difiere en un 5 %. Respecto a la velocidad de convergencia, la alternativa S1 requirió 6 iteraciones por cada incremento de carga, en tanto que el S2 y el S3 necesitaron 3 iteraciones respectivamente. Para todos los casos, el error máximo de convergencia se fijó en 1×10^{-8} . Para resolver el modelo la viga se discretizó usando 10 elementos finitos y la carga se aplicó en incrementos de 0,2 [lbf/in].

5.2. Caso 2

Aquí se evalúa el comportamiento de una viga simplemente apoyada sujeta dos momentos flectores iguales y opuestos en sus extremos, y cuyas propiedades se presentan en la Fig. 2a. Los resultados obtenidos se exponen en la Fig. 2b y en la Fig. 2c, donde se muestran los desplazamientos en la dirección y y en la dirección x del nodo central de la viga en función del momento aplicado, respectivamente. En este caso, los resultados se contrastan contra los obtenidos con un software de elementos finitos (Ansys®).

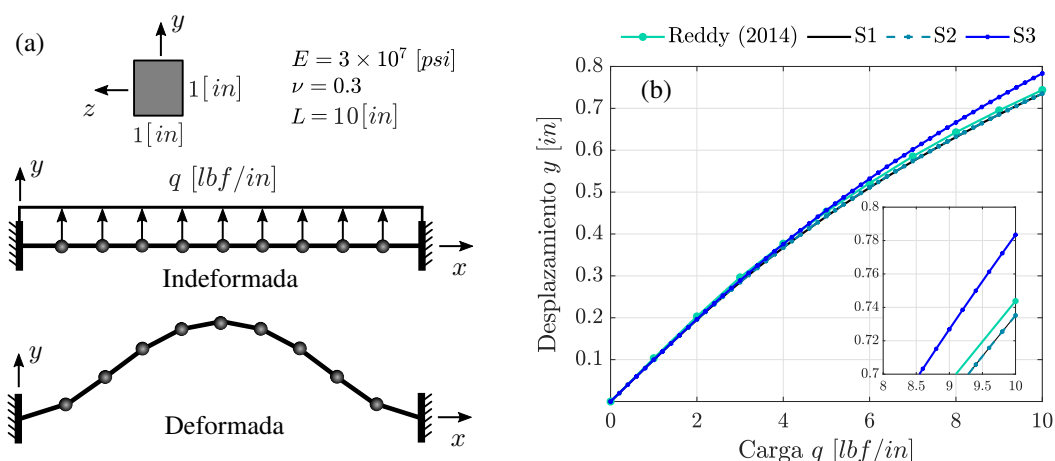


Figura 2: Viga bi-empotrada sujeta a una carga distribuida constante: (a) propiedades mecánicas y geométricas; (b) desplazamiento transversal del nodo central.

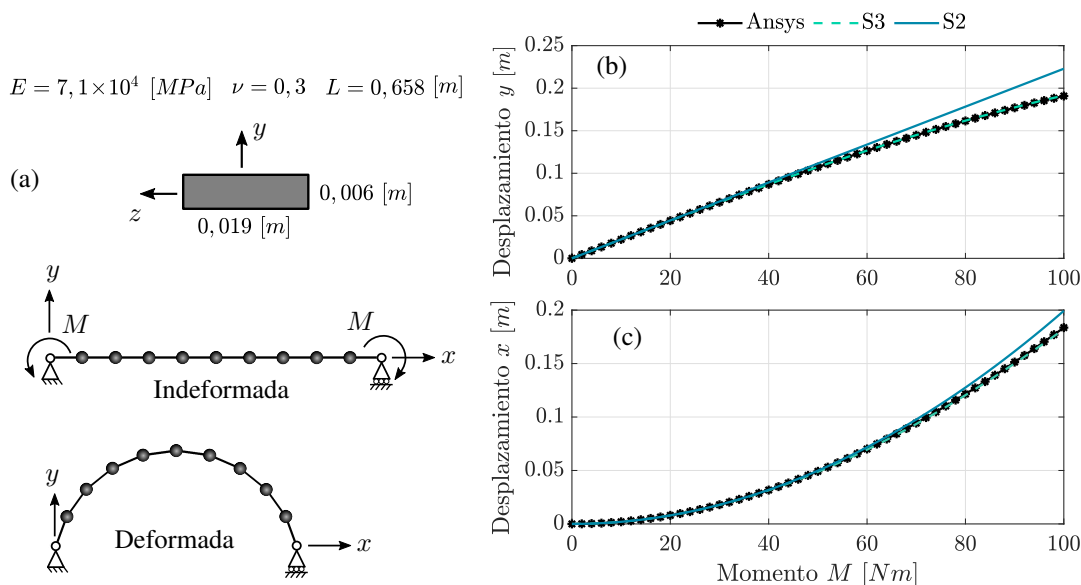


Figura 3: Viga simplemente apoyada sujeta a dos momentos flectores en sus extremos.

En términos generales, tanto S2 como S3 permiten obtener resultados aceptables y se necesitaron en ambos casos 3 iteraciones para lograr la convergencia. Sin embargo, a medida que se incrementa la carga, la solución obtenida con S2 muestra una discrepancia respecto a las otras que alcanza un 14% para el desplazamiento en y y un 9,4% para el desplazamiento en x . Por último, debe destacarse que el desplazamiento transversal obtenido con S2 muestra un comportamiento prácticamente lineal, y que no fue posible lograr convergencia con S1. Para todos los casos, el error máximo de convergencia se fijó en 1×10^{-8} y la carga se particionó en incrementos de $1,0 [Nm]$.

5.3. Caso 3

El tercer caso corresponde a un ejemplo de amplia difusión en la literatura y consiste en una viga empotrada-libre sujeta a un momento flector. Las propiedades mecánicas y geométricas fueron obtenidas del trabajo de [Da Lozzo y Aurichio \(2010\)](#). Para resolver el modelo se dis-

cretizó a la viga utilizando 20 elementos finitos y se aplicó la carga externa considerando 50 incrementos de carga. Este caso tiene como propósito mostrar la potencialidad de la descripción co-rotacional ya que no puede ser resuelto por ninguna de las otras alternativas presentadas.

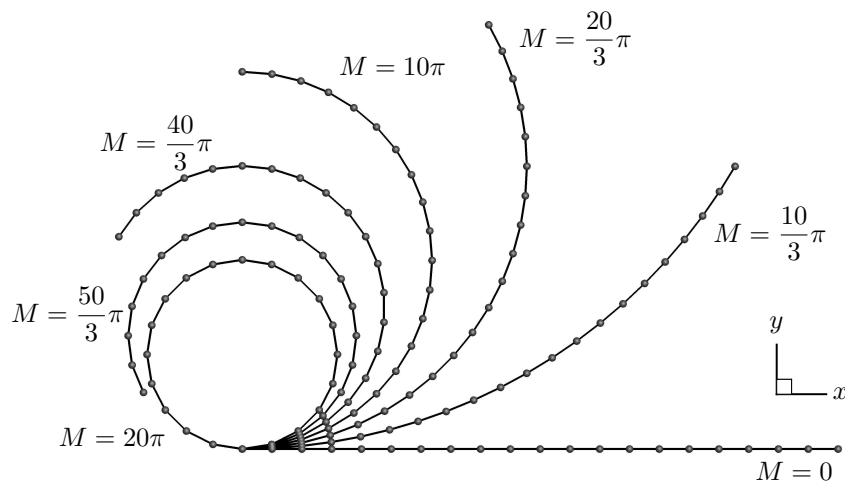


Figura 4: Deformada de la viga para diferentes momentos M (expresados en $[Nmm]$).

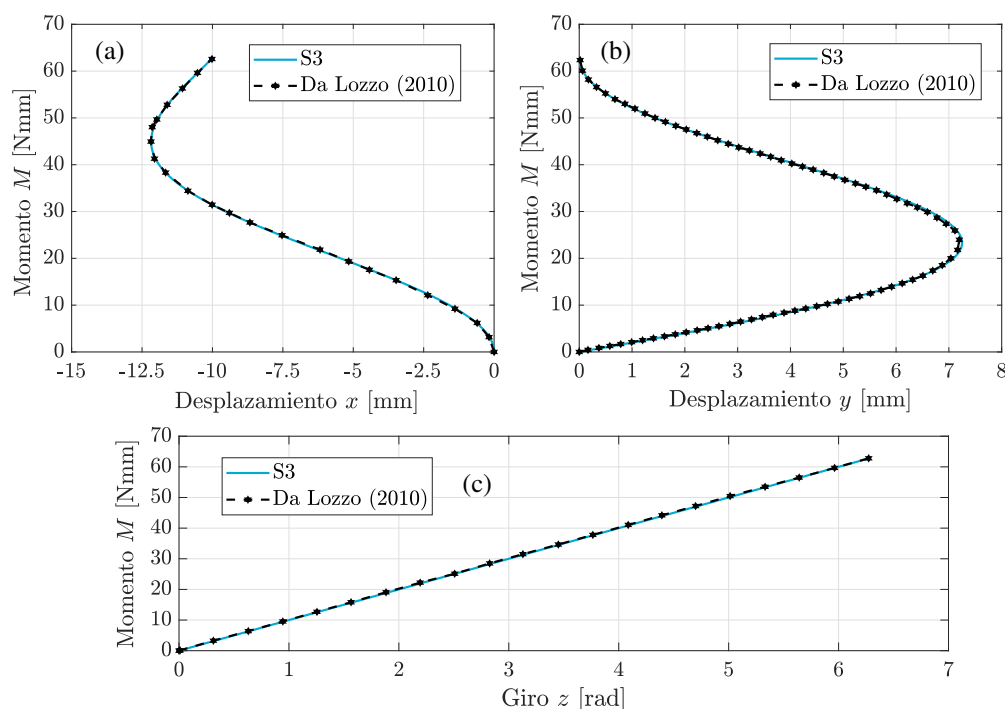


Figura 5: Momento externo aplicado en función de: (a) desplazamiento en x , (b) desplazamiento en y y (c) giro en z del extremo libre de la viga.

En la Fig. 4 se presenta la secuencia de deformación de la viga a medida que se incrementa el momento externo aplicado. En ella se puede observar que para un momento de $20\pi [Nmm]$ la viga adopta una configuración circular. Por otro lado, en la Fig. 5 se grafica la evolución de los desplazamientos (en x e y) y del giro (alrededor de z) del extremo libre de la viga en función del momento flector externo. Tal como se observa, existe una excelente concordancia entre los resultados obtenidos y los publicados por (Da Lozzo y Auricchio, 2010).

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizaron distintos métodos de solución de las ecuaciones de gobierno obtenidas a partir de una formulación de elementos finitos de viga basada en la teoría de Timoshenko que incluye, de manera consistente, las no linealidades geométricas de Von Kármán. Los métodos se aplicaron a tres casos de estudio para comparar sus performances. Los resultados muestran que los métodos en marcos de referencia absolutos (S1 y S2) sólo son capaces de captar desplazamientos moderados y, en general, el método incremental (S2) requiere menos cantidad de iteraciones para lograr la convergencia. Por otro lado, el método basado en un marco de referencia co-rotacional (S3) constituye una alternativa eficiente para abordar problemas que presenten grandes desplazamientos y rotaciones. Finalmente, tomando el presente estudio como base, se proponen como trabajos futuros: la extensión del modelo co-rotacional a casos tridimensionales para poder ahondar en la caracterización de su potencialidad como método de solución, y la incorporación de efectos dinámicos en la formulación utilizada.

REFERENCIAS

- Bergan P., Horrigmoe G., Bråkeland B., y Søreide T. Solution techniques for non-linear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(11):1677–1696, 1978.
- Da Lozzo E. y Auricchio F. Geometrically exact three-dimensional beam theory: modeling and fem implementation for statics and dynamics analysis. *Master Degree Thesis, Earthquake Engineering, Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia, Pavia, Italy*, 2010.
- Elkaranshawy H.A., Elerian A.A., y Hussien W.I. A corotational formulation based on hamilton's principle for geometrically nonlinear thin and thick planar beams and frames. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, 2018.
- Le T.N., Battini J.M., y Hjjaj M. Efficient formulation for dynamics of corotational 2d beams. *Computational Mechanics*, 48(2):153–161, 2011.
- Nguyen D.K. y Tran T.T. A corotational formulation for large displacement analysis of functionally graded sandwich beam and frame structures. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016.
- Oñate E. *Structural Analysis With The Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates And Shells*. Springer Science & Business Media, 2013.
- Reddy J. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis Second Edition: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. Oxford, 2014.
- Reddy J. y Mahaffey P. Generalized beam theories accounting for von kármán nonlinear strains with application to buckling. *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*, 1(1):120–134, 2013.
- Reddy J.N. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons, 2017.
- Reddy J.N. *Introduction to the finite element method*. McGraw-Hill Education, 2019.
- Zhu H., Cai Y., Paik J., y Atluri S. Locking-free thick-thin rod/beam element based on a von karman type nonlinear theory in rotated reference frames for large deformation analyses of space-frame structures. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 57(2):175, 2010.