

VIBRACIONES DE DOS VIGAS LARGAS ACOPLADAS CON UN RESORTE TRASLACIONAL

José Alberro^a, Javier L. Raffo^a

^a*Grupo de Mecánica Computacional y Experimental, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

Palabras Clave: Vibraciones, vigas acopladas, restricciones elásticas, formas modales, cálculo de variaciones.

Resumen. En la industria en general se encuentran diferentes tipos de vínculos entre vigas sea para soportes, por refuerzos u otros objetivos. En el presente trabajo se estudia las vibraciones de un sistema que consiste en dos vigas largas con restricciones elásticas generales en ambos extremos y un vínculo elástico que une a ambas vigas en puntos arbitrarios y de ubicación independiente en cada viga. De esta manera se puede realizar un análisis del efecto que causa en las diferentes frecuencias naturales del sistema el acoplamiento elástico y la posición intermedia del resorte traslacional junto con las condiciones de extremo de cada viga. Se analizan las vibraciones libres luego de obtener las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno mediante el método de separación de variables. Se propone la solución exacta para resolver finalmente la ecuación característica. Se presentan resultados exactos de los valores del coeficiente de frecuencias y las formas modales que adopta el sistema.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza el problema de vibraciones planas transversales de un sistema mecánico compuesto por dos vigas acopladas en un punto intermedio arbitrario (transición) con ambos extremos de cada viga restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Los desarrollos teóricos se basan en la hipótesis de la teoría de vigas larga o Euler-Bernoulli.

Existe una gran cantidad de trabajos publicados en revistas científicas sobre vibraciones de sistemas mecánicos compuestos por vigas con restricciones elásticas en un punto intermedio y/o en los extremos. Sólo se presentan algunos trabajos de referencia realizados al momento.

[Albarracín y Grossi \(2005\)](#) obtuvieron las frecuencias naturales y formas modales de un sistema de vigas en L. Utilizaron el método de separación de variables y obtuvieron los valores exactos del coeficiente de frecuencias calculado con el método de Newton aplicado a la ecuación de frecuencias. Luego, [Grossi y Quintana \(2008\)](#) investigaron las frecuencias naturales y formas modales de vigas no homogéneas con saltos en el espesor y cargas axiales con una rótula libre intermedia y restricciones elásticas generales en los extremos.

[Ratazzi et al. \(2012\)](#) analizaron el comportamiento dinámico de un pórtico formado por una columna y un dintel vinculados rígidamente entre sí, con vinculaciones extremas elásticas en una y rígida en la otra y una rótula elástica intermedia en el dintel, que a su vez tiene vinculación externa elástica. Las condiciones de borde y compatibilidad entre barras fueron obtenidas mediante la técnica del cálculo de variaciones. Presentaron varios ejemplos numéricos para distintas relaciones de los parámetros mecánicos y geométricos del sistema, como la relación de rigidez y ubicación de la rótula. Un año luego, [Ratazzi et al. \(2013\)](#) presentaron el estudio de vibraciones en el plano de un sistema de dos vigas ortogonales con una rótula elástica intermedia. El sistema se encuentra empotrado en un extremo y elásticamente restringido en el otro. Utilizaron las técnicas del cálculo de variaciones junto con el principio de Hamilton para obtener el problema de contorno y el método de separación de variables para resolver el problema de vibraciones libres. Obtuvieron la solución analítica con resultados numéricos exactos.

Por otro lado, varios autores estudiaron el efecto de un resorte traslacional intermedio conectado en un extremo a la viga en estudio y su otro extremo a un punto fijo. [Courant y Hilbert \(1953\)](#) y [Akesson y Olhoff \(1988\)](#) demostraron que la posición óptima de un apoyo intermedio rígido y elástico respectivamente, debe ser en los nodos de modos superiores si se quiere aumentar al máximo la frecuencia de un modo. [Wang \(2003\)](#) estudió el valor mínimo necesario de coeficiente de rigidez de un apoyo intermedio elástico para maximizar la frecuencia fundamental de una viga y luego [Wang et al. \(2006\)](#) presentaron su valor exacto. [Raffo y Grossi \(2011, 2012, 2014\)](#) estudiaron el efecto en las frecuencias naturales y formas modales de vigas con apoyo elástico intermedio obteniendo el valor exacto del coeficiente de rigidez cuando ocurre un cambio en la forma modal incluso cuando existe una rótula intermedia en la viga.

Finalmente, [Carrizo and Raffo \(2019\)](#) estudiaron la relación de las condiciones de extremos experimentales y teóricas con condiciones de contorno elásticas para vigas Euler-Bernoulli.

Varias combinaciones de vigas con características complejas fueron analizadas en la bibliografía antes citada, pero no se observaron trabajos que presenten el problema de contorno y la solución analítica exacta de las frecuencias y modos de vibrar de vigas acopladas elásticamente con un resorte traslacional ubicado arbitrariamente.

Por lo tanto, se propone analizar las vibraciones de un sistema compuesto por dos vigas Euler-Bernoulli restringidas en sus extremos por resortes traslacionales y rotacionales, para

poder analizar diferentes condiciones de extremos incluyendo las clásicas, con un vínculo elástico traslacional intermedio que une a ambas vigas en un punto arbitrario y de ubicación independiente en cada viga. De esta manera se puede realizar un análisis del efecto que causa en las frecuencias naturales del sistema, el acoplamiento elástico entre ambas vigas, la respuesta a la relación de rigidez de ambas vigas y la posición intermedia relativa del resorte traslacional junto con las condiciones de extremo de cada viga. Se aplican las técnicas del cálculo de variaciones para obtener la ecuación diferencial y el problema de contorno en forma natural. Finalmente se obtiene resultados numéricos del coeficiente de frecuencia y formas modales en forma exacta luego de utilizar el método de separación de variables y proponer soluciones exactas al sistema acoplado.

2 FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO

Sea un sistema estructural compuesto por dos vigas y un resorte traslacional intermedio que conectado a ambas vigas que ejecuta vibraciones transversales y está sometida a una fuerza externa transversal dada por una función $q = q(x, t)$ de dirección opuesta al desplazamiento transversal $w_i, i = 1, 2$. Por otra parte, los extremos de las vigas están elásticamente restringidos contra rotación y traslación, tal como se muestra en la Figura 1. Los vínculos rotacionales están caracterizados por los coeficientes de rigidez r_{ij} , y traslacionales t_{ij} , donde el primer subíndice $i = 1, 2$, indica la viga en la que se encuentra y el segundo subíndice $j = 1, 2$, indica el extremo de la viga: $x_i = 0$, para el extremo izquierdo y $x_i = l_i$, para el derecho. Finalmente se encuentra el resorte traslacional t_c , que se encuentra conectado a cada viga en sus extremos en los puntos intermedios ubicados en $c_i, i = 1, 2$.

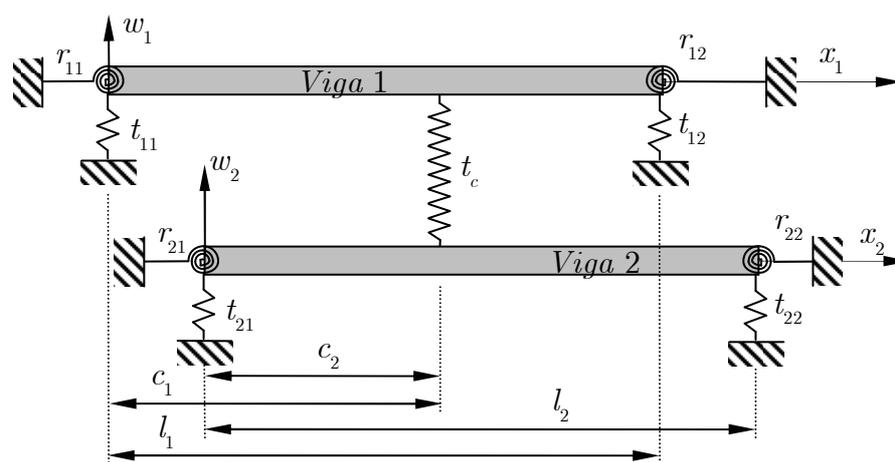


Figura 1: Sistema mecánico analizado restringido elásticamente en los extremos y acoplado elásticamente en un punto intermedio.

Si el desplazamiento transversal de la línea media correspondiente a un punto $x_i, i = 1, 2$, y en un instante t , es descrito por la función $w = w(x_i, t), \forall x_i \in [0, l], i = 1, 2$. la energía cinética del sistema antes descrito está dada por

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{c_{i,j-1}}^{c_{i,j}} (\rho A)_i(x_i) \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 dx_i, \quad (1)$$

donde $c_{i,0} = 0$, $i = 1, 2$, $c_{11} = c_1$, $c_{12} = l_1$, $c_{21} = c_2$, $c_{22} = l_2$, $(\rho A)_i = \rho_i A_i$, $i = 1, 2$, es el valor de la función resultante del producto de la densidad por el área de la sección de la viga i .

De acuerdo con la teoría del modelo denominado de Euler-Bernoulli la energía de deformación del sistema está dada por

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{c_{i,j-1}}^{c_{i,j}} (EI)_i(x_i) \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 dx_i, \quad (2)$$

donde el producto $(EI)_i = E_i I_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ denota la rigidez a la flexión correspondiente a la viga i . En consecuencia, la energía potencial total debida a la deformación elástica de la viga y de las restricciones elásticas, a la carga transversal y a la deformación por la tensión axial está dada por

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{c_{i,j-1}}^{c_{i,j}} \left[(EI)_i(x_i) \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 - 2q(x_i, t) w_i(x_i, t) \right] dx_i \\ & + \sum_{i=1}^2 \left[r_{i1} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(0, t) \right)^2 + r_{i2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(l_i, t) \right)^2 + t_{i1} (w_i(0, t))^2 + t_{i2} (w_i(l_i, t))^2 \right] \\ & + t_c (w_1(c_1, t) - w_2(c_2, t))^2. \end{aligned} \quad (3)$$

El principio de Hamilton establece que de todas las configuraciones posibles que el sistema puede tener, al pasar de una configuración inicial dada en un instante t_a a otra dada en un instante t_b , la que realmente adopta el sistema es la que hace estacionario al funcional

$F(u) = \int_{t_a}^{t_b} L dt$, en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano L de acuerdo con (1) y (3) es igual a $L = E_c - U$.

Finalmente, aplicando las técnicas del cálculo de variaciones (Grossi, 2010) para el caso en que la rigidez a la flexión y la masa por unidad de longitud son constantes en cada viga y no hay carga distribuida, se obtienen las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno en forma natural dadas por

$$(\rho A)_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}(x_i, t) - (EI)_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4}(x_i, t) = 0, \quad x_i \in (c_{i,j-1}, c_{i,j}), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

$$r_{i1} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_{i,0}, t) - (EI)_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(c_{i,0}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$t_{i1} w_i(c_{i,0}, t) + (EI)_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3}(c_{i,0}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$t_c (w_1(c_1, t) - w_2(c_2, t)) - (EI)_1 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(c_1^-, t) - \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(c_1^+, t) \right) = 0, \quad (7)$$

$$t_c (w_1(c_1, t) - w_2(c_2, t)) + (EI)_2 \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(c_2^-, t) - \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(c_2^+, t) \right) = 0, \quad (8)$$

$$w_i(c_{i,1}^+, t) - w_i(c_{i,1}^-, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_{i,1}^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_{i,1}^-, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(c_{i,1}^+, t) - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(c_{i,1}^-, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

$$r_{i2} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(l_i, t) + (EI)_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(l_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

$$t_{i2} w_i(l_i, t) - (EI)_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3}(l_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$\forall t \geq 0$.

3 EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES Y SOLUCIÓN EXACTA

Para realizar un análisis de vibraciones libres y determinar los modos normales de vibración del sistema mecánico, se deben determinar los valores de las frecuencias naturales para los cuales las ecuaciones diferenciales (4) tienen como solución no trivial la forma

$$w_i(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{i,n}(x_i) \cos(\omega_n t - \varphi), \quad x_i \in (c_{i,j-1}, c_{i,j}), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

donde $W_{i,n}(x_i) = W_i(x_i)$, son las formas modales del modo n –ésimo de vibración natural, $\omega_n = \omega$ representa la frecuencia natural y φ es un corrimiento o desfase angular que no depende de t . Luego, en virtud de la continuidad de la función coseno y de sus derivadas, la función dada por (14) es continua junto con sus derivadas de cualquier orden respecto de t .

Al reemplazar (14) en las ecuaciones diferenciales (4), suponiendo que no existe carga distribuida aplicada, introduciendo el cambio de variable $\bar{x}_i = x_i/l_i$, y proponiendo la siguiente solución de las ecuaciones diferenciales:

$$W_i(\bar{x}_i) = C_{ij1} \cosh(\lambda \bar{x}_i) + C_{ij2} \sinh(\lambda \bar{x}_i) + C_{ij3} \cos(\lambda \bar{x}_i) + C_{ij4} \sin(\lambda \bar{x}_i), \quad (15)$$

$$\bar{x}_i \in (\bar{c}_{i,j-1}, \bar{c}_{i,j}), i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Las constantes C_{ijk} con $i = 1, 2, j = 1, 2, k = 1, \dots, 4$, son las incógnitas de un sistema de ecuaciones algebraicas que matricialmente se puede representar como

$$[A] \cdot \{C\} = \{0\}, \quad (16)$$

donde $[A]$ es la matriz de los coeficientes del sistema de dimensión 16×16 y $\{C\}$ es un vector de dimensión 16 cuyos elementos son los coeficientes C_{ijk} .

Dado que el sistema (16) es homogéneo, para existencia de solución no trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo. Esto conduce a la ecuación de frecuencias:

$$G(T_{ij}, R_{ij}, T_c, \bar{c}_{ij}, (EI)_i, l_i, \lambda) = 0,$$

$$\text{donde } \bar{c}_{ij} = c_{ij}/l_i, T_{ij} = \frac{t_{ij} l_1^3}{(EI)_1}, R_{ij} = \frac{r_{ij} l_1}{(EI)_1}, T_c = \frac{t_c l_1^3}{(EI)_1}, \text{ con } i = 1, 2, j = 1, 2.$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga, se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado ($R_{ij} = T_{ij} = \infty$, en el extremo correspondiente), S denota que el extremo está simplemente apoyado ($R_{ij} = 0, T_{ij} = \infty$) y L denota que el extremo está libre ($R_{ij} = T_{ij} = 0$). Como ejemplo, si se indica la condición de borde de una viga E-S, denota que el primer tramo, en $\bar{x}_i = 0$, el extremo se encuentra empotrado, mientras que en el segundo tramo, en $\bar{x}_i = 1$, el extremo se encuentra simplemente apoyado. Los valores numéricos del coeficiente de frecuencia λ , se calculan según:

$$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4, \quad (17)$$

$$\text{donde } \rho A = (\rho A)_1, l = l_1 \text{ y } EI = (EI)_1 = (EI)_2.$$

En la [Tabla 1](#) se presentan los primeros seis valores de λ , para el caso A-A / E-E (condiciones de extremos de la viga 1 / c. e. de la viga 2) con $c = 0.25$, $d = 0.5$, $T_{cd} = 0$ a $T_{cd} = \infty$, ($=10^{20}$) junto con sus correspondientes formas modales. En el caso de $T_{cd} = 0$ se compara con los resultados de [Blevins \(2001\)](#) de viga única A-A o E-E según corresponda el modo. Se puede observar que el modo 4 para $T_{cd} = 100$, es similar en forma y valor que el modo 3 para $T_{cd} = 1000$.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$T_{cd} = 0$					
Blevins (2001)					
A-A, λ_1	E-E, λ_1	A-A, λ_2	E-E, λ_2	A-A, λ_3	E-E, λ_3
3.141593	4.730041	6.283185	7.853205	9.424778	10.995608
Trabajo actual					
3.141593	4.730041	6.283185	7.853205	9.424778	10.995608
$T_{cd} = 0.1$					
3.142398	4.730636	6.283387	7.853205	9.424808	10.995645
$T_{cd} = 1$					
3.149561	4.735989	6.285205	7.853205	9.425077	10.995980
$T_{cd} = 10$					
3.213647	4.788556	6.303784	7.853205	9.427775	10.999341
$T_{cd} = 100$					
3.500505	5.191356	6.524387	7.853205	9.455707	11.034326
$T_{cd} = 1000$					
3.708407668	5.718818669	7.853204624	8.163031729	9.785020029	11.51952708
$T_{cd} = \infty$					
3.743457702	5.793374315	7.853204623	8.947253576	10.40467841	12.56637061

Tabla 1: Primeros seis valores de λ , para el caso A-A / E-E, con $(EI)_2 / (EI)_1 = 1$, $c = 0.25$, $d = 0.5$, para diferentes valores de T_{cd} , junto con sus correspondientes formas modales. En el caso de $T_{cd} = 0$ se compara con los resultados de λ presentados por Blevins (2001) para una viga única A-A o E-E según se indica.

En la [Tabla 2](#) se presentan los primeros seis valores de λ , para el caso A-E / E-L con $c = 0.442504$, $d = 0.783444$, para $T_{cd} = 0, 100, 10000$, junto con sus correspondientes

formas modales. En el caso de $T_{cd} = 0$ se compara con los resultados de [Blevins \(2001\)](#) de viga única A-E o E-L según corresponda. Los valores adoptados de c y d corresponden a la posición del primer nodo del modo 2 de una viga E-L y el primer nodo del modo 2 de una viga E-L respectivamente. Se puede observar que el modo 3 para $T_{cd} = 0$, es similar en forma y valor que el modo 2 para $T_{cd} = 100$. Lo mismo sucede entre el modo 4 para $T_{cd} = 100$ y modo 3 para $T_{cd} = 10^5$.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$T_{cd} = 0$					
Blevins (2001)					
E-L, λ_1	A-E, λ_1	E-L, λ_2	A-E, λ_2	E-L, λ_3	A-E, λ_3
1.875104	3.926602	4.694091	7.068583	7.854757	10.210176
Trabajo actual					
1.875104	3.926602	4.694091	7.068583	7.854757	10.210176
$T_{cd} = 100$					
3.070830	4.694091	4.861375	7.068583	7.902381	10.254495
$T_{cd} = 10^5$					
3.277031	4.694091	7.068583	7.333138	9.116207	10.683590

Tabla 2: Primeros seis valores de λ , para el caso A-E / E-L, con $(EI)_2 / (EI)_1 = 1$, $c = 0.442504$, $d = 0.783444$, para diferentes valores de T_{cd} , junto con sus correspondientes formas modales. En el caso de $T_{cd} = 0$ se compara con los resultados de λ presentados por [Blevins \(2001\)](#) para una viga única A-E o E-L según se indica.

En la [Tabla 3](#) se presentan los primeros seis valores de λ , para el caso $c = 0.8$, $d = 0.4$, para $T_{11} = R_{11} = T_{21} = T_{22} = 1000$, $T_{12} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = 0.1$ y $T_{cd} = 1$, junto con sus correspondientes formas modales.

En la [Tabla 4](#) se presentan los primeros seis valores de λ , junto con sus correspondientes formas modales para $c = 0.3$, $d = 0.4$, con $T_{11} = T_{12} = T_{21} = T_{22} = 1000$, $R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = 1000$ y $T_{cd} = 1000$.

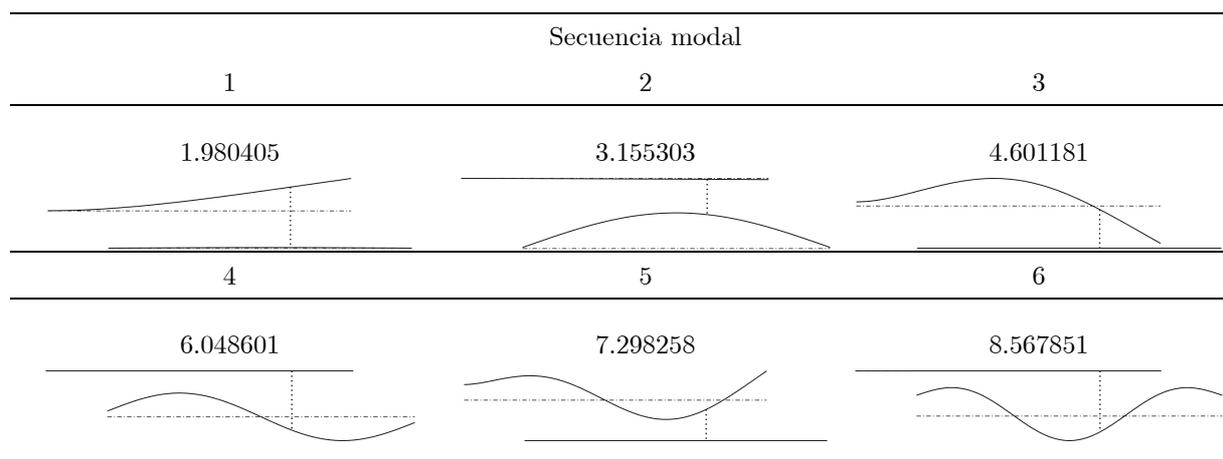


Tabla 3: Primeros seis valores de λ , para el caso $c = 0.8$, $d = 0.4$, para $T_{11} = R_{11} = T_{21} = T_{22} = 1000$, $T_{12} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = 0.1$ y $T_{cd} = 1$.

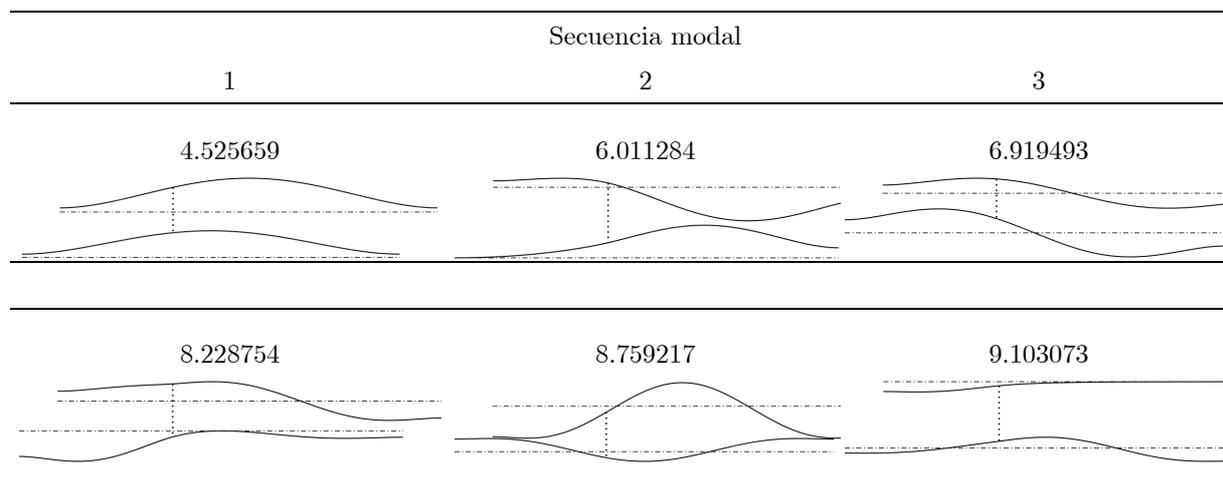


Tabla 4: Primeros seis valores de λ , para $c = 0.3$, $d = 0.4$, con $T_{11} = T_{12} = T_{21} = T_{22} = R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = T_{cd} = 1000$.

5 CONCLUSIONES

Se analizó el problema de vibraciones de un sistema compuesto por dos vigas Euler-Bernoulli restringidas en sus extremos por resortes traslacionales y rotacionales, para poder analizar diferentes condiciones de extremos incluyendo las clásicas, con un vínculo elástico traslacional intermedio que une a ambas vigas en un punto arbitrario y de ubicación independiente en cada viga. Se obtuvieron las ecuaciones diferenciales y el problema de contorno del sistema el cual fue resuelto de manera exacta con el método de separación de variables.

Se observó la respuesta de vibraciones del sistema acoplado y fue comparado con algunos casos clásicos de vibraciones de viga para demostrar su correcto comportamiento.

En algunos casos se observó un cambio en la forma modal al ubicar el resorte traslacional intermedio en nodos de modos superiores de casos clásicos de una viga individual, al ir aumentando su valor de rigidez. El algoritmo desarrollado demostró robustez y precisión para

representar todos los casos propuestos.

Se presentaron diferentes valores de frecuencias naturales y formas modales de vibración de vigas tanto para casos con condiciones de extremo clásicas como elásticas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en la Facultad Regional Delta de la Universidad Tecnológica Nacional, con el auspicio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

REFERENCIAS

- Albarracín C. M. and Grossi R. O., Vibrations of elastically restrained frames, *Journal of Sound and Vibration*, 285(1-2):467–476, 2005.
- Blevins, R. D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand Reinhold, 2001.
- Grossi, R. O. and Quintana, M. V., The transition condition in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Ratazzi R. A., Bambill D. V., and Rossit C. A., Vibraciones en pórticos con conexiones intermedias elasticas, *Mecánica Computacional*, 31:2511–2627, 2012.
- Ratazzi R. A. , Bambill D. V. and Rossit C. A., Free Vibrations of Beam System Structures with Elastic Boundary Conditions and an Internal Elastic Hinge, *Chinese Journal of Engineering* Hindawi Publishing Corporation, 9:1-10, 2013.
- Carrizo M. R. and Raffo, J. L., Estudio teórico y experimental de la influencia de la rigidez de los vínculos en las frecuencias naturales de vigas, XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Cartagena, Colombia, 2463:609-616, 2019.
- Grossi, R. O., *Cálculo de variaciones*. CIMNE, 2010.
- Akesson, B., Olhoff, N., Minimum stiffness of optimally located supports for maximum value of beams eigenfrequencies, *Journal of Sound and Vibration*, 120:457-463, 1988.
- Courant, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, volume I. Interscience, 1953.
- Wang, C. Y., Minimum stiffness of an internal elastic support to maximize the fundamental frequency of a vibrating beam, *Journal of Sound and Vibration*, 259:229-232, 2003.
- Wang, D., Friswell, M. I., Lei, Y., Maximizing the natural frequency of a beam with an intermediate elastic support, *Journal of Sound and Vibration*, 291:1229-1238, 2006.
- Raffo, J. L. and Grossi, R. O., Estudio sobre formas modales en vigas con restricciones elásticas intermedias, *Mecánica Computacional*, 15:1325-1349, 2011.
- Raffo, J. L. and Grossi, R. O., A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints, *Mecánica Computacional*, 16:2593-2610, 2012.
- Raffo, J. L. and Grossi, R. O., A note on the influence of intermediate restraints and hinges in frequencies and mode shapes of beams, *International Journal of Acoustics and Vibration*, 19:261-268, 2014.