

## BORDES ABSORBENTES DE CAPAS PERFECTAMENTE ACOPLADAS UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

### PERFECT MATCHED LAYER ABSORBING BOUNDARY USING MIXED FINITE ELEMENTS

Adriano Trono<sup>a,b</sup>, Alejandro T. Brewer<sup>b</sup>, Federico Pinto<sup>a,b</sup> y Marcelo A. Ceballos<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) – CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [idit@fcefyN.edu.ar](mailto:idit@fcefyN.edu.ar), <http://www.inv.idit.uncor.edu/>*

<sup>b</sup>*FCEfyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [depestructuras@fcefyN.unc.edu.ar](mailto:depestructuras@fcefyN.unc.edu.ar), <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

**Palabras clave:** Capa perfectamente acoplada, Bordes Absorbentes, Elementos Finitos Mixtos.

**Resumen:** Existen múltiples desarrollos de capas perfectamente acopladas (Perfect Matched Layer – PML) utilizadas como bordes absorbentes en modelos de interacción suelo-estructura. Sin embargo, pocos modelos de elementos finitos con bordes PML permiten el análisis en el dominio del tiempo. Kucukcoban y Kallivokas (Wave Motion.50, 2013,57-79) plantean una solución integrable en el dominio del tiempo utilizando elementos finitos mixtos en la región PML. Estos autores aproximan las tensiones con funciones de interpolación continuas, lo que puede provocar inconsistencias en la interfaz entre los subdominios físico y PML. En este trabajo se propone utilizar funciones de interpolación de tensión discontinuas, que permiten disminuir la cantidad de incógnitas adicionales por elemento finito y aumentar la efectividad de absorción del borde. Se calcula la respuesta de modelos de deformación plana ante cargas en la superficie utilizando integración explícita en el dominio del tiempo con diferentes opciones de bordes PML. Para demostrar la efectividad de los bordes propuestos se comparan sus resultados con los de un modelo de elementos finitos de dominio extendido que representa la solución del medio semi infinito hasta el tiempo de arribo del primer rebote de onda P.

**Keywords:** Perfect Matched Layer (PML), Absorbing Boundaries, Mixed Finite Elements.

**Abstract.** There are multiple perfect matched layer (PML) techniques for the development of absorbing boundaries in finite element models. However, few finite element models with PML boundaries allow analysis in the time domain. Kucukcoban y Kallivokas (Wave Motion.50, 2013, 57-79) propose an integrable solution in the time domain mixed finite elements in the PML region. They approximate the stresses with continuous interpolation functions, which can lead to inconsistencies at the interface between the physical and PML subdomains. In this work, it is proposed to use discontinuous stress interpolation functions, which allow a reduction in the number of additional unknowns per finite element, as well as an increase in the absorption efficiency at the model boundary. The response of plane strain models to surface loads is calculated using explicit time-domain integration with different PML boundary alternatives. In order to demonstrate the effectiveness of proposed boundaries, their results are compared with those of an extended domain finite element model that represents the semi-infinite medium solution until to the arrival time of the first P-wave rebound.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la modelación de la interacción dinámica suelo-estructura es necesario utilizar bordes absorbentes para representar la naturaleza ilimitada del medio físico. Entre los bordes absorbentes más utilizados en la actualidad se encuentran las capas perfectamente acopladas (Perfectly Matched Layer - PML) por su capacidad para absorber tanto ondas superficiales y ondas de cuerpo independiente del ángulo de incidencia. Sin embargo, la formulación fuerte del medio PML en su forma irreducible no puede resolverse en el dominio del tiempo. [Kucukcoban y Kallivokas \(2013\)](#) resuelven este problema usando elementos mixtos en la capa de borde y realizan el análisis en el dominio del tiempo. Estos autores eligen usar funciones de interpolación de tensión continua en los elementos del borde. Según [Brezzi \(1988\)](#), para utilizar funciones en tensión continua en modelos híbridos es necesario compatibilizar el equilibrio en la interfase entre los dos subdominios. Tanto [Poursartip \(2017\)](#) como [Kucukcoban y Kallivokas \(2013\)](#) usan funciones de interpolación de tensión continua entre elementos y no cumplen de manera estricta con esta condición de equilibrio. La recomendación de [Zienkiewicz \(2005\)](#), es evitar el uso de este tipo de funciones de interpolación de tensión debido a inconsistencias que pueden aparecer en bordes y esquinas. En su lugar, recomienda que la aproximación de las tensiones y deformaciones sea, al igual que en elementos finitos estándares, discontinua entre elementos. Otro beneficio de usar este tipo de funciones de interpolación es que permiten disminuir la cantidad de incógnitas de tensión por elemento finito.

En este trabajo se proponen elementos finitos mixtos de borde PML con funciones de tensión discontinua (con 7, 5 y 3 incógnitas de tensión) y de tensión continua (12 incógnitas adicionales por elemento). Se presentan los resultados de la respuesta de modelos del semi-espacio en deformación plana ante cargas en la superficie. Para demostrar la efectividad de los bordes propuestos se comparan los resultados con los de un modelo de elementos finitos de dominio extendido que representa la solución del medio infinito hasta el tiempo de arribo del primer rebote de onda P.

## 2. FORMULACIÓN HÍBRIDA

Para modelar la naturaleza infinita del problema, se colocan capas PML absorbentes en los bordes del dominio de interés, denominado dominio regular o interior. La zona PML consiste en un espacio deformado donde el vector posición se convierte en complejo mediante funciones de estiramiento que permiten establecer una correspondencia entre la coordenada geométrica y la posición. La función de estiramiento se adopta de siguiente la forma ([Poursartip, 2017](#)):

$$\lambda_s(s, \omega) = \alpha_s(s) + \frac{1}{i\omega} \beta_s(s) \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de excitación. Las funciones de escala y atenuación se definen como:

$$\alpha_s(s) = 1 + \alpha_0 \left( \frac{(s-s_0)n_s}{L_{PML}} \right)^2, \quad s_0 \leq s \leq s_t, \quad (2)$$

$$\beta_s(s) = \beta_0 \left( \frac{(s-s_0)n_s}{L_{PML}} \right)^2, \quad s_0 \leq s \leq s_t, \quad (3)$$

$s$  es la coordenada perpendicular al borde (ver [Figura 1 a](#)),  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  determinan el valor que alcanzará la función de estiramiento en el borde externo del dominio estirado y se utilizan como parámetros de ajuste.  $L_{PML} = s_t - s_0$  es el espesor de la capa absorbente y  $n_s$  es la componente en la dirección  $s$  del versor saliente perpendicular al borde. La ecuación de la onda en el dominio PML debe cumplirse en el sistema coordenado estirado. A partir del jacobiano de la transformación de coordenadas las ecuaciones de equilibrio se plantean en el dominio de la fre-

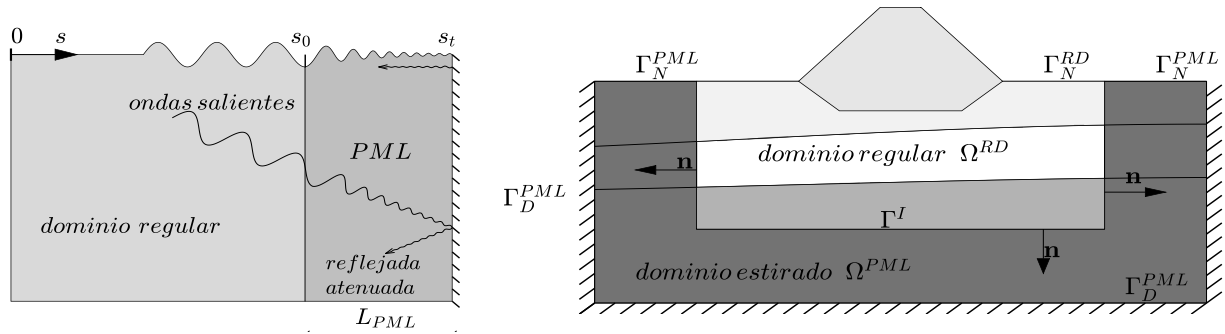


Figura 1: a) Borde PML en la dirección  $s$ . b) Esquema del dominio regular y PML.

cuencia y dependen del tensor de estiramiento:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \end{bmatrix} = \Lambda_e + \frac{1}{i\omega} \Lambda_p \quad \text{con} \quad \Lambda_e = \begin{bmatrix} \alpha_y & 0 \\ 0 & \beta_x \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda_p = \begin{bmatrix} \beta_y & 0 \\ 0 & \beta_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

Al convertir las ecuaciones de equilibrio al dominio del tiempo se introduce el tensor historia de tensiones como incógnita del problema (Kucukcoban y Kallivokas, 2013):

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} dt \quad (5)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy. Se presenta la formulación fuerte híbrida del medio PML y del medio regular en el dominio del tiempo:

$$\text{div}(\dot{\mathbf{S}}\Lambda_e + \mathbf{S}\Lambda_p) = \rho(a\ddot{\mathbf{u}} + b\dot{\mathbf{u}} + c\mathbf{u}) \quad \text{en } \Omega_{PML} \times J \quad (6)$$

$$\mathcal{C}^{-1}(a\ddot{\mathbf{S}} + b\dot{\mathbf{S}} + c\mathbf{S}) = \frac{1}{2}(\nabla\dot{\mathbf{u}}\Lambda_e + \Lambda_e\nabla\dot{\mathbf{u}}^T + \nabla\mathbf{u}\Lambda_p + \Lambda_p\nabla\mathbf{u}^T) \quad \text{en } \Omega_{PML} \times J \quad (7)$$

$$\text{div}\{\mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] + \lambda(\text{div}(\mathbf{u}))\mathbf{I}\} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Omega_{RD} \times J \quad (8)$$

donde  $a = \alpha_x\alpha_y$ ,  $b = \alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x$  y  $c = \beta_x\beta_y$ ,  $\mathbf{u}$  es el vector desplazamiento,  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé,  $\mathcal{C}$  es el tensor de elasticidad,  $\rho$  es la densidad del material,  $\Omega_{PML}$  y  $\Omega_{RD}$  son los dominios PML y regular y  $J = [0, T]$  es el intervalo de tiempo de interés. El sistema se encuentra inicialmente en reposo y sujeto a las siguientes condiciones de borde y de interfase:

$$\{\mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] + \lambda(\text{div}(\mathbf{u}))\mathbf{I}\}\mathbf{n}^+ = \mathbf{g}_n \quad \text{en } \Gamma_N^{RD} \times J \quad (9)$$

$$(\dot{\mathbf{S}}\Lambda_e + \mathbf{S}\Lambda_p)\mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_N^{PML} \times J \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D^{PML} \times J \quad (11)$$

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- \quad \text{en } \Gamma^I \times J \quad (12)$$

$$\{\mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] + \lambda(\text{div}(\mathbf{u}))\mathbf{I}\}\mathbf{n}^+ + (\dot{\mathbf{S}}^T\Lambda_e + \mathbf{S}\Lambda_p)\mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma^I \times J \quad (13)$$

donde,  $\mathbf{g}_n$  es la tensión en el borde del dominio regular,  $\Gamma^I$  es la interfase entre los dominios regular y PML,  $\Gamma_N^{PML}$  y  $\Gamma_N^{RD}$  los bordes libres (ver Figura 1 b) y  $\Gamma_D^{PML}$  el borde donde se restringe

los desplazamientos horizontal y vertical. Ec. (12) y Ec. (13) implican continuidad de desplazamientos y equilibrio en la interfase, respectivamente.

Para obtener una formulación débil híbrida (Kucukcoban y Kallivokas, 2013), se suma el residuo ponderado por el vector función de peso  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  de la Ec.(6) y Ec. (8), se aplica el teorema de la divergencia y se incorporan las Ec. (12) y Ec. (13) para eliminar los términos de borde asociados a la interfase:

$$\int_{\Omega^{\text{RD}}} \mathbf{W} \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega^{\text{RD}} + \int_{\Omega^{\text{RD}}} \nabla \mathbf{W} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega^{\text{RD}} + \int_{\Omega^{\text{PML}}} \mathbf{W} \rho (a\ddot{\mathbf{u}} + b\dot{\mathbf{u}} + c\mathbf{u}) d\Omega^{\text{PML}} + \int_{\Omega^{\text{PML}}} \nabla \mathbf{W} : \dot{\mathbf{S}} \Lambda_e d\Omega^{\text{PML}} + \int_{\Omega^{\text{PML}}} \nabla \mathbf{W} : \mathbf{S} \Lambda_p d\Omega^{\text{PML}} = \int_{\Gamma_N^{\text{RD}}} \mathbf{W} \mathbf{g}_n d\Gamma^{\text{RD}} \quad (14)$$

Se integra el residuo ponderado de la Ec. (7) por la función de peso  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  en el dominio de la PML:

$$\int_{\Omega^{\text{PML}}} \mathbf{T} : \mathcal{C}^{-1} (a\ddot{\mathbf{S}} + b\dot{\mathbf{S}} + c\mathbf{S}) d\Omega^{\text{PML}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\text{PML}}} \mathbf{T} : ([\nabla \dot{\mathbf{u}} \Lambda_e + \Lambda_e (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T + \nabla \mathbf{u} \Lambda_p + \Lambda_p (\nabla \mathbf{u})^T]) d\Omega^{\text{PML}} \quad (15)$$

El primer y segundo término de la Ec. (14) están asociados a la implementación estándar del método de elementos finitos en el dominio regular en términos de desplazamientos. Los términos que se integran en el dominio PML están asociados a los elementos finitos absorbentes mixtos.

A continuación, se detalla la notación matricial elegida para los vectores y tensores involucrados en las Ec. (14) y Ec. (15). Se considera un elemento rectangular en el que las interpolaciones pueden darse directamente en términos de las coordenadas cartesianas (véase la Figura 2). Los desplazamientos y la función de ponderación se obtienen como combinación lineal de las funciones de interpolación:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_a \quad (16)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}_w \mathbf{w} \quad (17)$$

con

$$\mathbf{u}_a^T = [u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_x^3 \quad u_y^3 \quad u_x^4 \quad u_y^4] \quad (18)$$

$$\mathbf{w}^T = [w_x^1 \quad w_y^1 \quad w_x^2 \quad w_y^2 \quad w_x^3 \quad w_y^3 \quad w_x^4 \quad w_y^4] \quad (19)$$

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & & N_2 & & N_3 & & N_4 & \\ & N_1 & & N_2 & & N_3 & & N_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

con

$$N_1 = \left(1 - \frac{x_e}{a_e}\right) \frac{y_e}{b_e}, N_2 = \left(1 - \frac{x_e}{a_e}\right) \left(1 - \frac{y_e}{b_e}\right), N_3 = \frac{x_e}{a_e} \left(1 - \frac{y_e}{b_e}\right), N_4 = \frac{x_e}{a_e} \frac{y_e}{b_e} \quad (21)$$

donde  $x_e$  y  $y_e$  son las coordenadas locales del elemento (con origen en el nudo 2) y  $a_e$  y  $b_e$  son al ancho y la altura (véase Figura 2).

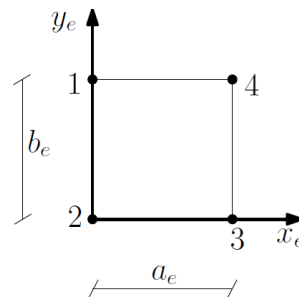


Figura 2: Geometría del elemento rectangular.

Al tensor de historia de tensiones se lo expresa según la notación vectorial:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_\sigma \boldsymbol{\eta} \quad (22)$$

donde  $\boldsymbol{\eta}^T = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p]$  es el vector de incógnitas de historia de tensión en el elemento y  $p$  es la cantidad de incógnitas elegidas para aproximar las tensiones.  $\mathbf{N}_\sigma$  es la matriz con las funciones de forma de tensión y será tratado en el apartado 2.2. A partir de la simetría de tensor de tensiones, el integrando de quinto término de la Ec. (14) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{W}: (\mathbf{S} \Lambda_p) = \frac{\partial w_x}{\partial x} \beta_y S_{11} + S_{12} \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \beta_x + \frac{\partial w_y}{\partial x} \beta_y \right) + \frac{\partial w_y}{\partial y} \beta_x S_{22} = \mathbf{w}^T \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{N}_\sigma \boldsymbol{\eta} \quad (23)$$

con

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_y \end{bmatrix} \quad (24)$$

De manera análoga se procede con el integrando del cuarto término de la Ec. (14):

$$\nabla \mathbf{W}: (\mathbf{S} \Lambda_e) = \mathbf{w}^T \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{N}_\sigma \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (25)$$

con

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

La función de peso  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  de la Ec. (15) es un tensor de segundo orden que se propone simétrico:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_\sigma \tilde{\mathbf{T}} \quad (27)$$

Con  $\tilde{\mathbf{T}}^T = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_p]$ . Se desarrollan el tercer y cuarto término del segundo miembro de la Ec. (15):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\nabla \mathbf{u} \Lambda_p + \Lambda_p \nabla \mathbf{u}^T) &= T_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \beta_y + T_{12} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \beta_x + \frac{\partial u_y}{\partial x} \beta_y \right) + T_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \beta_x \\ &= \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_\beta \mathbf{u}_a \end{aligned} \quad (28)$$

De manera análoga se obtiene

$$\frac{1}{2} \mathbf{T} : (\nabla \dot{\mathbf{u}} \Lambda_e + \Lambda_e \nabla \dot{\mathbf{u}}^T) = \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{u}}_a \quad (29)$$

La notación vectorial utilizada para los tensores de tensión y deformación permiten expresar al tensor de elasticidad como una matriz. Para el caso de deformación plana se tiene:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde  $E$  es el módulo de Young y  $\nu$  es el módulo de Poisson.

## 2.1 Elemento mixto PML simétrico

Se incorporan las Ecs. (16), (17),(22),(23) y (25) en los términos que se integran en el dominio PML de la Ec. (14):

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{w}^T \left( \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_u^T \rho c \mathbf{N}_u d\Omega^{\text{PML}} \mathbf{u} + \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{N}_\sigma d\Omega^{\text{PML}} \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_w^T \rho b \mathbf{N}_u d\Omega^{\text{PML}} \dot{\mathbf{u}}_a \right. \\ \left. + \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{N}_\sigma d\Omega^{\text{PML}} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_u^T \rho a \mathbf{N}_u d\Omega^{\text{PML}} \ddot{\mathbf{u}}_a \right) = TDR \end{aligned} \quad (31)$$

donde  $\Omega_e^{\text{PML}}$  es el dominio de un elemento finito,  $NE$  el número de elementos en que se divide la región PML y  $TDR$  es el término de carga menos los términos integrados en el dominio regular en la Ec. (14). Y se incorporan las Ecs. (16),(22),(27),(28),(29),(30) en la Ec. (15):

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{NE} \tilde{\mathbf{T}}^T \left( \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_\beta d\Omega^{\text{PML}} \mathbf{u}_a - \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} c \mathbf{N}_\sigma d\Omega^{\text{PML}} \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_\alpha d\Omega^{\text{PML}} \dot{\mathbf{u}}_a \right. \\ \left. - \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} b \mathbf{N}_\sigma d\Omega^{\text{PML}} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} a \mathbf{N}_\sigma d\Omega^{\text{PML}} \ddot{\boldsymbol{\eta}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Se agrupan las incógnitas de desplazamientos e historia de tensiones en el vector de incógnitas  $\mathbf{d}_e^T = [\mathbf{u}_a^T \boldsymbol{\eta}^T]$  y se utilizan las Ec. (31) y Ec. (32) para obtener:

$$k_{PML} = \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \rho c \mathbf{N}_u & \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{N}_\sigma \\ \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_\beta & -\mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} c \mathbf{N}_\sigma \end{bmatrix} d\Omega_e^{\text{PML}} \quad (33)$$

$$c_{PML} = \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \rho b \mathbf{N}_u & \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{N}_\sigma \\ \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_\alpha & -\mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} b \mathbf{N}_\sigma \end{bmatrix} d\Omega_e^{\text{PML}} \quad (34)$$

$$m_{PML} = \int_{\Omega_e^{\text{PML}}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \rho a \mathbf{N}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} a \mathbf{N}_\sigma \end{bmatrix} d\Omega_e^{\text{PML}} \quad (35)$$

donde  $k_{PML}$ ,  $c_{PML}$  y  $m_{PML}$  son las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa de un elemento mixto de la región PML.

## 2.2 Funciones de forma de tensiones

En esta sección se proponen distintas opciones para las funciones de forma de tensiones. Las formulaciones con interpolaciones de tensión continua entre elementos ubican a las incógnitas de tensión en los nudos y utilizan las mismas funciones de interpolación que se usan para los desplazamientos:

$$\mathbf{N}_\sigma^{12} = \begin{bmatrix} N_1 & & & & & & & & & \\ & N_1 & & & & & & & & \\ & & N_1 & & & & & & & \\ & & & N_1 & & & & & & \\ & & & & N_1 & & & & & \\ & & & & & N_1 & & & & \\ & & & & & & N_1 & & & \\ & & & & & & & N_1 & & \\ & & & & & & & & N_1 & \\ & & & & & & & & & N_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Las formulaciones de tensión discontinua entre elementos utilizan polinomios de interpolación definidos por elemento (y no por nudo). Los coeficientes de dichos polinomios son las incógnitas adicionales del problema.

El principio de limitación (Fracijs de Veubeke, 1965) establece que si la aproximación utilizada para las tensiones es capaz de reproducir el mismo tipo de variación de tensiones que se produce según la interpolación de desplazamientos y los coeficientes son constantes dentro de cada elemento finito, la formulación mixta arriba al mismo tipo de resultados que la forma estándar en términos de desplazamientos. Si bien dentro del dominio PML los coeficientes no son constantes porque la función de estiramiento es variable en cada elemento, se proponen funciones de forma siguiendo los lineamientos del principio de limitación. Las deformaciones generadas por las funciones de interpolación dadas en la Ec. (21) serán:

$$\varepsilon_{xx} = \kappa_1 + \kappa_2 y_e, \quad \varepsilon_{yy} = \kappa_3 + \kappa_4 x_e, \quad \varepsilon_{xy} = \kappa_5 + \kappa_6 x_e + \kappa_7 y_e \quad (37)$$

donde  $\kappa_j$  están expresados en términos de los elementos del vector  $\mathbf{u}_a$ . A partir de estas deformaciones y del tensor de elasticidad se obtiene la matriz con las funciones de forma de tensiones:

$$\mathbf{N}_\sigma^7 = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & (1-\nu)y_e & \nu x_e & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu y_e & (1-\nu)x_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}x_e & \frac{1-2\nu}{2}y_e \end{bmatrix} \quad (38)$$

A efectos de disminuir la cantidad de incógnitas de tensión por elemento se utilizan dos alternativas adicionales de tensión discontinua: la propuesta por Pian y Sumihara (1984) con 5 incógnitas de tensión y el cuadrilátero de tensión constante con 3 incógnitas de tensión:

$$\mathbf{N}_\sigma^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y_e & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

## 2.3 Sistema de ecuaciones

Dadas las matrices del sistema en deformación plana del dominio regular,  $\mathbf{M}^{\text{RD}}$ ,  $\mathbf{C}^{\text{RD}}$  y  $\mathbf{K}^{\text{RD}}$ , pueden utilizarse las Ecs. (33), (34) y (35) para implementar las matrices de la PML,  $\mathbf{M}^{\text{PML}}$ ,  $\mathbf{C}^{\text{PML}}$  y  $\mathbf{K}^{\text{PML}}$ , y obtener un sistema general de ecuaciones mediante el ensamblaje:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (40)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del dominio completo (regular y PML). La esquematización del ensamblaje del sistema de ecuaciones puede consultarse en Trono

et. al (2021). Para poder realizar la integración numérica el sistema se reordena a través de la representación en espacios de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Para resolver el sistema se utiliza la integración numérica de Runge-Kutta de cuarto orden a paso de tiempo constante.

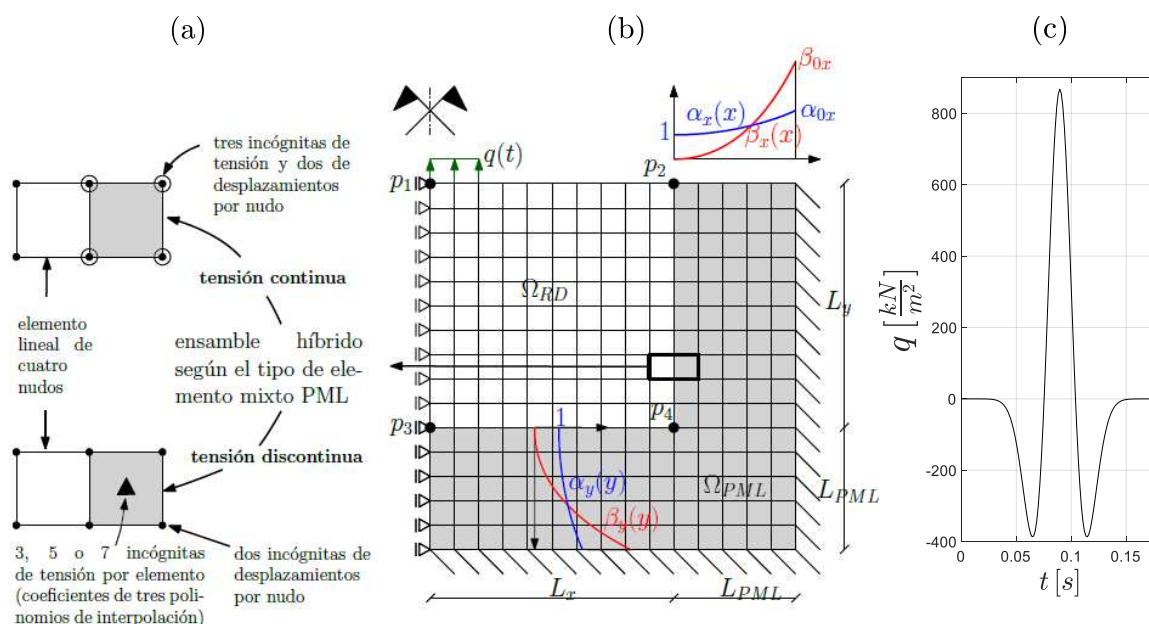


Figura 3: a) Esquemas de ensamble entre elementos estándares y mixtos de tensión continua y discontinua, b) Modelo numérico con bordes absorbentes PML, c) Variación temporal de la carga distribuida aplicada.

### 3. MODELOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS

Para comparar la precisión de cada elemento de capa de borde se aplica la misma carga dinámica distribuida sobre diferentes modelos; modelos con diferentes bordes absorbentes PML (Figura 3) y un modelo de dominio extendido de 150 m x 150 m que sirve como solución del problema hasta el primer rebote de onda P. En todos los casos se mantiene el tamaño de elemento finito de 1 m por 1m y el paso de tiempo del integrador  $dt = 0,0014$  s. Las propiedades del suelo utilizado son  $V_s = 229 \frac{m}{s}$ ,  $\nu = 0,35$ ,  $\gamma = 18 \frac{kN}{m^3}$ . Las dimensiones del modelo con capa absorbente son  $L_y = 10$  m,  $L_{PML} = 5$  m y  $L_x = 10$  m. Los parámetros de la función de estiramiento utilizados son  $\alpha_0 = 0,20723$  y  $\beta_0 = 474,6 \text{ seg}^{-1}$ .

En la Figura 4 se observan los desplazamientos en los puntos de control  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  calculados mediante los diferentes modelos numéricos. No puede apreciarse ninguna diferencia a simple vista entre lo calculado con el dominio extendido y los modelos con bordes PML, incluso en los puntos que están en la interfase.

Para poder visualizar y comparar la efectividad de cada borde utilizado se utiliza la norma del campo de desplazamiento  $D(t, \Omega_{RD})$  sobre el dominio regular  $\Omega_{RD}$  y un error relativo normalizado  $e(t)$  respecto del pico de la norma del campo de desplazamiento:

$$D(t, \Omega_{RD}) = \left( \int_{\Omega_{RD}} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad e(t) = \frac{\left( \int_{\Omega_{RD}} (\mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_{DE}^T) (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_{DE}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\max_t D(t, \Omega_{RD})} \quad (42)$$



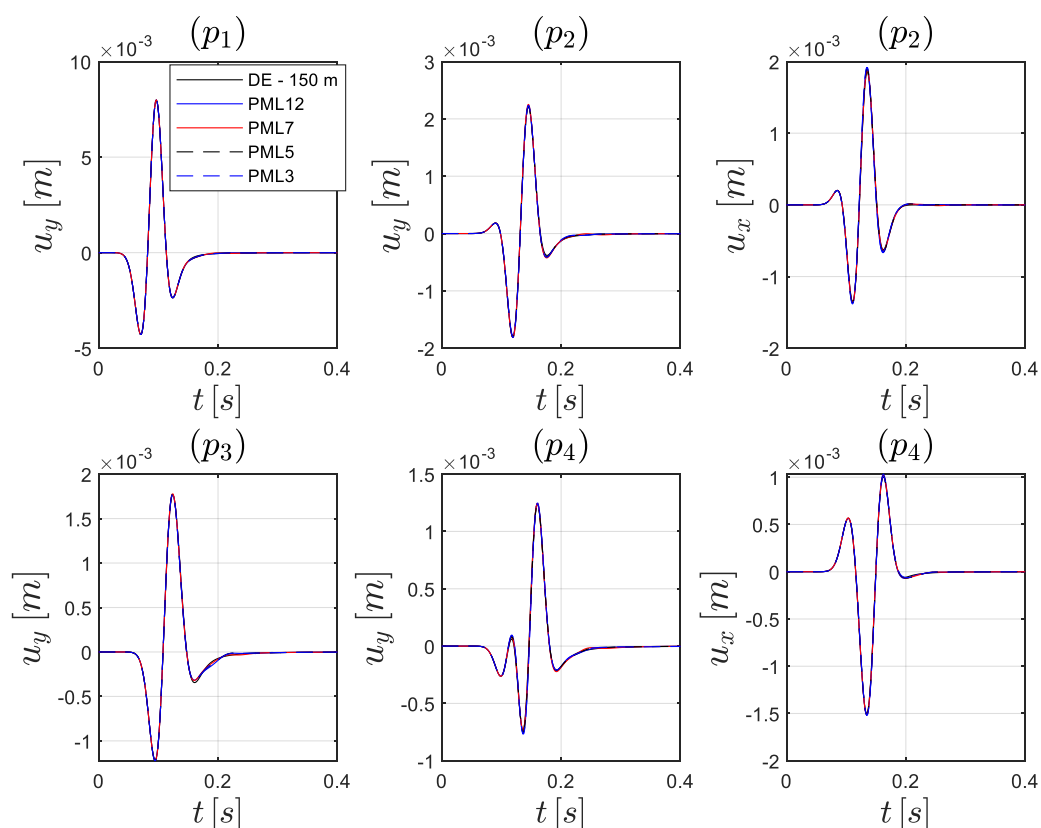


Figura 4: Desplazamientos en los puntos de control.

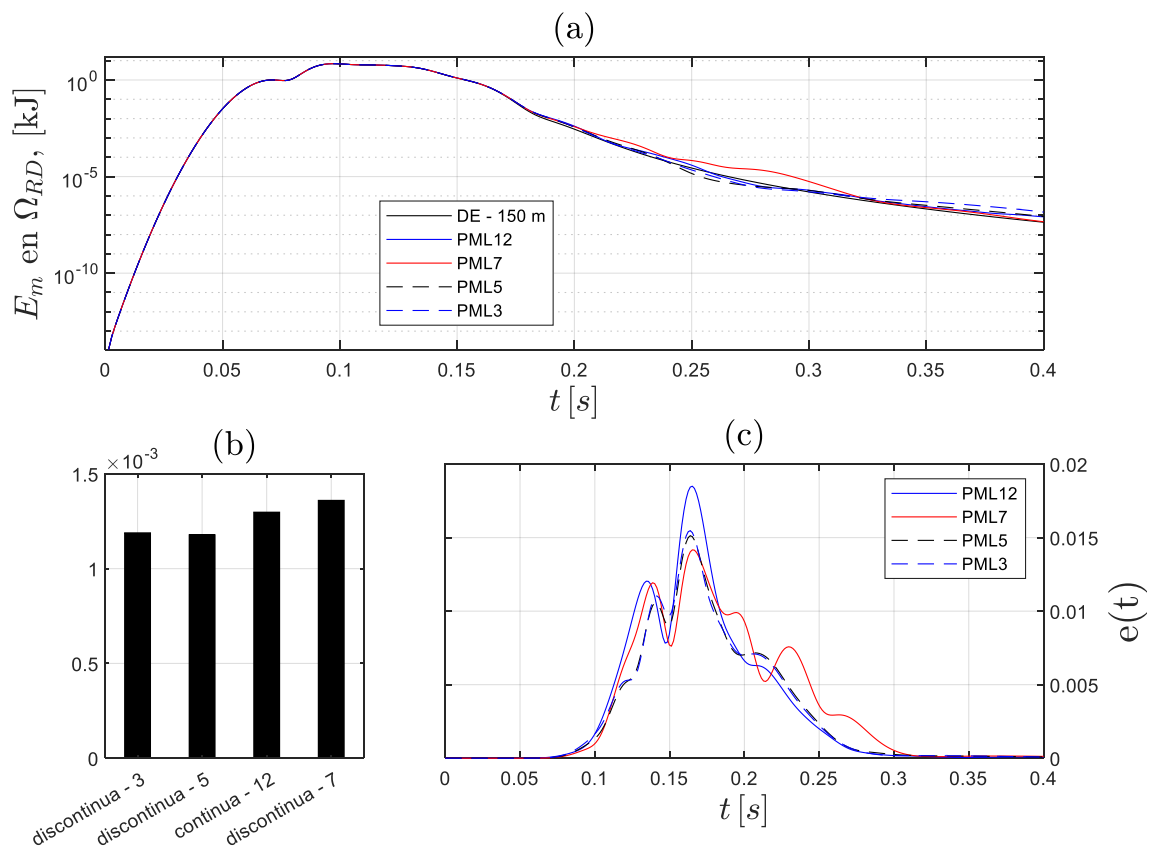


Figura 5: (a) Variación de la energía mecánica en el dominio regular, (b) integral del error relativo normalizado y (c) variación del error relativo normalizado.

donde  $\mathbf{u}_{DE}$  es el desplazamiento calculado mediante el modelo de dominio extendido. En la Figura 5 c se grafica  $e(t)$  y se observa que la variación del error es similar en todos los casos. Se integra  $e(t)$  en el dominio del tiempo y se comparan en un gráfico de barras (véase Figura 5 b) donde puede verse que el desempeño del elemento de 5 incógnitas de tensión es el mejor, seguido por el elemento de tensión constante.

Además, se calcula la energía mecánica en el dominio regular como función del tiempo:

$$E_m(t, \Omega_{RD}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{RD}} \rho(\dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{RD}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (43)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones. En la Figura 5 a se grafica la energía mecánica contenida en el dominio  $\Omega_{RD}$ . Se observa que el modelo con bordes mixtos de tensión discontinua de 7 incógnitas de tensión presenta un desempeño inferior a los demás a partir de los 0,2 s.

#### 4. CONCLUSIONES

Se presentan las matrices elementales de un elemento absorbente mixto simétrico que pueden ensamblarse a las matrices del sistema de una formulación clásica en términos de desplazamientos. Esta formulación permite incorporar este tipo de elementos a los códigos existentes, e integrar las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo.

Los resultados muestran la efectividad de los bordes PML para simular la infinitud del medio, ya que su desempeño es altamente satisfactorio incluso para simular la respuesta en puntos cercanos a la interfase. Utilizar elementos finitos mixtos PML con funciones de interpolación de tensión discontinua en lugar de continua no sólo permite disminuir la cantidad de incógnitas del problema, sino que aumenta la efectividad de absorción del borde. Se observa que los elementos mixtos PML de tensión discontinua con 5 y 3 incógnitas de tensión alcanzan mayor precisión que los elementos de tensión continua (que requieren un mínimo de 12 incógnitas adicionales por elemento). Por otra parte, el elemento mixto PML de tensión discontinua con 7 incógnitas de tensión no representa una mejoría significativa respecto del elemento mixto de tensión continua.

#### REFERENCIAS

- Brezzi F. A survey of mixed finite element methods. *Finite elements*. Springer Science and Business Media, New York, 1988.
- Fraeijs de Veubeke B. Displacement and equilibrium models in finite element method. In O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister, editors, *Stress Analysis*, Chapter 9, pages 145-197. John Wiley & Sons, Chinchester, 1965.
- Kucukcoban S. y Kallivokas, L.F. A symmetric hybrid formulation for transient wave simulations in PML-truncated heterogeneous media. *Wave Motion*, 50, 57-79 (2013).
- Pian T.H.H. y Sumihara K. Rational Approach for assumed stress finite elements. *International Journal for numerical methods in engineering*, VOL. 20, 1685-1695, 1984.
- Poursartip B. Topographic amplification of seismic motion. *Dissertation for the degree of doctor of philosophy*, The University of Texas at Austin, 2017.
- Trono A., Lorenzón D., Pinto F., Ceballos M. A.: Absorción de ondas elásticas mediante capas perfectamente acopladas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXVIII, págs 685-694, 2021.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L., Zhu J. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Sixth edition. Elsevier, 2005.