

EFFECTO COMBINADO DE LA TENACIDAD Y LA TENSIÓN CRÍTICA EN LA DEFLEXIÓN DE FRACTURAS

COMBINED EFFECT OF TOUGHNESS AND CRITICAL STRESS ON THE DEFLECTION OF FRACTURES

Julieta Gutiérrez^{a,b}, Alfredo E. Huespe^c y Santiago A. Serebrinsky^a

^aYPF Tecnología S.A. (Y-TEC - CONICET), Av. del Petróleo s/n, e/129 y 143 (1923), Berisso, Argentina

^bConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Godoy Cruz 2290, 1425, CABA, Argentina

^cCentro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), UNL, CONICET, Predio "Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta Nacional 168 s/n, 3000, Santa Fe, Argentina

Palabras clave: Tenacidad, Tensión crítica, Deflexión, Modo mixto.

Resumen. Los modelos de deflexión de fracturas se han fundado habitualmente en criterios basados en la tensión crítica o en la energía de fractura crítica. Sin embargo, se ha encontrado recientemente que ambos criterios pueden cooperar en el fenómeno de deflexión. En este trabajo utilizamos los métodos de Galerkin discontinuo y de zonas cohesivas, que naturalmente incorporan la tenacidad y la tensión crítica, para analizar el efecto combinado de ambas sobre el fenómeno de la competencia entre la propagación y la deflexión de fracturas. La comparación con resultados existentes en la literatura permite acercarnos al establecimiento de soluciones de referencia para el estudio de este fenómeno, previamente no disponibles. Los resultados son de aplicación para el efecto de fracturas naturales y discontinuidades mecánicas sobre la estimulación hidráulica de reservorios no convencionales.

Keywords: Toughness, Critical stress, Deflection, Mixed mode.

Abstract. Fracture deflection models have usually been based on stress-based criteria or energy-based criteria. However, it has recently been found that both criteria can cooperate in the deflection phenomenon. In this work we use the discontinuous Galerkin and cohesive zone methods, which naturally incorporate toughness and critical stress, to analyze the combined effect of both on the phenomenon of competition between fracture propagation and deflection. The comparison with existing results in the literature allows us to approach the establishment of reference solutions for the study of this phenomenon, previously unavailable. The results are applicable to the effect of natural fractures and mechanical discontinuities on hydraulic stimulation of unconventional reservoirs.

1. INTRODUCCIÓN

La interacción entre las propiedades mecánicas de los materiales, la resistencia y la tenacidad, que determina las condiciones bajo las cuales una fractura se nucleará y se propagará en un sólido, ha sido extensamente discutida en la literatura. Ambas propiedades también juegan un papel importante en la determinación del mecanismo de interacción que surge entre fracturas propagantes en un medio sólido que inciden en interfaces adhesivas. Estas interfaces se pueden caracterizar por tensiones críticas y tenacidad. El mecanismo resultante de esta interacción tiene consecuencias relevantes en varios problemas tecnológicos. Por ejemplo, en la evaluación del mecanismo de transición entre fractura intergranular y transgranular, en microestructuras heterogéneas (Fouk III et al., 2008). Otro campo de estudio donde dichas interacciones juegan un papel destacado es en problemas de fractura hidráulica con aplicación a yacimientos de petróleo no convencionales. El hecho de que las fracturas hidráulicas que inciden en las interfaces naturales las activen (deflexión) o las crucen (penetración) es un efecto relevante en la permeabilidad y productividad efectivas del yacimiento (Chuprakov et al., 2014; Garagash, 2019).

Los métodos para predecir la penetración de fracturas frente a la deflexión se pueden clasificar en tres categorías según las propiedades del material utilizadas en los criterios: métodos basados en tensión crítica, métodos energéticos y métodos combinados (tensión y energía). Históricamente, los métodos basados en tensiones críticas fueron los primeros en desarrollarse y los métodos que combinan tensión y energía son los más recientes.

Los métodos basados en tensión crítica σ_c se basan en comparar el campo de tensiones en la punta de la fractura incidente con las resistencias de la interfaz σ_i y del sustrato σ_s al otro lado de la misma. El más sofisticado de ellos es el trabajo de Gupta et al. (1992) en el que el modo de propagación está determinado por la relación entre la máxima tensión normal de apertura al otro lado de la interfaz y la máxima tensión normal de apertura a lo largo de la misma. Para un sistema con materiales que tienen propiedades elásticas idénticas en cualquier lado de la interfaz, la transición se prevé en una relación de resistencia σ_s/σ_i de aproximadamente 3,5. Aunque se reconoce que tienen deficiencias en comparación con los métodos de mecánica de fractura, los métodos basados en tensiones pueden ser computacionalmente rápidos y, en muchos casos se utilizan cuando la velocidad computacional es un factor importante (Strom y Parmigiani, 2014).

Los métodos energéticos se basan en la aplicación de la mecánica de fractura lineal elástica, LEFM, en fracturas con kinks cortos que se extienden desde la punta de la fractura. La penetración está habitualmente modelada por un kink que se extiende directamente por delante de la punta de la fractura inicial y cruza la interfaz. La deflexión se puede modelar como un caso separado en una segunda geometría mediante kinks que se extienden lateralmente desde la punta de la fractura inicial a lo largo de la interfaz. En estos métodos, el comportamiento de penetración frente a deflexión se determina a partir de una comparación de las tasas de liberación de energía G en las distintas configuraciones con los correspondientes valores críticos G_s de la matriz o sustrato (s) y G_i de la interfaz (i), respectivamente. De modo similar, se pueden considerar la intensidad de tensiones K_I y las tenacidades K_{Ics} y K_{Ici} . El más conocido de los enfoques energéticos es el de He y Hutchinson (1989) (con correcciones en (Hutchinson et al., 1994)). Un resultado de ese trabajo es que la transición se producirá cuando la relación entre las energías de fractura críticas del sustrato y la interfaz G_s/G_i sea de aproximadamente 4,0 dado un sistema con sustratos que tengan propiedades elásticas idénticas en ambos lados de la interfaz, e incidencia normal sobre la interfaz.

Los métodos mixtos, que tienen en cuenta la resistencia y la tenacidad del sustrato y la

interfaz, utilizan típicamente un modelo de zona cohesiva. [Parmigiani y Thouless \(2006\)](#) demostraron que el criterio de penetración versus deflexión es, en general, una función de ambos valores críticos. También demostraron a modo de verificación que, en los límites apropiados, el modelo de zona cohesiva reproduce el resultado anterior en que la razón de transición entre modos es $G_s/G_i \approx 4,0$. Posteriormente, [Fouk III et al. \(2008\)](#) aplicaron el enfoque de zona cohesiva a la transición de modo de fractura transgranular/intergranular (es decir, penetración en el grano frente a deflexión en borde de grano) de un sistema de material de alta resistencia y baja tenacidad. Por otra parte, [Strom y Parmigiani \(2014\)](#) complementaron el trabajo de [Parmigiani y Thouless \(2006\)](#), cuantificando los resultados en términos de la carga aplicada, y [Alam et al. \(2016\)](#) extendieron el análisis de [Parmigiani y Thouless \(2006\)](#) a ángulos de incidencia de la fractura sobre la interfaz menores a 90° .

De los trabajos mencionados, el de [Fouk III et al. \(2008\)](#) analiza más en detalle la mecánica de la transición. Se describe que la transición ocurre por zonas de proceso en competencia; uno a lo largo de la interfaz en la dirección de deflexión y otro a través de la interfaz en la dirección de penetración. La importancia de ambas zonas de proceso en el mecanismo de interacción impide el uso de criterios únicamente energéticos o basados únicamente en la resistencia para describir el evento de transición. Este se caracteriza por ser inestable en el sentido de que la fuerza impulsora se eleva mientras se crean ambas zonas de proceso. Una vez que se define una dirección de propagación, la fuerza impulsora disminuye, una zona de proceso colapsa y solo una permanece activa. Se explica que se necesita un criterio mixto para determinar la dirección de propagación (penetración o deflexión), sin embargo, una vez que se define la dirección, la propagación procede por los criterios LEFM habituales, según corresponda.

El trabajo aquí presentado utiliza el modelo de zonas cohesivas para estudiar la transición. El objetivo de este trabajo es extender el análisis de [Strom y Parmigiani \(2014\)](#) a interfaces con diferentes ángulos de interacción, complementando el estudio de [Alam et al. \(2016\)](#).

2. MODELO Y RESULTADOS

Este trabajo está basado en el estudio de [Parmigiani y Thouless \(2006\)](#), cuyo modelo consta de un sustrato con un film o película depositada, con respectivos módulos de Young E_f y E_s y coeficientes de Poisson ν_f y ν_s , y la interfaz entre ellos, como puede observarse en la Fig. 1. En particular consideramos el caso homogéneo en deformación plana, donde las propiedades elásticas del sustrato y la película son iguales (módulo de Young $E_s = E_f = E$ y coeficiente de Poisson $\nu_s = \nu_f = \nu$), de modo que los parámetros de Dundurs ([Dundurs, 1969](#)) son $\alpha = \beta = 0$.

Cuando se aplica alguna forma de carga remota, tanto la interfaz como el sustrato estarán sometidos a tracciones que tenderán a propagar fracturas. El modo de propagación dominante (sustrato versus interfaz) y el valor de carga aplicada al cual se produce la falla dependen de diversos parámetros.

El método energético de [He y Hutchinson \(1989\)](#); [Hutchinson et al. \(1994\)](#) compara las tasas de liberación de energía para un kink que se extiende penetrando (p) el sustrato a través de la interfaz, G_p , con la de un kink que deflecta (d) a lo largo de la misma, G_d . La condición para la deflexión de fracturas a lo largo de la interfaz se puede escribir como

$$\frac{G_i}{G_s} < \frac{G_d}{G_p} \quad . \quad (1)$$

Esta ecuación se puede aplicar a la configuración de la Fig. 1, donde la intensidad de tensio-

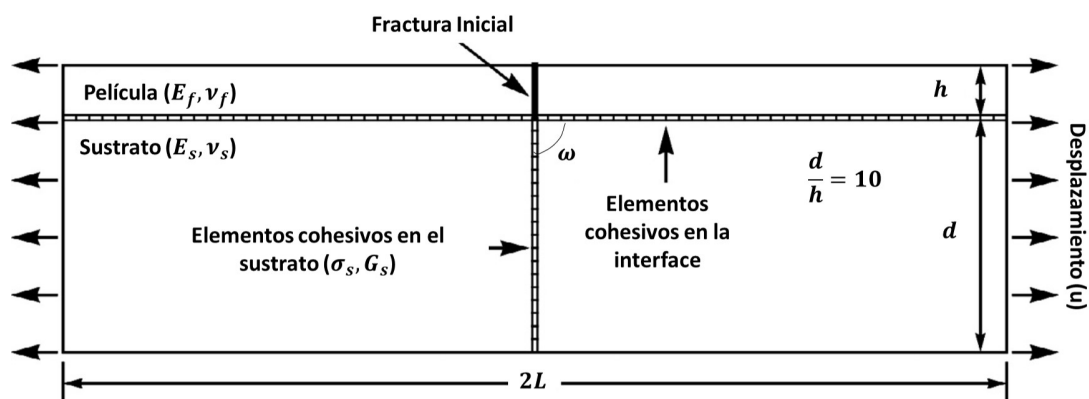


Figura 1: Geometría del modelo de elementos finitos (adaptada de [Strom y Parmigiani \(2014\)](#)) que muestra la ubicación de los elementos de la zona cohesiva a lo largo de la interfaz y delante de la fractura inicial en el sustrato. Se utilizaron relaciones $L/h = 220$ con la condición de borde de desplazamiento y $L/h = 10$ con la condición de borde tipo MBL.

nes en modo I es ([Tada et al., 1973](#))

$$K_I = 1,197\sigma\sqrt{\pi h} \quad , \quad (2)$$

con σ la tensión remota aplicada y h la longitud inicial de la fractura. Usando en la ec. (2) la relación $K_{Ics}^2 = \bar{E}G_s$ para la tenacidad, o sea el valor crítico para el sustrato de K_I , donde $\bar{E} = E/(1 - \nu^2)$ es el módulo de Young en deformación plana, en el punto crítico será

$$\sqrt{\bar{E}G_s} = 1,197\sigma_{0p}\sqrt{\pi h} \quad , \quad (3)$$

y la tensión crítica no dimensional para propagación de un kink en el sustrato será

$$\phi_p = \sigma_{0p}\sqrt{\frac{h}{\bar{E}G_i}} = \frac{1}{1,197\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{G_s}{G_i}} \quad . \quad (4)$$

La tensión crítica no dimensional para propagación de un kink en deflexión ϕ_d depende del ángulo de incidencia, y se puede obtener combinando la ecuación (2) con la expresión dada por [He y Hutchinson \(1989\)](#) para la razón G_d/G_p . Para el caso particular de 90° , analizado en detalle por [Strom y Parmigiani \(2014\)](#),

$$G_d = 0,2608K_I^2/\bar{E} \quad . \quad (5)$$

Dado que durante la propagación vale $G_i = G_d$, resulta

$$\phi_d = \sigma_{0d}\sqrt{\frac{h}{\bar{E}G_i}} = 0,923 \quad . \quad (6)$$

Esta cantidad se puede calcular de forma similar para otros ángulos de incidencia.

De acuerdo con [He y Hutchinson \(1989\)](#), la propagación de la fractura ocurre en el modo que requiere la menor tensión aplicada. La transición entre modos para valores crecientes de $r_G = G_s/G_i$, desde el modo de penetración al modo de deflexión, ocurre en el valor $r_{Gt} = 3,84$. En este análisis no participan los valores de σ_s y σ_i , como es de esperar en LEFM.

Para las simulaciones de este trabajo se utilizó el método de zonas cohesivas con discontinuous Galerkin (p.ej., ([Noels y Radovitzky, 2008](#); [Radovitzky et al., 2011](#))) para predecir la

propagación de fracturas mediante simulaciones de elementos finitos. La geometría corresponde a la Fig. 1. Los elementos cohesivos están ubicados a lo largo de la interfaz y en el sustrato por delante de la fisura inicial. La ley cohesiva es triangular descendente con una formulación de ley efectiva (Ortiz y Pandolfi, 1999).

La zona cohesiva tendrá típicamente una longitud característica $L_{cs} = q\bar{E}G_s/\sigma_s^2$ en el sustrato, con q un factor numérico del orden de 1, y de manera similar para la interfaz. Se pueden definir entonces dos longitudes de escala no dimensionales, para el sustrato $\lambda_s = \bar{E}G_s/\sigma_s^2h = L_{cs}/hq$ y para la interfaz $\lambda_i = \bar{E}G_i/\sigma_i^2h = L_{ci}/hq$. La longitud de escala de la interfaz y el parámetro $G_i/\bar{E}h$ se mantuvieron constantes en valores de 0,01 y 10^{-6} respectivamente, y se varió la longitud de escala del sustrato, con valores de 0,001, 0,01 y 0,1.

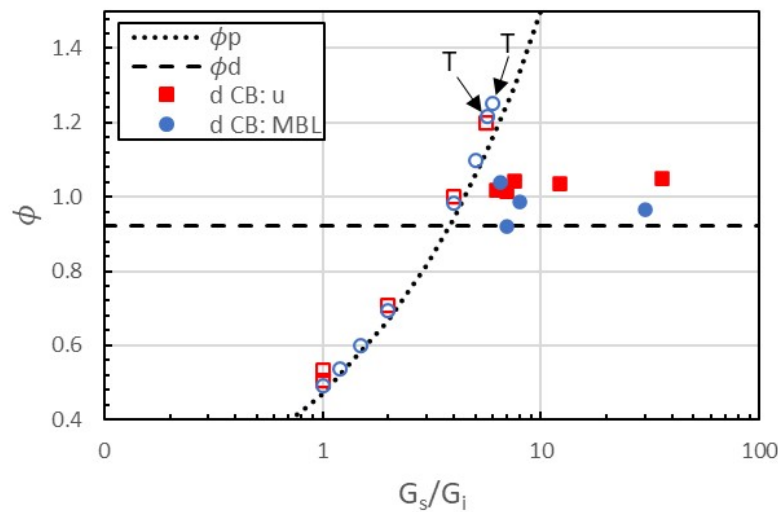


Figura 2: Carga crítica no dimensional ϕ en función de la razón de energías de fractura del sustrato sobre la interfaz $r_G = G_s/G_i$ para simulaciones con $G_i/\bar{E}h = 10^{-6}$, $\lambda_i = \bar{E}G_i/\sigma_i^2h = \lambda_s = \bar{E}G_s/\sigma_s^2h = 0,01$, con condición de borde de desplazamiento (cuadrados) y condiciones de borde tipo MBL (círculos). Los símbolos llenos indican deflexión, los vacíos penetración, y la letra T, la transición.

La carga remota para un K_I prescrito se aplicó con dos configuraciones diferentes. La primera configuración tenía la mismas dimensiones geométricas y modo de aplicación de la carga (desplazamiento uniforme en las caras laterales, CB=u) utilizadas por Strom y Parmigiani (2014), para comparar con los resultados originales. La segunda configuración tenía $L/h = 10$ y desplazamientos tipo "Modified Boundary Layer" (CB=MBL) (Anderson, 2017). En la Fig. 2 se encuentran los resultados de dichas simulaciones. Las curvas representan las predicciones de He y Hutchinson (1989) según las ec. (4) y (6) para los modos de penetración y deflexión a 90° . Su intersección marca el punto de transición. Los símbolos rellenos y vacíos indican simulaciones que resultaron en deflexión (d) y penetración (p), respectivamente. Los cuadrados y círculos indican las simulaciones con condiciones de borde de desplazamiento (CB=u) y tipo MBL, respectivamente.

La primera observación es que los resultados con ambas configuraciones fueron similares, según lo esperado. De aquí en adelante se utilizarán entonces condiciones de borde tipo MBL, que proveen mayor flexibilidad para extensiones futuras de estos análisis. En segundo lugar, se observó que la transición se obtuvo a valores de ϕ y de $r_G = G_s/G_i$ mayores que lo predicho por la teoría de He y Hutchinson (1989). Esto concuerda cualitativamente con los resultados

obtenidos por Strom y Parmigiani (2014). Desde el punto de vista mecanístico, en la región de transición ambos modos de propagación compiten, y durante la aplicación incremental de la carga remota se desarrollan simultáneamente ambas zonas de proceso, lo que implica un mayor consumo energético. Lejos de la zona de transición, el modo de propagación dominante es esencialmente el único que desarrolla una zona de proceso, y los valores de carga requeridos coinciden con los predichos por la LEFM.

A continuación se realizaron simulaciones con ángulos de interacción menores a 90° . Los resultados de carga crítica en función de r_G se muestran en la Fig. 3. La curva punteada representa la carga crítica no dimensional de propagación en penetración, al igual que en la Fig. 2 (independiente del ángulo de incidencia), y las líneas punteadas horizontales indican el valor de la carga crítica no dimensional de deflexión para varios ángulos de incidencia (30° , 45° , 60° y 90°). Las respectivas intersecciones marcan los puntos de transición de modo correspondientes. Los símbolos indican resultados de las simulaciones, de manera similar a la Fig. 2. Con una letra T están marcadas las transiciones obtenidas.

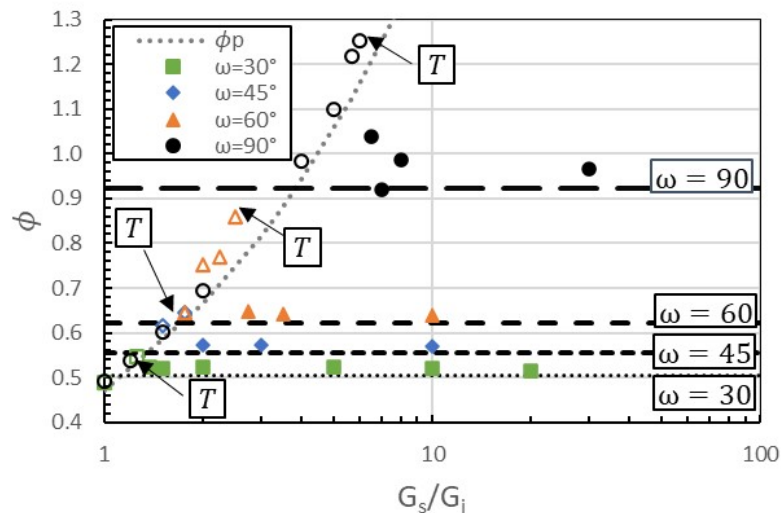


Figura 3: Carga crítica no dimensional ϕ en función de la razón de energías de fractura del sustrato sobre la interfaz r_G para simulaciones con ángulos de interacción: 30° , 45° , 60° y 90° , con $G_i/\bar{E}h = 10^{-6}$, $\lambda_i = \bar{E}G_i/\sigma_i^2h = \lambda_s = \bar{E}G_s/\sigma_s^2h = 0,01$, y condición de borde tipo MBL. Los símbolos rellenos indican deflexión, los vacíos penetración, y la letra T, transición.

De la Fig. 3 extrajimos los valores r_{Gt} y ϕ_t en el punto de transición para cada ángulo de incidencia. Estos resultados se muestran en la Fig. 4, junto con los resultados disponibles de Parmigiani y Thouless (2006); Foulk III et al. (2008); Strom y Parmigiani (2014). El comportamiento cualitativo es en todos los casos el mismo. Las diferencias cuantitativas pueden deberse a las diferentes leyes cohesivas utilizadas. En la misma figura se aprecia que nuestro estudio provee datos más completos.

Dado que la causa del apartamiento de los resultados respecto de lo previsto por LEFM es el desarrollo de zonas cohesivas, examinamos el efecto de los tamaños relativos de las zonas cohesivas L_{cs} y L_{ci} en el sustrato y la interfaz, respectivamente. Para eso, variamos la longitud característica λ_s cubriendo un rango de valores $\lambda_s/\lambda_i = L_{cs}/L_{ci} = 0,1, 1, 10$, expandiendo así el análisis de la Fig. 3. Dado que la zona cohesiva es un concepto ajeno a la LEFM, esta variación no incide en sus predicciones. En la Fig. 5 se muestran los resultados. Se puede

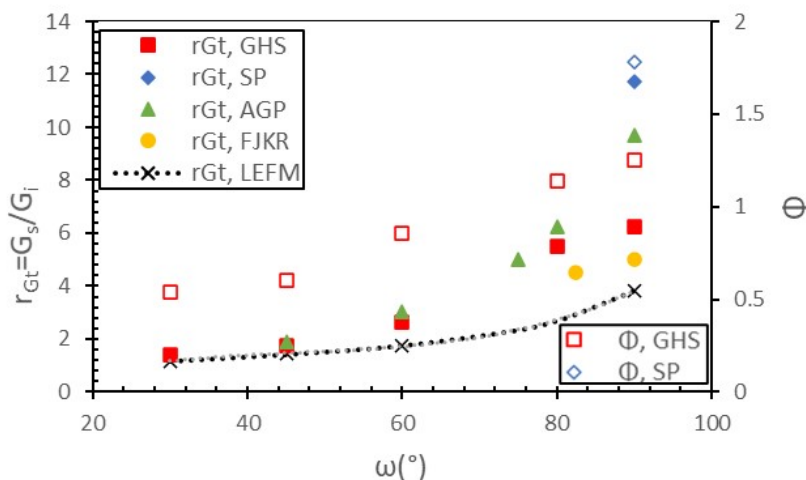


Figura 4: Comparación de la razón r_{Gt} y carga crítica no dimensional ϕ en función del ángulo de incidencia entre los resultados de este trabajo (GHS), Strom y Parmigiani (2014) (SP), Alam et al. (2016) (AGP), Foulk III et al. (2008) (FJKR) y de la mecánica de fractura lineal elástica, LEFM (He y Hutchinson (1989)).

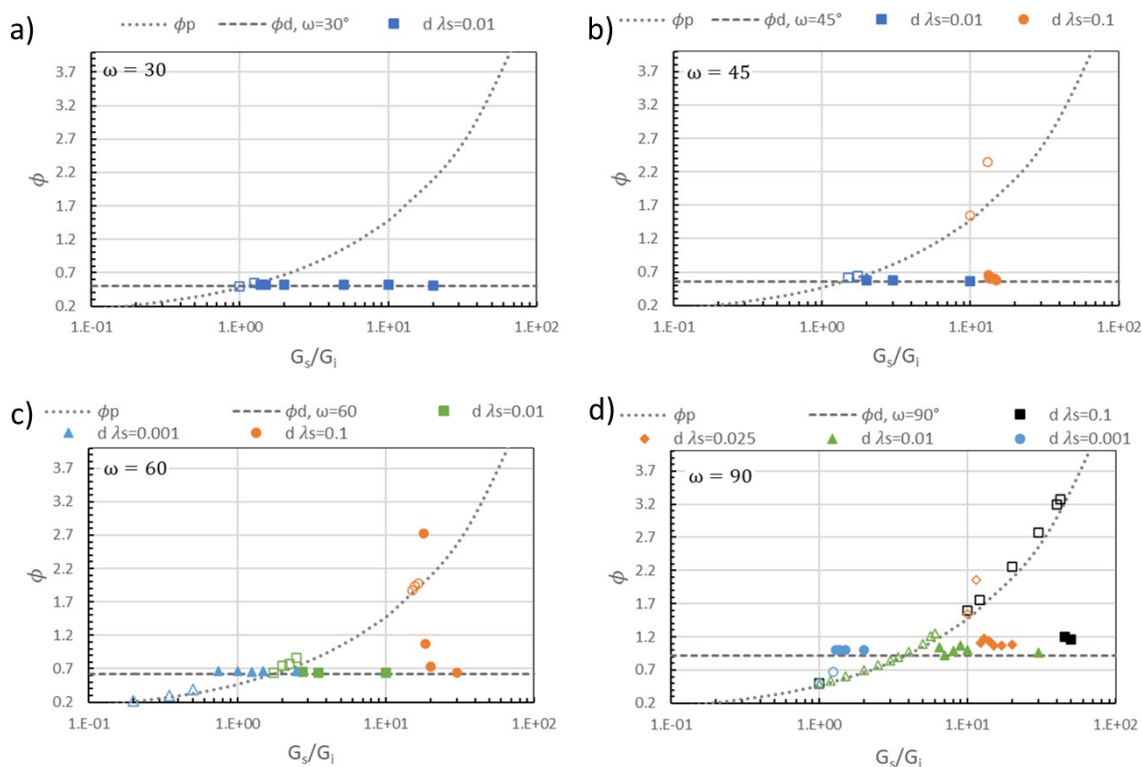


Figura 5: Carga crítica no dimensional en función de la razón de energías de fractura del sustrato sobre la interfaz (G_s/G_i) para simulaciones para simulaciones a diferentes ángulos de interacción: a) 30°, b) 45°, c) 60° y d) 90°, $G_i/\bar{E}h = 10^{-6}$, $\lambda_i = \bar{E}G_i/\sigma_i^2h = 0,01$, y variando el parámetro $\lambda_s = \bar{E}G_s/\sigma_s^2h = [0,001, 0,01, 0,025, 0,1]$. Los símbolos vacíos indican penetración, los rellenos deflexión.

apreciar que cuando $\lambda_s/\lambda_i \gg 1$ hay un aumento considerable de la razón de transición r_{Gt} respecto del valor predicho por LEFM. Por el contrario, cuando $\lambda_s/\lambda_i \ll 1$, r_G es menor que el valor predicho. Esta tendencia se observa para todos los ángulos de incidencia. Desde el punto de vista mecánico, cuando la zona cohesiva en el sustrato se alarga (L_{cs}/L_{ci} aumenta) a $r_G > r_{Gt}$ constante, esto inhibe la propagación en modo de deflexión, aún cuando desde el punto de vista energético este sería favorable ($\phi_d < \phi_p$). El modo de propagación en deflexión es estabilizado respecto de la penetración en esta condición. Cuando la zona cohesiva en el sustrato se acorta (L_{cs}/L_{ci} disminuye) a $r_G < r_{Gt}$ constante, esto inhibe la propagación en modo de penetración, aún cuando desde el punto de vista energético este sería favorable ($\phi_d > \phi_p$). El modo de propagación en el sustrato se estabiliza.

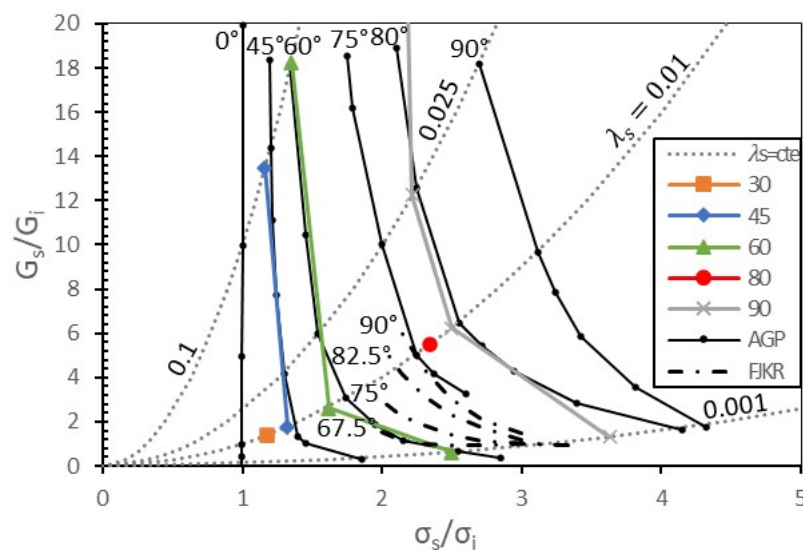


Figura 6: Razón de energías de fractura del sustrato sobre la interfaz (G_s/G_i) en función de la razón de resistencias del sustrato sobre la interfaz (σ_s/σ_i) para simulaciones a diferentes ángulos de incidencia (30° , 45° , 60° y 90°). Los parámetros $\lambda_i = \bar{E}G_i/\sigma_i^2h = 0,01$ y $G_i/\bar{E}h = 10^{-6}$ se mantuvieron constantes, y los valores del parámetro $\lambda_s = \bar{E}G_s/\sigma_s^2h$ se indican sobre las líneas $\lambda_s = cte$. Los resultados de las transiciones se encuentran indicados con símbolos de colores según el ángulo de incidencia. Los resultados de Alam et al. (2016) (AGP) y Foulk III et al. (2008) (FJKR) se representan con líneas llenas y con líneas y puntos, respectivamente.

De las simulaciones anteriores extrajimos los valores de r_G y $r_\sigma = \sigma_s/\sigma_i$ para representar el diagrama de modos de propagación de la Fig. 6. También se muestran los resultados de Alam et al. (2016) y Foulk III et al. (2008). Todos los resultados coinciden cualitativamente. Del mismo modo que en la Fig. 4, nuestros resultados están en el medio de los de literatura, con discrepancias mayores para altos ángulos de incidencia. Foulk III et al. (2008) exploraron un rango acotado del espacio de parámetros ($r_\sigma = \sigma_s/\sigma_i$ entre 2 y 3,5). Para un ángulo de 60° sólo observaron propagación intergranular (por deflexión). Esta figura ilustra de manera alternativa el resultado descrito arriba, es decir, variando la razón de tensiones críticas r_σ a r_G constante (que implicar variar la razón de longitudes cohesivas), se puede alterar el modo dominante de propagación. Este resultado está en contraposición con las predicciones de LEFM.

Adicionalmente al efecto sobre el modo dominante de propagación, la presencia de las zonas de proceso en condiciones de interacción entre una fractura que se propaga y una interfaz pueden aumentar la carga de propagación, y por ende la tenacidad de la estructura, aún para fracturas que propagan en el sustrato, nuevamente en contraposición con las predicciones de LEFM. Este

incremento no aparece cuando existe una zona de proceso en la propagación en el sustrato sin otra zona cohesiva que compita.

3. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el rol combinado de la energía de fractura crítica y la tensión crítica sobre la competencia en la propagación de fracturas en los modos alternativos de deflexión en interfaces y de penetración. Se realizaron simulaciones con interfaces en diferentes ángulos con respecto a la fractura inicial, y se compararon los resultados con las predicciones de LEFM y resultados de trabajos relacionados disponibles en la literatura. Las conclusiones principales son las siguientes:

- La transición de modo de propagación, de deflexión a penetración, puede ocurrir para valores de la razón $r_G = G_s/G_i$ mayores o menores que los predichos por LEFM. Esto depende fuertemente de la razón entre los tamaños de zona cohesiva L_{cs}/L_{ci} , a través de la estabilización de cada uno de los modos inducida por el desarrollo de las respectivas zonas cohesivas.
- La tenacidad de una estructura bajo condiciones en las que las zonas cohesivas se desarrollan simultáneamente y compiten es mayor que la predicha por LEFM. Esto puede ocurrir en ambos modos de propagación.
- Los resultados encontrados tienen aplicación directa a cualquier condición de competencia entre los modos de propagación, por ejemplo en la estimulación hidráulica en presencia de discontinuidades mecánicas, y sugieren que es importante determinar tanto la tenacidad como la resistencia para una correcta predicción.

REFERENCIAS

- Alam M., Grimm B., y Parmigiani J.P. Effect of incident angle on crack propagation at interfaces. *Engineering Fracture Mechanics*, 162:155–163, 2016.
- Anderson T.L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC press, 2017.
- Chuprakov D., Melchaeva O., y Prioul R. Injection-sensitive mechanics of hydraulic fracture interaction with discontinuities. *Rock mechanics and rock engineering*, 47(5):1625–1640, 2014.
- Dundurs J. Discussion: “Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading” (Bogy, D.B.). *ASME J. Appl. Mech*, 36:460–446, 1969.
- Fouk III J., Johnson G., Klein P., y Ritchie R. On the toughening of brittle materials by grain bridging: Promoting intergranular fracture through grain angle, strength, and toughness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(6):2381–2400, 2008.
- Garagash D.I. Cohesive-zone effects in hydraulic fracture propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 133:103727, 2019. ISSN 0022-5096. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.103727>.
- Gupta V., Argon A., y Suo Z. Crack deflection at an interface between two orthotropic media. *ASME J. Appl. Mech*, 1992.
- He M.Y. y Hutchinson J.W. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. *International journal of solids and structures*, 25(9):1053–1067, 1989.
- Hutchinson J.W., He M., y Evans A. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials: Role of residual stress. *Int. J. Solids Struct.*, 31:3443, 1994.

- Noels L. y Radovitzky R. An explicit discontinuous galerkin method for non-linear solid dynamics: Formulation, parallel implementation and scalability properties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(9):1393–1420, 2008.
- Ortiz M. y Pandolfi A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, 44(9):1267–1282, 1999.
- Parmigiani J. y Thouless M. The roles of toughness and cohesive strength on crack deflection at interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(2):266–287, 2006.
- Radovitzky R., Seagraves A., Tupek M., y Noels L. A scalable 3d fracture and fragmentation algorithm based on a hybrid, discontinuous galerkin, cohesive element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(1):326–344, 2011. ISSN 0045-7825. doi:<https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.08.014>.
- Strom J.L. y Parmigiani J.P. Transition of crack path at bi-material interfaces. *Engineering Fracture Mechanics*, 115:13–21, 2014.
- Tada H., Paris P.C., y Irwin G.R. The stress analysis of cracks. *Handbook, Del Research Corporation*, 34:635, 1973.