

ESTUDO NUMÉRICO DO ESCOAMENTO ATRAVÉS DE UM CILINDRO OSCILANTE UTILIZANDO O MÉTODO DE FRONTEIRAS IMERSAS

Lorenzo Basso Benevenuti e Jorge H. Silvestrini

*Faculdade de Engenharia, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS,
Av. Ipiranga, 6681 - 90619-900 - Porto Alegre, RS, Brasil*

Palavras chave: simulação numérica, oscilação forçada, desprendimento de vórtices, fronteiras imersas.

Resumo.

O estudo de escoamentos através de cilindros é um problema clássico em fluidodinâmica e tem atraído a atenção de centenas de autores devido à sua relevância na área científica e na engenharia. Este trabalho apresenta simulações numéricas para um único cilindro oscilando transversalmente a um escoamento em duas dimensões. As equações de Navier-Stokes são solucionadas numa malha cartesiana usando esquemas de diferenças finitas para resolver as derivadas espaciais e um método de Runge-Kutta de baixa armazenagem para integração no tempo. O cilindro é modelado usando o método de fronteiras imersas. A simulação numérica é capaz de gerar séries de tempo para a velocidade na posição da sonda e suas análises auto-espectrais mostram as frequências excitadas nas simulações. Assim, de modo que se possa identificar os padrões do desprendimento de vórtices e validar a ocorrência do fenômeno de sincronização (*lock-in*), foram simulados escoamentos transversais sobre um cilindro oscilando senoidalmente, com diferentes combinações de frequência e amplitude para cada simulação. Por meio de análises do sinal do coeficiente de sustentação, percebeu-se claramente a sincronização para os testes realizados dentro da zona de *lock-in*. Além disso, são analisados os valores dos coeficientes de sustentação e arraste, verificando-se assim suas variações devido à oscilação imposta ao cilindro. Dessa forma, após comparados com a literatura, todos os resultados obtidos se mostraram satisfatórios, demonstrando a consistência do método de fronteiras imersas e sua aplicabilidade no estudo de escoamentos sobre obstáculos em movimento.

1 INTRODUÇÃO

A transição à turbulência se dá com o aparecimento de instabilidades num escoamento originalmente estável. Essas instabilidades acabam por originar os chamados vórtices, que dependendo da geometria e das características do escoamento presente (e.g. Re), podem resultar no fenômeno de desprendimento de vórtices. Pode-se dizer de maneira bem genérica que a transição à turbulência é o resultado da amplificação de perturbações injetadas por variadas fontes de ruído, que levam um escoamento laminar a adotar características não-lineares.

Assim como visto na natureza em tornados, nuvens e correntes marinhas, e em muitas aplicações em engenharia como sistemas de aquecimento e carros de corrida, podemos encontrar diversos fenômenos envolvendo o escoamento de fluidos e a turbulência à eles associada. Dessa forma, existe uma vasta área de estudo e pesquisa envolvendo os mais diferentes fenômenos relacionados diretamente ou não à turbulência, procurando assim a otimização de processos, a compreensão de novos fenômenos e muitas vezes a simples solução de problemas específicos. Um campo bastante explorado e também de suma importância nesta área é o estudo da possibilidade de controlar a geração e desprendimento de vórtices de estruturas. Este fenômeno pode ser bruscamente alterado no caso destas se encontrarem em oscilação, ou ainda, quando a estrutura encontra-se imersa em um escoamento oscilatório. Uma das maneiras de verificar e examinar tais efeitos se dá com a utilização de um ou mais cilindros como modelos de uma estrutura genérica. Dessa forma, mostrou-se que para uma determinada faixa de frequência e amplitude de oscilação, do cilindro ou do escoamento, é possível se garantir certo controle sobre os mecanismos de instabilidade que induzem a ocorrência do fenômeno de geração e desprendimento de vórtices (Williamson e Govardhan, 2004). Assim, este trabalho busca examinar estes efeitos aplicando ao cilindro uma oscilação forçada conhecida, de forma que se possa verificar a relação entre as frequências induzidas e as frequências de desprendimento, analisando as variações nos coeficientes de arraste e sustentação para os diferentes testes realizados. Para tanto, serão apresentadas algumas experiências simuladas computacionalmente através do código Incompact3D (Silvestrini e Lamballais, 2001), utilizando o método de fronteiras imersas de modo a representar o cilindro em movimento oscilatório imerso no escoamento.

2 METODOLOGIA NUMÉRICA

O comportamento de escoamentos incompressíveis pode ser descrito através das equações de Navier-Stokes, as quais passam por um processo de acoplamento dos campos de pressão e de velocidade de modo a solucioná-las adequadamente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{f} - \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (2)$$

Estas equações baseiam-se nos princípios de conservação de massa e de quantidade de movimento, conforme formulação sob notação vetorial, onde \vec{u} é o vetor velocidade, p o campo de pressão modificado, ν a viscosidade do fluido, \vec{f} forças exteriores e $\vec{\omega}$ o campo de vorticidade dado pela relação $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$.

As equações foram adimensionalizadas em função da velocidade característica do escoamento (U_∞) e de uma dimensão característica do problema, o diâmetro do cilindro (D). Condições de contorno são impostas ao domínio computacional, onde na região de entrada (inflow) do domínio é introduzido um escoamento com perfil de velocidade média $u_x = 1$, $u_y = 0$; nas

fronteiras laterais, em $y = \pm L_y/2$, são impostas condições de deslizamento (free-slip) utilizando considerações simétricas e anti-simétricas; e na região de saída (outflow), em $x = L_x$, a condição é definida através da solução de uma equação de convecção simplificada. Mais detalhes acerca do código numérico podem ser encontrados em [Silvestrini e Lamballais \(2001\)](#) e [Lardeau et al. \(2002\)](#). Este código computacional simula escoamentos de fluidos com massa específica constante em uma malha cartesiana, onde as derivadas espaciais são resolvidas por um esquema de diferenças finitas centradas compactas de sexta ordem ([Lele, 1992](#)), a discretização temporal é determinada por um esquema de Runge-Kutta de baixa armazenagem de terceira ordem ([Williamson, 1980](#)), a representação de obstáculos imersos se dá através do Método de Fronteiras Imersas ([Goldstein et al., 1993](#)) e o cálculo das forças aerodinâmicas é feito através do uso da técnica de volumes de controle.

A discretização temporal das equações de Navier-Stokes esta intimamente relacionada com o custo computacional e a qualidade pretendida para os resultados. Assim sendo, para a escolha do método utilizado deve-se considerar a precisão dos resultados, o tempo de execução das simulações e o consumo de memória computacional. Os métodos de Runge-Kutta são comumente utilizados para tal discretização, sendo principais os de segunda, terceira e quarta ordem. Estes métodos, introduzidos por [Williamson \(1980\)](#) e chamados de Runge-Kutta de baixa armazenagem (Low-Storage Runge Kutta), necessitam armazenar 2, 3 e 4 vezes o número de pontos da malha por variável, respectivamente.

No presente código computacional, de modo a equilibrarmos precisão e tempo de simulação, foi utilizado o esquema de baixa armazenagem de terceira ordem definido por

$$\frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{\Delta t} = \alpha_p \vec{F}(\vec{u}_{p-1}) + \beta_p \vec{F}(\vec{u}_{p-2}), \quad (3)$$

onde $p = 1, 2, 3$ e os coeficientes α_p e β_p , dados por [Williamson \(1980\)](#), são:

$$\alpha_1 = \frac{8}{15}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{12}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{4}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -\frac{17}{60} \quad e \quad \beta_3 = -\frac{5}{12}$$

Segundo [Lele \(1992\)](#), estabelece-se uma condição de estabilidade de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) para o esquema utilizado, definindo-se o passo de tempo computacional máximo, Δt_{rk} , pela equação:

$$\Delta t_{rk} = \frac{\sqrt{3}\Delta_x}{1,989U_\infty}. \quad (4)$$

Para que se possa simular um obstáculo imerso no fluido em escoamento o código utiliza o Método de Fronteiras Imersas originalmente proposto por [Goldstein et al. \(1993\)](#). Neste, um campo de forças externo, $\vec{f}(\vec{x}_s, t)$, acrescentado às equações de conservação da quantidade de movimento, modela a presença do obstáculo imerso no escoamento. Estas forças são definidas sobre um conjunto de pontos de coordenadas \vec{x}_s que compõem a fronteira do cilindro, na forma

$$\vec{f}(\vec{x}_s, t) = \alpha \int_0^t \vec{u}(\vec{x}_s, t) dt + \beta \vec{u}(\vec{x}_s, t),$$

onde α e β são constantes negativas com dimensões $\frac{1}{T^2}$ e $\frac{1}{T}$ respectivamente. Esta formulação permite obter $\vec{u} = \vec{0}$ no contorno imerso se $|\alpha|$ e $|\beta|$ são suficientemente grandes.

Para garantir certa estabilidade, tal método acaba por induzir uma nova restrição no passo de tempo de integração, dada por

$$\Delta t_{fv} < \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha}}{\alpha} \sqrt{3}. \quad (5)$$

Uma descrição mais detalhada destes métodos pode ser encontrada em [Silvestrini e Lamballais \(2002\)](#).

De modo a analisarmos o desprendimento de vórtices em cilindros oscilantes, deve ser associada ao cilindro uma frequência forçada de oscilação. Assim, o deslocamento transversal do cilindro e a velocidade inicial do mesmo, são dados por,

$$y_c = A \sin(2\pi ft) + y_0,$$

$$V_0 = 2\pi A f \cos(2\pi ft),$$

onde A é a amplitude de oscilação do cilindro, f a frequência de oscilação do cilindro, t é o tempo e y_0 é a posição inicial do cilindro. É também importante levarmos em consideração a frequência de desprendimento de vórtices do cilindro estacionário, denominada f_s , de forma que se possa relacioná-la com a frequência de oscilação do cilindro verificando a sincronização.

3 RESULTADOS

3.1 Influência dos Parâmetros α e β no Método de Fronteiras Imersas

Como mencionado anteriormente, os parâmetros α e β do método de fronteiras imersas estão diretamente ligados à modelagem das forças que simulam o cilindro imerso e à definição do passo de tempo de integração Δt_{fv} . Assim sendo, tanto melhor forem ajustados estes parâmetros, o cilindro modelado será mais capaz de simular um cilindro sólido real, onde a velocidade do escoamento no ponto de encontro com o mesmo é igual a zero. Entretanto, para tal ajuste, deve-se também observar como se mostrará a restrição ao passo de tempo, que é de fundamental importância no tempo total de execução das simulações.

Dessa forma, com o objetivo de diminuir a velocidade do escoamento na superfície do cilindro (aproximando-a ao máximo de zero como em um escoamento real), sem influenciar muito no decaimento do intervalo de tempo Δt_{fv} , foram realizadas algumas simulações com cilindro estacionário, variando-se os parâmetros α e β . Para diversas combinações, foram analisadas as curvas da flutuação da velocidade na superfície do cilindro juntamente com a variação de Δt_{fv} , tentando assim verificar um certo grau de equilíbrio e estabilidade de modo que a velocidade rms decaísse rapidamente sem que Δt_{fv} ficasse muito menor que Δt_{rk} , implicando assim num maior tempo de duração das simulações numéricas.

Na figura 1 é apresentado o gráfico das curvas com seus respectivos Δt_{fv} e combinações de α e β . Pode-se perceber que quanto mais rápido se dá o decaimento da curva, mais rápido é o tempo de resposta do sistema dinâmico, tornando mais precisos os cálculos para a obtenção dos resultados. De modo conclusivo, verificou-se que o parâmetro α exerce grande influência

na queda de velocidade rms na superfície do cilindro, sem afetar muito Δt_{fv} . Este se mostra bastante sensível com a variação do parâmetro β , que não tem muita influência no decaimento da curva.

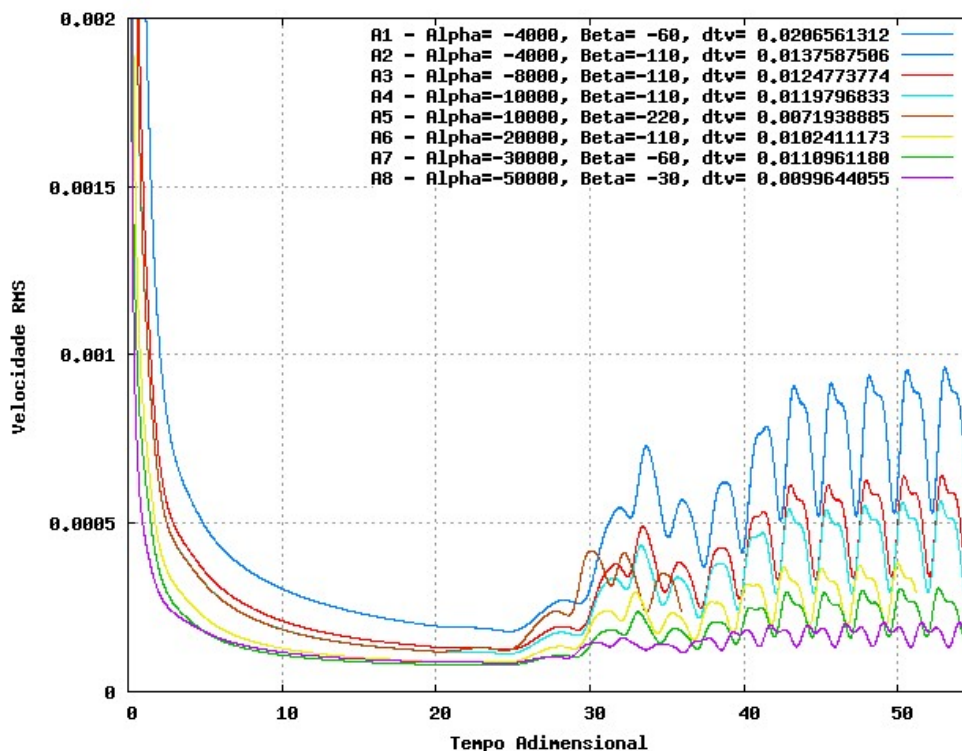


Figura 1: Evolução temporal da flutuação da velocidade sobre a superfície do cilindro

Se analisarmos as duas curvas mais distintas, azul marinho e roxa (testes A1 e A8 respectivamente), verificamos que a queda de velocidade se dá até 5 vezes mais rápida na segunda, assim como a amplitude de oscilação da velocidade após a estabilização, que também decai para em torno de 1/5. Assim, fica claro que ao utilizarmos a combinação dos parâmetros $\alpha=-50000$ e $\beta=-30$, apesar de um leve aumento no tempo de execução das simulações, estas apresentam resultados muito mais próximos de escoamentos reais, onde a velocidade no ponto de encontro entre cilindro e escoamento é igual a zero.

3.2 Simulações com Cilindro Oscilante

Com o desenvolvimento de estudos do desprendimento de vórtices de cilindros oscilantes, foi descoberta uma maneira de se estabelecer certo controle sobre a frequência com que os vórtices eram desprendidos. Após diversas experiências e simulações para variadas combinações da frequência e da amplitude de oscilação, determinaram-se zonas com uma característica bastante peculiar: a sincronização da frequência de desprendimento com a frequência de oscilação do cilindro (Meneghini e Bearman, 1995).

Quando o escoamento se encontra em sincronização, sua frequência de oscilação faz com que o desprendimento de vórtices (antes determinado de acordo com f_s estacionário) adote o mesmo período de tal oscilação. Dessa forma, pode-se induzir determinadas frequências para o desprendimento de vórtices, variando a frequência de oscilação do cilindro, desde que sua

combinação com a amplitude o localizem dentro da região de Lock-in. A figura 2 mostra as chamadas fronteiras de Lock-in primário, para $A/D < 0.45$ e $0.75 < f/f_s < 1.05$.

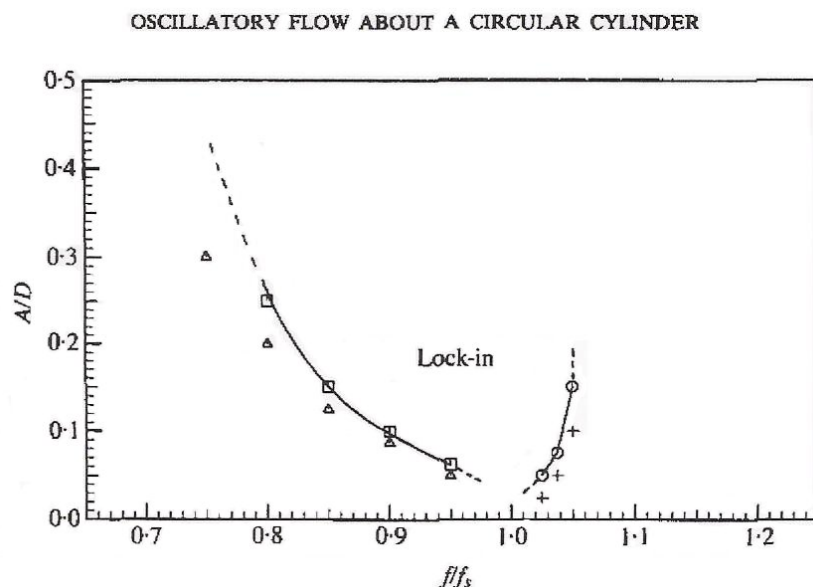


Figura 2: Fronteiras de Lock-in Primário, segundo [Meneghini e Bearman \(1995\)](#)

Para todas as simulações com o cilindro oscilante, $Re = 300$, e a frequência de strouhal utilizada, $f_s = 0.2$, foi determinada em testes anteriores, onde se analisou o período do sinal do coeficiente de sustentação de um cilindro estacionário verificando assim a frequência de desprendimento dos vórtices. O domínio computacional foi determinado em simulações anteriores onde observou-se que adotando $Ly = 16D$ e $Lx = 20D$, seria possível minimizar o efeito do confinamento ([Benevenuti, 2006](#)). Além disso, foi escolhida uma resolução $D = 32\Delta$, onde Δ é o espaçamento uniforme da malha cartesiana. Assim, foi realizada uma série de simulações, onde foi mantida fixa a amplitude, variando-se apenas a frequência de oscilação do cilindro. Desta maneira, pode-se analisar os efeitos de tais variações no arrasto médio, no desvio padrão do coeficiente de sustentação e no comprimento de formação dos vórtices. Os resultados obtidos foram comparados essencialmente com [Meneghini \(2002\)](#), onde testes semelhantes foram realizados utilizando o métodos de vórtices.

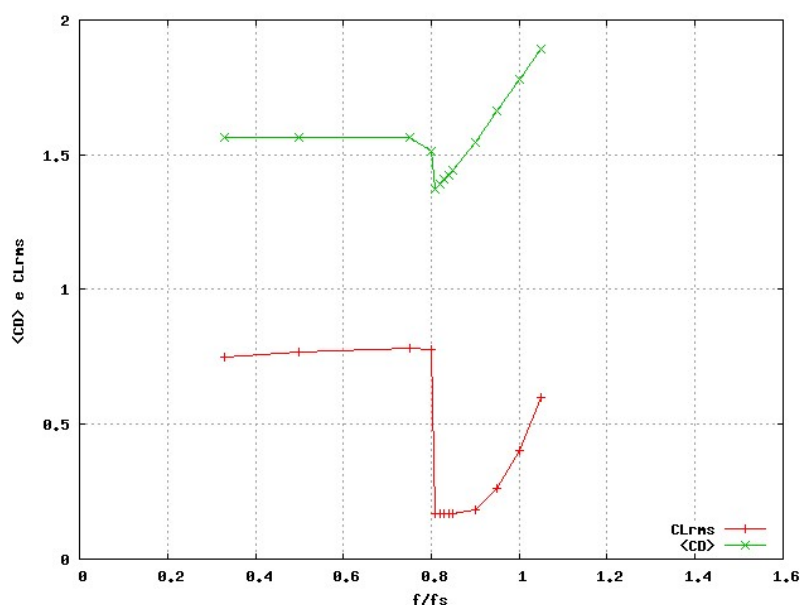
Para uma amplitude de oscilação igual a $0.22D$, a frequência de oscilação do cilindro foi sendo aumentada de maneira que pudessem ser obtidos resultados abrangendo tanto a passagem pela fronteira de sincronização como a região envolvida pelas bordas da mesma, ou seja, a própria região onde ocorre a sincronização. Para isso, foram simulados casos com $f/f_s = 0.33, 0.5, 0.75, 0.80, 0.81, 0.82, 0.83, 0.84, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00$ e 1.05 . Na tabela 1 encontram-se sumarizados todos os testes realizados com seus respectivos parâmetros e dados principais.

De acordo com a figura 2, para uma amplitude de $0.22D$, verifica-se que a entrada na região de lock-in se dá quando a relação entre as frequências ultrapassa 0.81 , apresentando a partir daí um desprendimento de vórtices sincronizado com a oscilação imposta. O teste simulado para esta mesma frequência (figura 4) demonstra que após um período inicial apresentando um comportamento de batimento, o escoamento entra em sincronização desprendendo seus vórtices na mesma frequência que a excitada ao cilindro. O mesmo não ocorreu para $f/f_s = 0.80$ (figura 4). Isto demonstra que para esta amplitude, a borda da fronteira de lock-in encontrada se posiciona assim como visto na figura 2.

Simulações	f	f/f_s	A	$\langle C_D \rangle$	$C_{L_{rms}}$
B1	0.066	0.33	0.22	1.5665	0.7500
B2	0.1	0.5	0.22	1.5634	0.7667
B3	0.15	0.75	0.22	1.5649	0.7816
B4	0.16	0.80	0.22	1.5109	0.7778
B5	0.162	0.81	0.22	1.3718	0.1696
B6	0.164	0.82	0.22	1.3898	0.1694
B7	0.166	0.83	0.22	1.4076	0.1688
B8	0.168	0.84	0.22	1.4244	0.1678
B9	0.17	0.85	0.22	1.4428	0.1669
B10	0.18	0.90	0.22	1.5457	0.1827
B11	0.19	0.95	0.22	1.6606	0.2605
B12	0.20	1.00	0.22	1.7791	0.4014
B13	0.21	1.05	0.22	1.8936	0.5996

Tabela 1: Sumário dos testes realizados

Pode-se observar na tabela 1 os valores referentes ao coeficiente de arraste médio, $\langle C_D \rangle$, de todas as simulações realizadas. Nota-se que, logo que o escoamento atravessa a fronteira de lock-in e entra em sincronização ($f/f_s=0.81$), obtém-se o menor valor para $\langle C_D \rangle$. A seguir, a medida que a frequência de oscilação aumenta, o $\langle C_D \rangle$ também aumenta linearmente, conforme pode ser observado na figura 3. Apesar dos valores obtidos estarem um pouco acima dos encontrados na bibliografia, podemos perceber que o comportamento do coeficiente de arraste médio das simulações se apresenta de acordo com a tendência esperada.

Figura 3: Valores de $\langle C_D \rangle$ e $C_{L_{rms}}$ para $A/D=0.22$ e diferentes valores de f/f_s

Nesta mesma figura (3), pode-se verificar o comportamento do $C_{L_{rms}}$. Este demonstra de forma clara a entrada na região de sincronização ao ultrapassarmos a frequência de 0.81, onde verifica-se uma queda brusca no $C_{L_{rms}}$. Como neste trabalho foi dada uma maior ênfase na

passagem pela fronteira, onde se observou um comportamento quase constante para o $C_{L_{rms}}$ nas frequências próximas à borda esquerda (ver tabela 1), não é possível efetuar uma comparação precisa com a bibliografia. Entretanto, a seguir, à medida que a frequência de oscilação do cilindro é aumentada, nota-se a partir da frequência de 0.90 que o valor do $C_{L_{rms}}$ cresce rapidamente. Apesar de não apresentar um comportamento linear como visto anteriormente para o $\langle C_D \rangle$, estes resultados se apresentam em conformidade com os obtidos na literatura. Para uma melhor análise da borda direita da fronteira de lock-in novos testes estão sendo realizados e serão publicados assim que possível.

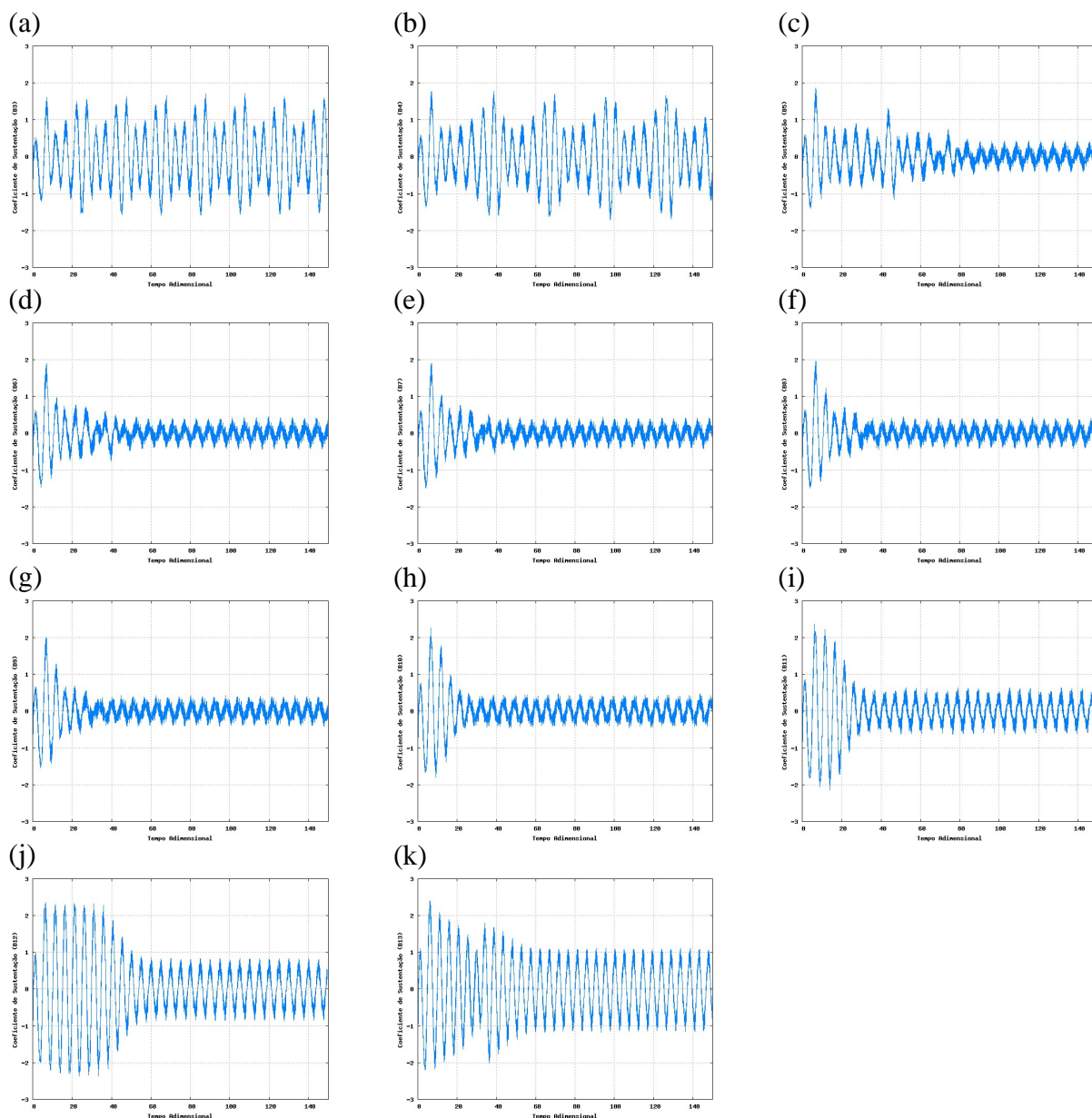


Figura 4: Serie temporal do Coeficiente de Sustentação para (a) $f/f_s = 0.75$, (b) $f/f_s = 0.80$, (c) $f/f_s = 0.81$, (d) $f/f_s = 0.82$, (e) $f/f_s = 0.83$, (f) $f/f_s = 0.84$, (g) $f/f_s = 0.85$, (h) $f/f_s = 0.90$, (i) $f/f_s = 0.95$, (j) $f/f_s = 1.00$, (k) $f/f_s = 1.05$.

Nos experimentos de [Meneghini \(2002\)](#) e [Meneghini e Bearman \(1995\)](#), foi observado que quando o escoamento encontra-se dentro da região de lock-in, à medida que nos aproximamos da frequência de desprendimento de um cilindro estacionário (f_s), são necessários mais ciclos para que a geração dos vórtices se sincronize com a frequência de oscilação do cilindro. Entretanto, de acordo com a figura 4, observa-se que para a simulação onde f/f_s é igual a 0.81, que é a primeira a apresentar sincronização, o número de ciclos para que ocorra sincronização é igual a 17, ou seja, mesmo estando distante da frequência f_s , onde se passam 12 ciclos até a sincronização, são necessários um número ainda maior de ciclos para que esta apresente sincronização. Este fato pode talvez estar relacionado com a proximidade da fronteira de lock-in. Conforme já colocado em [Meneghini \(2002\)](#), a proximidade da fronteira de sincronização pode levar o escoamento a apresentar características randômicas e caóticas. Assim, é possível que este escoamento, apesar de já apresentar sincronização, mesmo após um 'longo' período de instabilidade, se mostre ainda vulnerável à estes comportamentos caóticos, tornando mais demorada sua sincronização. Apesar disso, se analisarmos o sinal do coeficiente de sustentação das outras simulações (figura 4), podemos claramente concluir que quando o escoamento encontra-se ainda próximo à fronteira, ele passa por um período inicial de batimento mais longo, demorando assim mais ciclos para que ocorra a sincronização. Logo, de acordo com estes resultados, seria mais correto dizer que à medida que nos aproximamos das bordas da fronteira, o número de ciclos necessários para que o escoamento se estabilize e entre em sincronização aumenta. A tabela 2 mostra a relação das simulações realizadas com o respectivo número de ciclos necessários para que o escoamento se estabilize e entre em sincronização.

Teste	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13
f/f_s	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05
Nº de Ciclos	17	10	9	8	8	5	8	12	13

Tabela 2: Nº de ciclos necessários para que o escoamento entre em sincronização

Nota-se que para os testes com $f/f_s=0.90$, $f/f_s=0.95$ e $f/f_s=1.00$ (figura 4), o padrão observado na bibliografia fica evidente. Já para o teste com $f/f_s=1.05$, são necessários 13 ciclos para que o escoamento entre em sincronização, demonstrando novamente que ao nos aproximarmos das bordas este tempo tende a aumentar.

Como pode ser visto na figura 5 e também de acordo com [Meneghini e Bearman \(1995\)](#), fica claro que o comprimento de formação dos vórtices diminui à medida que a frequência de oscilação aumenta. Para o caso em que $f/f_s=0.80$, o escoamento ainda não se encontra em sincronização e os vórtices ainda se mostram próximos. Já para o caso onde $f/f_s=0.85$, o escoamento já apresenta sincronização e um maior espaçamento entre vórtices é notável. À medida que aumentamos a frequência, o distanciamento entre vórtices vai diminuindo. Isso pode ser explicado pelo fato de que, ao encontrar-se em sincronização, o escoamento passa a desprender seus vórtices de acordo com a frequência de oscilação do cilindro, assim, para uma maior frequência, obtemos um menor período. Dessa forma, o período entre o desprendimento de cada vórtice se torna menor, apresentando assim um menor comprimento de formação.

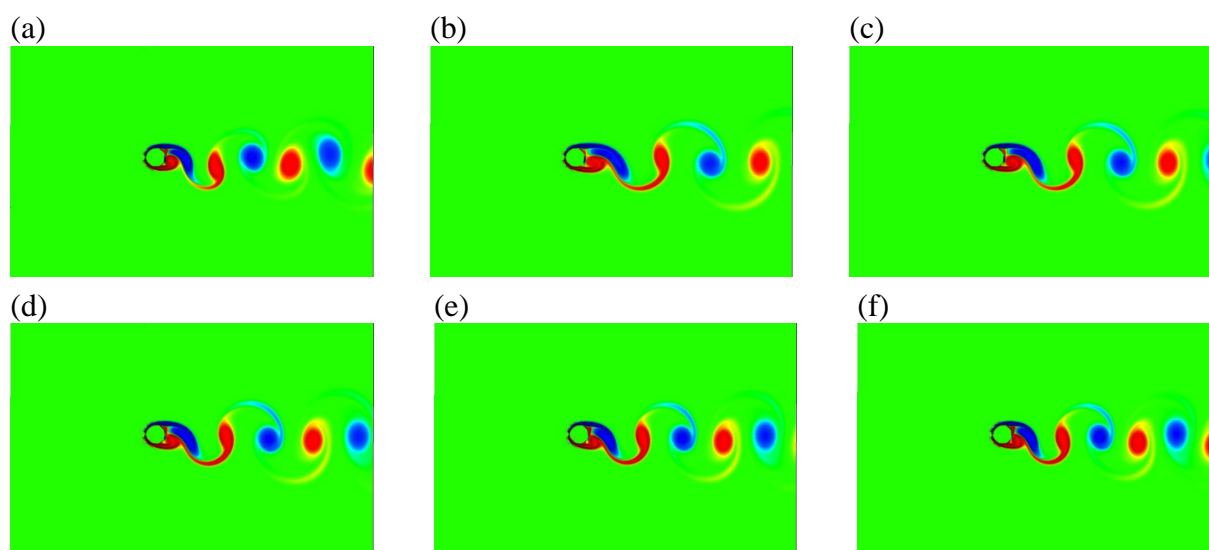


Figura 5: Estrutura da esteira para (a) $f/f_s=0.80$, (b) $f/f_s=0.85$, (c) $f/f_s=0.90$, (d) $f/f_s=0.95$, (e) $f/f_s=1.00$, (f) $f/f_s=1.05$.

4 CONCLUSÃO

Após realizadas as simulações e analisados os resultados obtidos, verificou-se que o método de fronteiras virtuais conseguiu reproduzir qualitativa e quantitativamente os principais resultados obtidos na literatura, abrindo desta forma um campo de aplicação ainda maior aos escoamentos sobre superfícies móveis.

REFERÊNCIAS

- L. B. Benevenuti. “Simulação numérica do desprendimento de vórtices de obstáculos em movimento”. Relatório final de iniciação científica BPA, PUCRS, 2006.
- D. Goldstein, R. Handler, e L. Sirovich. “Modeling a no-slip boundary condition with an external force field”. *J. Comp. Phys.*, **5**:354–366, 1993.
- S. Lardeau, E. Lamballais, e J. P. Bonnet. “Direct numerical simulation of a jet controlled by fluid injection”. *J. of Turbulence*, **3 (002)**, 2002.
- S. K. Lele. “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution”. *J. Comp. Phys.*, **103**:16–42, 1992.
- J. R. Meneghini. “Mecânica da geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros”. *III Escola de Primavera em Transição e Turbulência*, pages 217–339, 2002.
- J. R. Meneghini e P. W. Bearman. “Numerical simulation of high amplitude oscillatory flow about a circular cylinder”. *Journal of Fluids and Structures*, **09**:435–455, 1995.
- J. H. Silvestrini e E. Lamballais. “Documentação do código computacional INCOMPACT3D”. Documentação de código, PUCRS, 2001.
- J. H. Silvestrini e E. Lamballais. “Direct numerical simulation of interactions between a mixing layer and a wake around a cylinder”. *J. of Turbulence*, **3 (028)**, 2002.
- C. H. K. Williamson e R. Govardhan. “Vortex-Induced Vibrations”. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **36**:413–455, 2004.
- J. H. Williamson. “Low-storage runge-kutta schemes”. *J. Comp. Phys.*, **35**:48, 1980.