

VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS RECTANGULARES ANISÓTROPAS EMPOTRADAS QUE SOPORTAN UNA MASA CONCENTRADA

P.M. Ciancio¹ y C.A. Rossit²

¹ Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Bs. As.
Avda del Valle 5737 – (7400) – Olavarría - Argentina
Estudiante de Posgrado – Dpto. de Ingeniería – Universidad Nacional del Sur (UNS) –

² Dpto. de Ingeniería - Instituto de Mecánica Aplicada — UNS –
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

pciancio@fio.unicen.edu.ar, carossit@criba.edu.ar

Palabras clave: Placas anisótropas - Masas adosadas – Vibración placas empotradas.

Resumen: *Es un hecho conocido en la teoría de vibraciones mecánicas que la presencia de masas adosadas altera las frecuencias naturales de vibración de elementos estructurales, así como sus modos normales.*

El estudio dinámico de placas que soportan masas ha sido tratado anteriormente por diversos autores y pueden hallarse en la literatura numerosos trabajos relacionados con el tema.

Sin embargo, en la gran mayoría de los casos se trata de placas de material isótropo. Cuando el material de la placa tiene características anisótropas el número de contribuciones se reduce notablemente.

En el presente trabajo, se estudia el efecto de una masa adosada sobre el comportamiento dinámico de una placa rectangular anisótropa con sus bordes empotrados.

En su solución, se utiliza el método variacional de Rayleigh-Ritz, aproximando la deformación de la placa con conjuntos coordinados de funciones viga que cumplen las condiciones de borde de lados opuestos de la placa.

Se determinan frecuencias naturales y modos de vibración para diversas posiciones y magnitudes de la masa ante una configuración determinada del material anisótropo.

El procedimiento propuesto, se constituye en una herramienta útil para abordar un problema de gran complejidad analítica.

1. INTRODUCCIÓN

En el diseño racional de un elemento estructural, el ingeniero de diseño necesita conocer, imperiosamente, los parámetros esenciales que definen el comportamiento dinámico de una estructura. En un enorme porcentaje de casos vigas y placas o losas soportan máquinas o motores que ejercen esfuerzos dinámicos actuando a frecuencias a prima facie conocidos. Por otra parte son los esfuerzos dinámicos aplicados transversalmente al elemento estructural los que poseen mayor influencia en el comportamiento dinámico del sistema acoplado estructura – máquina ya que los componentes de los esfuerzos que actúan según los ejes o planos medios del elemento estructural no producirán, en primera instancia, situaciones de cuidado en virtud de que los modos normales correspondientes a deformaciones axiales o en el plano, corresponden a frecuencias mucho más elevadas que las que corresponden a modos normales de vibración en correspondencia con el comportamiento transversal.

La importancia del tema se ve reflejada en la creciente cantidad de contribuciones sobre el particular en la literatura técnico – científica.

No obstante, son escasos los trabajos que contemplan situaciones de ortotropía o anisotropía en la estructura vibrante^{1,2,3}.

En un trabajo que puede considerarse antecedente del presente, se atacó el caso de placas anisótropas simplemente apoyadas⁴.

En el presente trabajo, se analiza el comportamiento dinámico de una placa rectangular anisótropa empotrada en su contorno, cuando sobre la misma y en distintas posesiones, se halla adosada una masa.

En virtud de la complejidad del sistema gobernante del problema, se recurre al método variacional de Rayleigh – Ritz aproximando la deflexión de la placa con conjuntos de funciones viga⁵ (“beam functions”) que sirven como condiciones de borde, a las de la placa en estudio en lados opuestos según cada dirección coordenada.

Se determinan coeficientes de frecuencias naturales de vibración así como sus correspondientes modos normales.

2. DESARROLLO

Cuando la placa delgada de espesor uniforme h efectúa uno de sus modos normales de vibración, a una frecuencia natural circular ω :

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (1)$$

La funcional de energía que gobierna el problema es:

$$J[W] = U_{max} - T_{max} \quad (2)$$

donde:

U_{max} : energía de deformación máxima de la placa anisótropa y

T_{max} : energía cinética máxima total del sistema que incluye a la energía cinética máxima de la placa anisótropa y la energía cinética máxima de la masa concentrada.

Las expresiones de las componentes de la funcional de energía, siguiendo para el dominio anisótropo la clásica notación de Lekhnitskii⁶ son:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \iint_A \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2.D_{12} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4.D_{66} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{26} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (3)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \iint_A W^2 dx dy + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot [W(x_m, y_m)]^2 \quad (4)$$

donde A es el área de la placa anisótropa, D_{ij} son los coeficientes de rigidez de la parte anisótropa; ρ el valor de densidad de masa de la placa y m es la magnitud de la masa puntual. En el segundo término de la expresión (4): x_m, y_m indican la posición de la masa concentrada rígidamente adosada, de la cual se ha tenido en cuenta únicamente su inercia traslatoria.

La función desplazamiento de la placa es aproximada por la siguiente expresión :

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{nm} X_m(x) Y_n(y) \quad (5)$$

donde $X_m(x)$ y $Y_n(y)$ representan las funciones coordenadas empleadas en la aproximación de la amplitud del desplazamiento transversal de la placa.

Como funciones coordenadas se adoptan las formas modales de vibración natural de una viga Bernoulli-Euler empotrada en sus extremos; lo que permite satisfacer las condiciones de borde de la placa.

En consecuencia:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \text{Cosh}(k_m x) - \text{Cos}(k_m x) - \alpha_m \text{Senh}(k_m x) + \alpha_m \text{Sen}(k_m x) \\ Y_n(y) &= \text{Cosh}(k_n y) - \text{Cos}(k_n y) - \alpha_n \text{Senh}(k_n y) + \alpha_n \text{Sen}(k_n y) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde

$$\alpha_m = \frac{\text{Cos}(k_m) - \text{Cosh}(k_m)}{\text{Sen}(k_m) - \text{Senh}(k_m)} \quad \alpha_n = \frac{\text{Cos}(k_n) - \text{Cosh}(k_n)}{\text{Sen}(k_n) - \text{Senh}(k_n)} \quad (7)$$

Los autovalores de las funciones son las raíces de siguiente ecuación trascendente característica:

$$\text{Cos}(k) \text{Cosh}(k) = 1 \quad (8)$$

En la Tabla 1 se presentan los primeros diez autovalores correspondientes a una viga empotrada-empotrada cuya sección es constante en toda su longitud.

Tabla 1. Autovalores de una viga con bordes empotrado-empotrado

k_1	4.730040	k_6	20.420352
k_2	7.853204	k_7	23.561944
k_3	10.995607	k_8	26.703537
k_4	14.137165	k_9	29.845130
k_5	17.278759	k_{10}	32.986722

Reemplazando la expresión aproximada de la deflexión en la funcional de energía (2) según sus componentes (3) y (4) y de acuerdo con el método de Rayleigh – Ritz, requiriendo su minimización:

$$\frac{\partial J[W_a]}{\partial b_{mn}} = 0 \quad , \quad m = 1, 2, \dots, M \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneas en las constantes b_{mn} .

Los coeficientes de dicho sistema, forman un determinante – ecuación cuyas raíces son los coeficientes de frecuencias naturales de la placa:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2 \quad (10)$$

donde a es la magnitud del lado de la placa rectangular según la coordenada x .

Obtenidos los coeficientes Ω_i , y a través del sistema de ecuaciones homogéneas que surge de la minimización, es posible determinar las relaciones entre las constantes b_{mn} para cada Ω_i . Resultan conocidas en consecuencia, y a través de la expresión (5), las formas modales asociadas a cada frecuencia⁷.

3. RESULTADOS OBTENIDOS Y COMENTARIOS

En virtud de que el objetivo esencial del trabajo es demostrar la facilidad de utilización del método de Rayleigh – Ritz en la solución de este tipo de problema y teniendo en cuenta la extensa cantidad de variables involucradas en la definición de las características de un material anisótropo, se estima oportuno considerar una única configuración para el material anisótropo que queda definido:

$$\frac{D_{12}}{D_{11}} = \frac{D_{22}}{D_{11}} = \frac{D_{66}}{D_{11}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{D_{16}}{D_{11}} = \frac{D_{26}}{D_{11}} = \frac{1}{3}$$

En las Tablas 2 a 5, se vuelcan los valores de coeficientes de frecuencias naturales obtenidos para la placa anisótropa rectangular, empotrada en su contorno y con una masa rígidamente adosada.

En los cálculos se ha tomado $M=N=10$, por lo que la aproximación (5) consta de 100 términos

La magnitud de la masa queda definida por la relación $M = m/m_p$, donde m_p es la masa total de la placa: $m_p = \rho h a b$ y $\lambda = \frac{a}{b}$ define la relación de lados

Se han considerado distintas magnitudes y posiciones de la masa (x_m, y_m) , así como distintas relaciones de aspecto λ .

Del análisis de los valores volcados surge, como es sabido, que la presencia de una masa adosada rígidamente a una estructura, hace que los valores de sus frecuencias naturales, en general, disminuyan.

En algunos casos, y si no se tiene en cuenta su inercia rotatoria, cuando la masa se encuentra ubicada sobre una línea nodal de la forma modal asociada a una frecuencia dada de la estructura original, dicha frecuencia y su respectiva forma modal permanecen inalteradas, como era de esperar.

Ello hace, que en muchos casos se produzca una alteración en el orden de los valores de las frecuencias naturales de dos formas modales, una de las cuales permanece inalterada⁸.

En efecto, en la Tabla 2, por citar un caso, obsérvese que para la placa cuadrada ($\lambda=1$), el coeficiente de frecuencia $\Omega= 74.3189$, corresponde a la tercer frecuencia natural para pequeñas magnitudes de la masa adosada, y a la cuarta frecuencia para valores mayores de la masa (en la Tabla $M \geq 0.3$)

Obviamente, la incidencia de la masa es más marcada en la frecuencia fundamental en todos los casos, y entre ellos cuando su ubicación es central.

Se han agregado los coeficientes de frecuencia de la placa sin masa con fines comparativos,

TABLA2: Coeficientes de frecuencias naturales $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2$ para una placa anisótropa de relación de lados λ con una masa adosada en su centro ($x_m = 0.5, y_m = 0.5$)

λ	M	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
2/5	0	23.6489	27.3579	33.1605	41.0571	50.5965	62.9677
	0.1	17.6016	27.3579	29.7954	41.0571	46.451	62.9677
	0.3	12.2584	27.3579	29.0104	41.0571	45.4252	62.9677
	0.5	9.92536	27.3579	28.832	41.0571	45.1687	62.9677
	1	7.26812	27.3579	28.6947	41.0571	44.9629	62.9677
1/2	0	24.4633	30.3896	39.4896	51.6208	64.3017	65.7927
	0.1	18.6002	30.3896	34.9242	51.6208	60.1731	64.3017
	0.3	13.2025	30.3896	33.4763	51.6208	58.459	64.3017
	0.5	10.7495	30.3896	33.1156	51.6208	58.0091	64.3017
	1	7.90803	30.3896	32.8303	51.6208	57.6425	64.3017
2/3	0	26.3923	37.2158	53.2779	66.1389	74.6113	79.5119
	0.1	20.3808	37.2158	46.5721	66.1389	74.6113	78.5681
	0.3	14.7687	37.2158	43.7575	66.1389	74.6113	77.8389
	0.5	12.1128	37.2158	42.9704	66.1389	74.6113	77.5638
	1	8.96872	37.2158	42.3214	66.1389	74.6113	77.3051
1	0	32.7694	57.0756	74.3189	88.4977	108.519	126.167
	0.1	25.4649	57.0756	74.3189	78.1057	105.207	120.343
	0.3	18.7106	57.0756	71.8344	74.3189	103.601	117.422
	0.5	15.4379	57.0756	69.8863	74.3189	103.161	116.815
	1	11.4971	57.0756	68.2167	74.3189	102.803	116.366
3/2	0	49.5267	84.4427	114.141	132.518	158.949	189.435
	0.1	38.4117	84.4427	114.141	116.812	155.694	185.028
	0.3	28.1849	84.4427	107.659	114.141	154.253	178.729
	0.5	23.2438	84.4427	104.826	114.141	153.841	177.312
	1	17.3029	84.4427	102.398	114.141	153.497	176.234
2	0	75.2041	109.192	161.911	187.386	226.142	231.942
	0.1	57.9773	109.192	142.133	187.386	224.867	231.942
	0.3	42.1117	109.192	133.244	187.386	224.021	231.942
	0.5	34.5802	109.192	130.676	187.386	223.707	231.942
	1	25.6351	109.192	128.529	187.386	223.408	231.942
5/2	0	109.531	141.66	193.933	264.154	286.491	318.533
	0.1	83.5719	141.66	171.457	264.154	286.491	308.821
	0.3	59.821	141.66	163.243	264.154	286.491	300.615
	0.5	48.8536	141.66	161.067	264.154	286.491	298.066
	1	36.0358	141.66	159.306	264.154	286.491	295.902

TABLA 3: Coeficientes de frecuencias naturales $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2$ para una placa anisótropa de relación de lados λ con una masa adosada en ($x_m = 0.75$; $y_m = 0.5$)

λ	M	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
2/5	0	23.6489	27.3579	33.1605	41.0571	50.5965	62.9677
	0.1	21.2032	27.2581	30.7916	40.2112	45.7998	54.9652
	0.3	16.5938	27.0959	28.9561	38.9567	43.2683	53.695
	0.5	13.8177	26.9956	28.5054	38.4945	42.8623	53.4829
	1	10.3204	26.8791	28.2078	38.1152	42.6097	53.3347
1/2	0	24.4633	30.3896	39.4896	51.6208	64.3017	65.7927
	0.1	22.0683	30.1911	36.2254	48.8258	53.7781	65.4704
	0.3	17.604	29.8093	33.0251	45.6105	52.7341	65.458
	0.5	14.7705	29.5511	32.2142	44.9212	52.6159	65.4555
	1	11.0969	29.2533	31.7066	44.4373	52.5403	65.4536
2/3	0	26.3923	37.2158	53.2779	66.1389	74.6113	79.5119
	0.1	23.8827	36.6658	47.0763	57.8537	71.3674	78.5024
	0.3	19.3564	35.3989	41.1359	56.3498	70.8687	78.3486
	0.5	16.3781	34.5856	39.9487	56.113	70.7639	78.3136
	1	12.3972	33.7733	39.2733	55.9506	70.6847	78.2863
1	0	32.7694	57.0756	74.3189	88.4977	108.519	126.167
	0.1	29.564	52.6537	65.0036	88.0962	96.3279	118.718
	0.3	23.9507	46.6809	61.953	87.6847	92.6423	117.56
	0.5	20.289	44.724	61.4216	87.5056	91.9025	117.32
	1	15.385	43.200	61.0612	87.3282	91.3825	117.139
3/2	0	49.5267	84.4427	114.141	132.518	158.949	189.435
	0.1	44.012	70.433	113.072	122.88	151.245	188.768
	0.3	34.385	63.1987	111.867	119.313	149.054	187.499
	0.5	28.6701	61.4704	111.355	118.544	148.526	186.863
	1	21.4553	60.2182	110.865	117.997	148.112	186.259
2	0	75.2041	109.192	161.911	187.386	226.142	231.942
	0.1	64.9537	92.3001	147.881	187.369	223.554	229.986
	0.3	48.2271	86.7017	143.598	187.364	221.866	229.507
	0.5	39.578	85.6092	142.518	187.362	221.307	229.395
	1	29.2651	84.8396	141.655	187.361	220.809	229.307
5/2	0	109.531	141.66	193.933	264.154	286.491	318.533
	0.1	90.8246	122.938	179.009	260.928	285.865	316.735
	0.3	64.7775	119.301	175.382	259.708	285.614	315.683
	0.5	52.6738	118.656	174.513	259.351	285.538	315.317
	1	38.6896	118.2	173.829	259.047	285.472	314.98

TABLA 4: Coeficientes de frecuencias naturales $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2$ para una placa anisótropa de relación de lados λ con una masa adosada en ($x_m = 0.5$; $y_m = 0.75$)

λ	M	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
2/5	0	23.6489	27.3579	33.1605	41.0571	50.5965	62.9677
	0.1	18.1006	24.913	31.3731	40.640	49.7042	60.2529
	0.3	12.4489	24.7087	31.0919	40.5281	49.3642	59.1412
	0.5	10.0456	24.672	31.0292	40.4985	49.2658	58.8514
	1	7.33633	24.6454	30.9808	40.4741	49.1822	58.6162
1/2	0	24.4633	30.3896	39.4896	51.6208	64.3017	65.7927
	0.1	19.7117	26.7847	36.841	50.9664	64.1093	64.7737
	0.3	13.8378	26.2498	36.2883	50.7583	63.781	64.5496
	0.5	11.215	26.155	36.1595	50.7007	63.6451	64.5157
	1	8.21735	26.0873	36.059	50.6524	63.5193	64.4938
2/3	0	26.3923	37.2158	53.2779	66.1389	74.6113	79.5119
	0.1	22.4983	31.6346	48.8965	66.1376	73.3483	79.1368
	0.3	16.4809	30.0081	47.6771	66.1372	72.7958	79.0004
	0.5	13.4813	29.6989	47.3759	66.137	72.6288	78.9611
	1	9.94491	29.4806	47.1368	66.1369	72.4845	78.9277
1	0	32.7694	57.0756	74.3189	88.4977	108.519	126.167
	0.1	29.169	47.545	73.4954	82.1156	102.231	126.152
	0.3	22.8854	42.4195	72.8418	79.6359	100.434	125.955
	0.5	19.1125	41.1698	72.5997	79.0466	100.007	125.535
	1	14.3207	40.2605	72.3762	78.6006	99.6736	125.133
3/2	0	49.5267	84.4427	114.141	132.518	158.949	189.435
	0.1	44.7556	78.621	98.0057	132.088	142.897	179.158
	0.3	36.3055	70.1275	92.2446	131.71	138.369	176.955
	0.5	30.7611	67.2298	91.2603	131.554	137.43	176.469
	1	23.3252	64.9612	90.6063	131.402	136.752	176.097
2	0	75.2041	109.192	161.911	187.386	226.142	231.942
	0.1	68.0764	106.57	140.787	168.500	212.483	228.998
	0.3	55.230	101.45	122.955	166.689	209.513	228.872
	0.5	46.7615	98.7606	119.51	166.409	208.875	228.847
	1	35.4188	96.2897	117.428	166.215	208.391	228.828
5/2	0	109.531	141.66	193.933	264.154	286.491	318.533
	0.1	98.9072	139.728	177.927	229.9	264.658	312.333
	0.3	79.3975	136.565	159.92	214.903	264.562	311.286
	0.5	66.8392	134.826	155.266	212.431	264.547	311.047
	1	50.3615	133.059	152.212	210.778	264.536	310.861

TABLA 5: Coeficientes de frecuencias naturales $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2$ para una placa anisótropa de relación de lados λ con una masa adosada en ($x_m = 0.75$; $y_m = 0.75$)

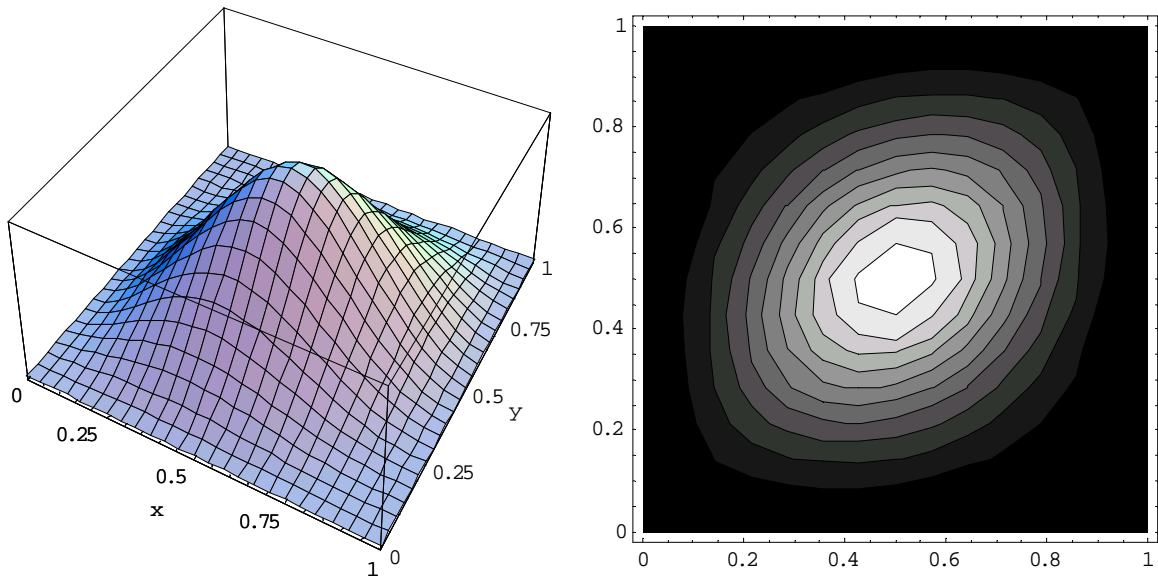
λ	M	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
2/5	0	23.6489	27.3579	33.1605	41.0571	50.5965	62.9677
	0.1	21.6391	25.5649	32.2271	41.042	44.8775	54.0367
	0.3	16.7109	24.9069	31.5694	40.2934	41.1466	52.9558
	0.5	13.8377	24.7898	31.3589	39.3065	41.0962	52.7908
	1	10.2925	24.7094	31.181	38.5677	41.0843	52.6775
1/2		24.4633	30.3896	39.4896	51.6208	64.3017	65.7927
	0.1	22.7042	28.0617	38.2064	49.8103	52.1553	65.0474
	0.3	18.0275	26.6579	36.8469	45.0826	51.7898	65.0265
	0.5	15.0202	26.3731	36.3638	44.1409	51.7682	65.0223
	1	11.2148	26.181	35.9576	43.5082	51.7552	65.0192
2/3	0	26.3923	37.2158	53.2779	66.1389	74.6113	79.5119
	0.1	24.7385	34.0137	50.5833	56.3661	72.1052	74.6125
	0.3	20.3823	30.9054	46.1457	54.6932	71.2019	74.6122
	0.5	17.1815	30.0993	45.0205	54.5144	71.0279	74.6122
	1	12.9214	29.5559	44.2117	54.4032	70.8998	74.6122
1	0	32.7694	57.0756	74.3189	88.4977	108.519	126.167
	0.1	30.8426	52.1379	62.9508	87.5984	95.9094	122.133
	0.3	26.1983	43.6191	60.2491	86.8885	92.8407	120.642
	0.5	22.4456	41.137	59.8832	86.6447	92.2658	120.321
	1	17.0793	39.4593	59.6471	86.4303	91.8638	120.078
3/2	0	49.5267	84.4427	114.141	132.518	158.949	189.435
	0.1	46.5257	77.7958	95.3104	131.64	142.222	185.367
	0.3	39.3984	65.876	90.0425	130.982	138.298	182.699
	0.5	33.7206	62.256	89.3194	130.751	137.537	182.051
	1	25.6464	59.7773	88.8589	130.544	136.996	181.546
2	0	75.2041	109.192	161.911	187.386	226.142	231.942
	0.1	70.3403	100.426	148.883	164.338	206.153	231.897
	0.3	58.2322	90.7329	133.012	163.288	203.517	231.895
	0.5	49.2516	87.9518	129.677	163.171	202.997	231.894
	1	37.1361	86.0209	127.372	163.095	202.611	231.894
5/2	0	109.531	141.66	193.933	264.154	286.491	318.533
	0.1	101.76	130.949	187.65	226.51	266.815	298.451
	0.3	81.905	122.926	177.417	208.151	266.266	297.193
	0.5	68.5559	121.047	173.711	205.5	266.179	296.954
	1	51.3448	119.754	170.758	203.886	266.119	296.779

FORMAS MODALES

En las Figuras 1 y 2 se presentan las formas modales de dos placas cuadradas para dos posiciones distintas de una masa de magnitud: $M=0.5$.

Las posiciones consideradas son: central ($x_m=y_m=0.5$) y sobre la diagonal ($x_m=y_m=0.75$)

En el caso de la posición central de la masa, Figura 1, se observa el efecto de la anisotropía de material en la inexistencia de simetría en las formas modales.



Primer modo $\Omega_1=15.4379$

Figura 1: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M=0.5$ adosada en su centro

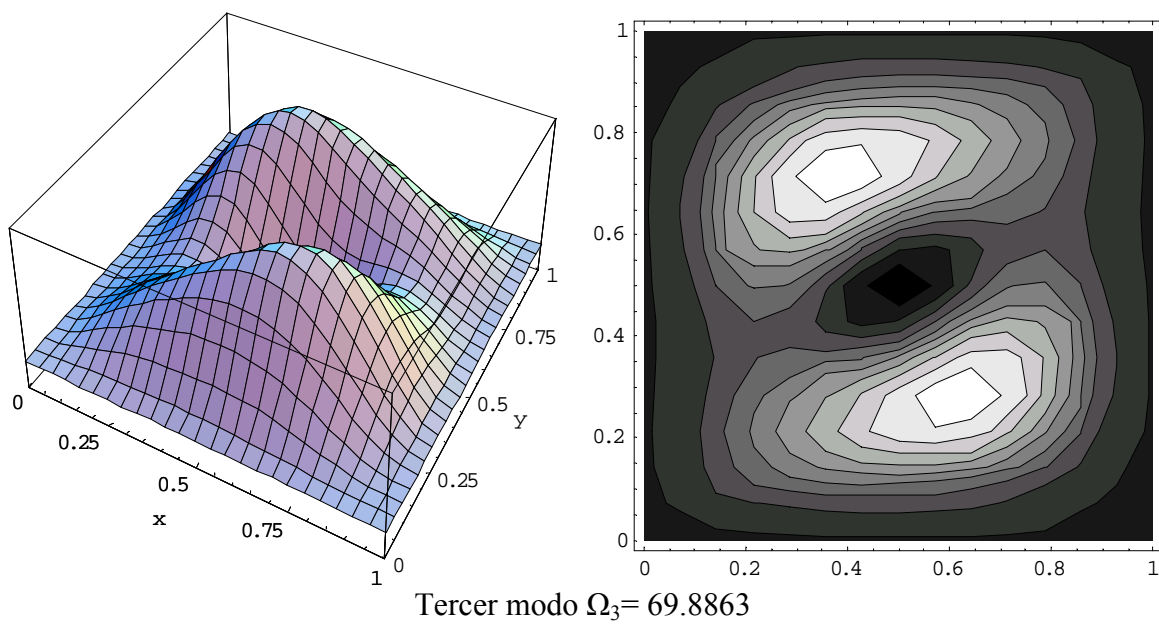
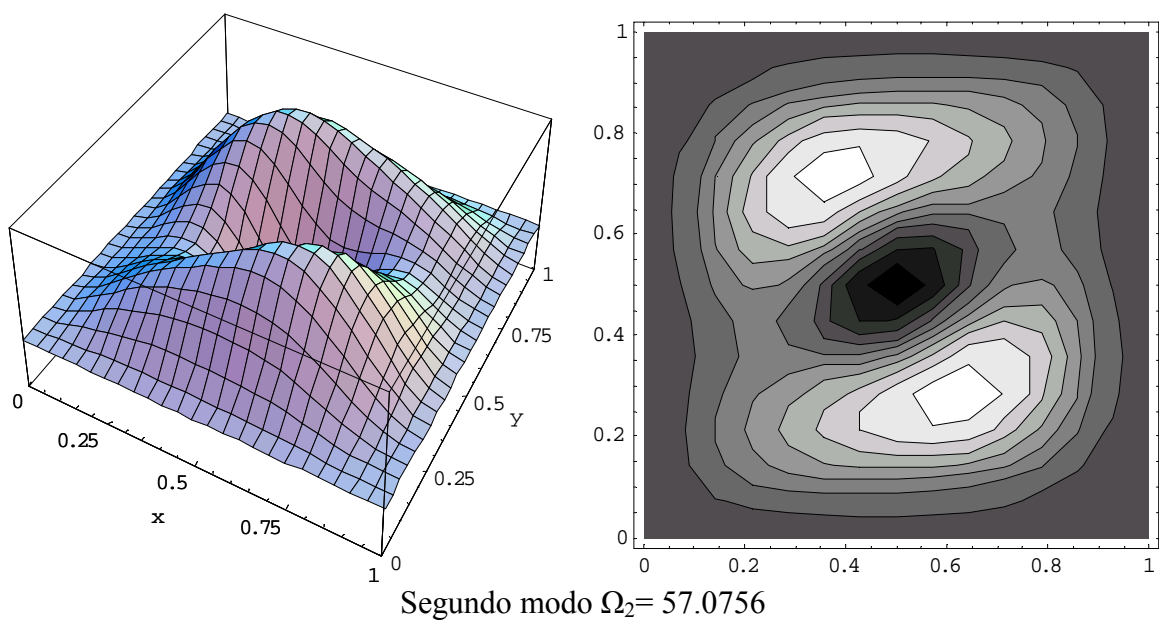
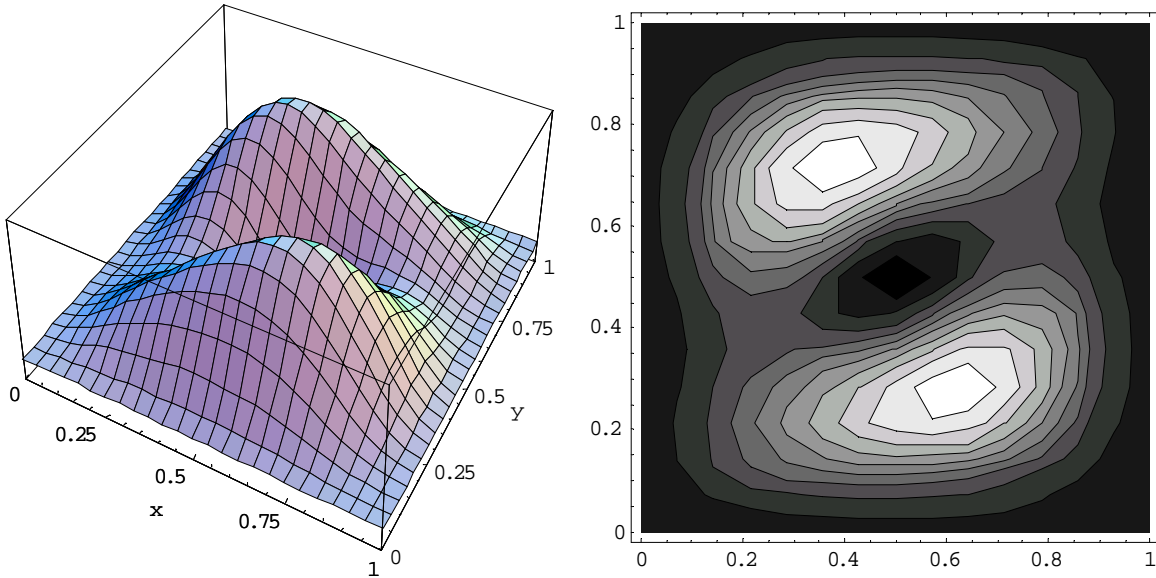
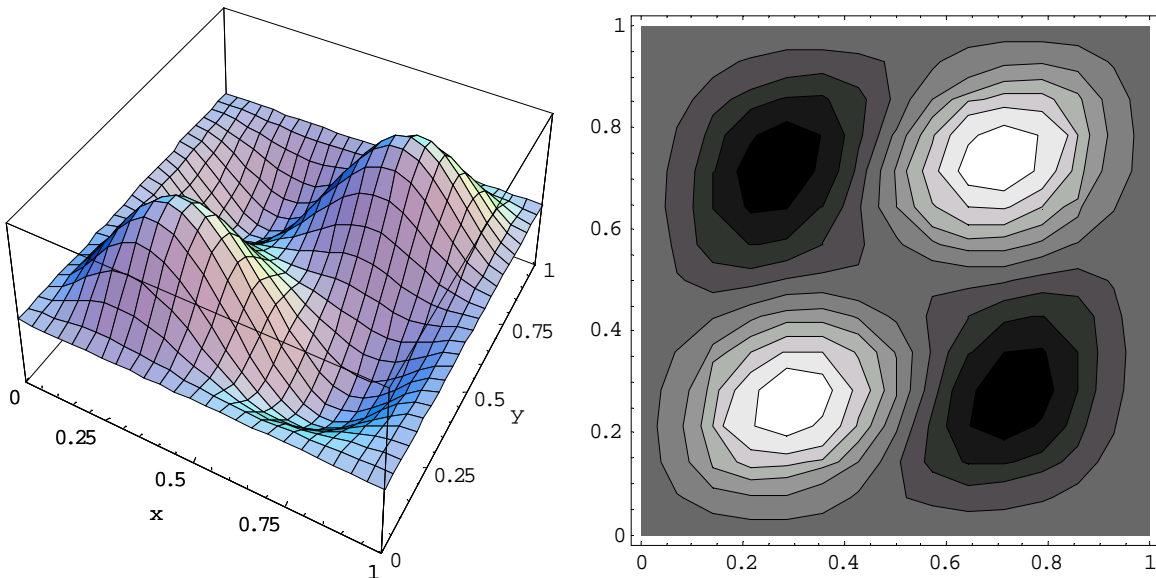


Figura 1: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M = 0.5$ adosada en su centro (Cont.)



Cuarto modo $\Omega_4 = 74.3189$



Quinto modo $\Omega_5 = 103.161$

Figura 1: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M = 0.5$ adosada en su centro (Cont.)

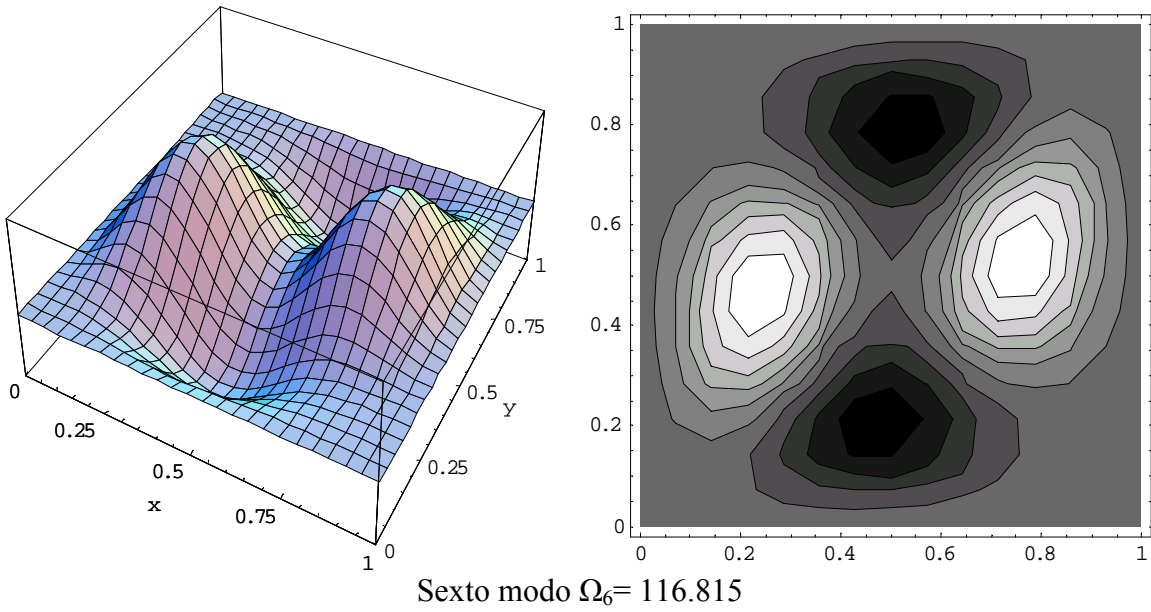


Figura 1: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M = 0.5$ adosada en su centro (Cont.)

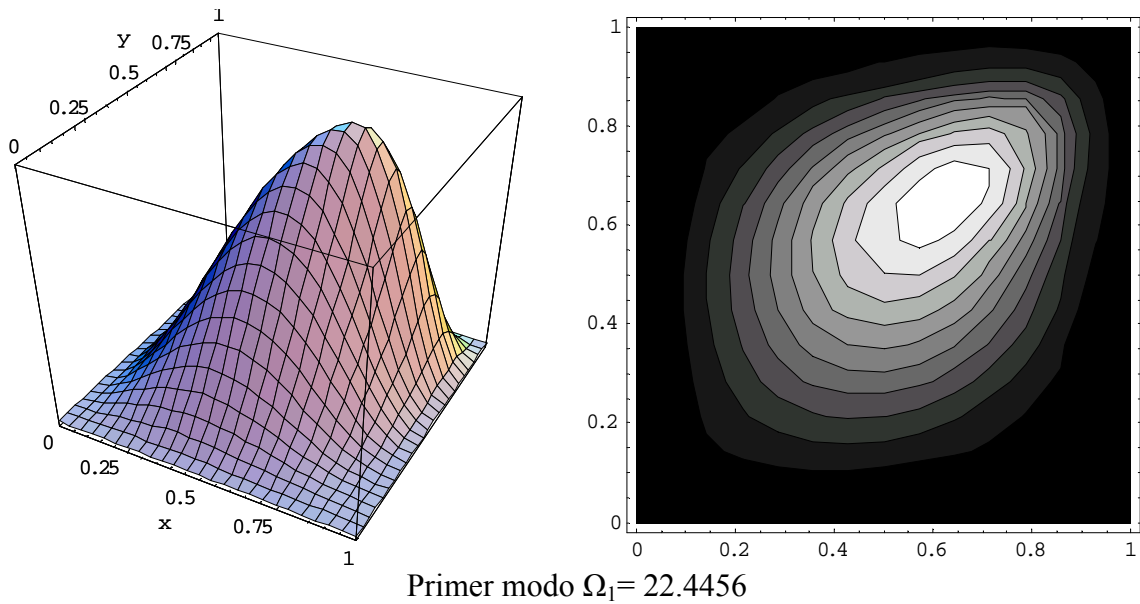
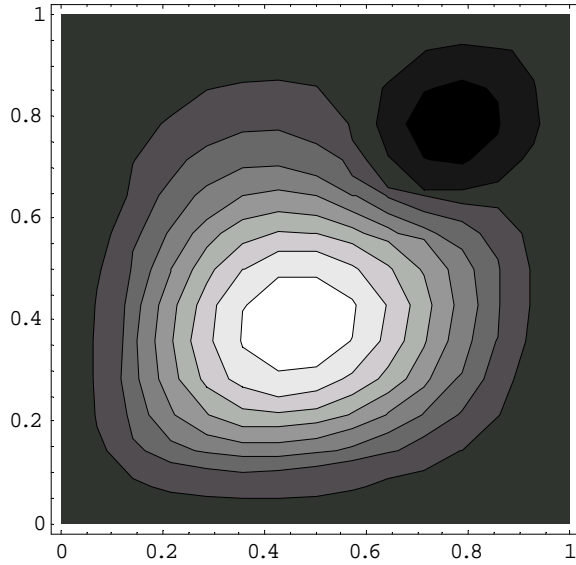
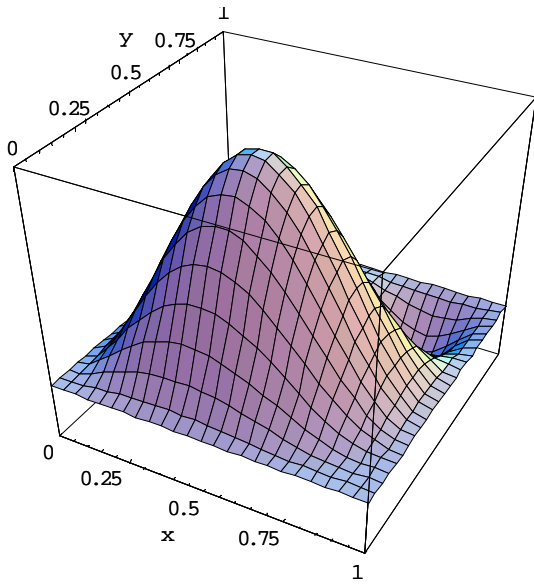
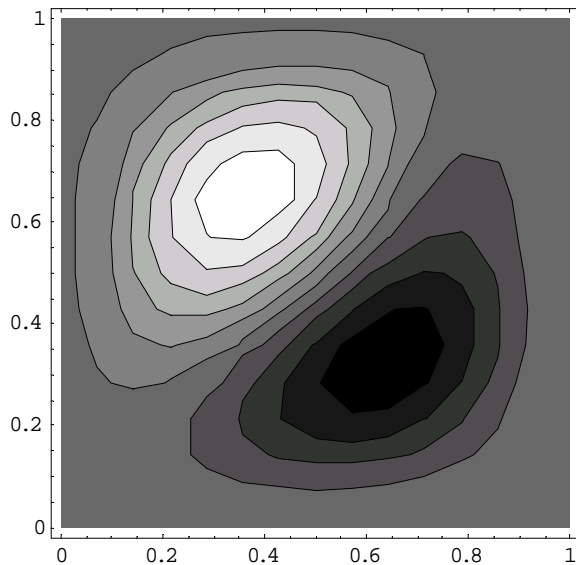
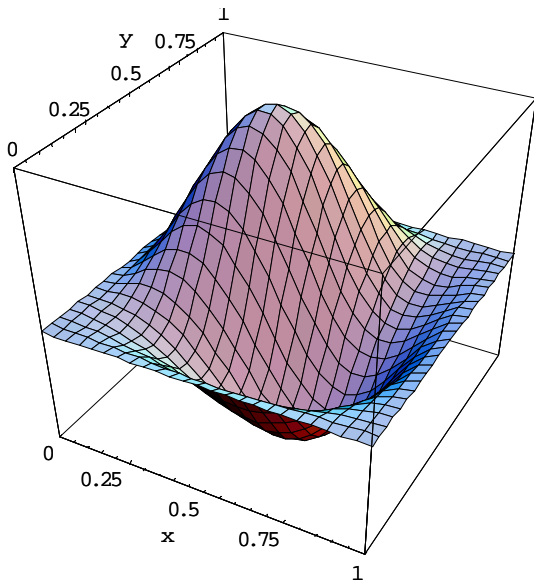


Figura 2: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M = 0.5$ adosada sobre la diagonal ($x_m = y_m = 0.75$)

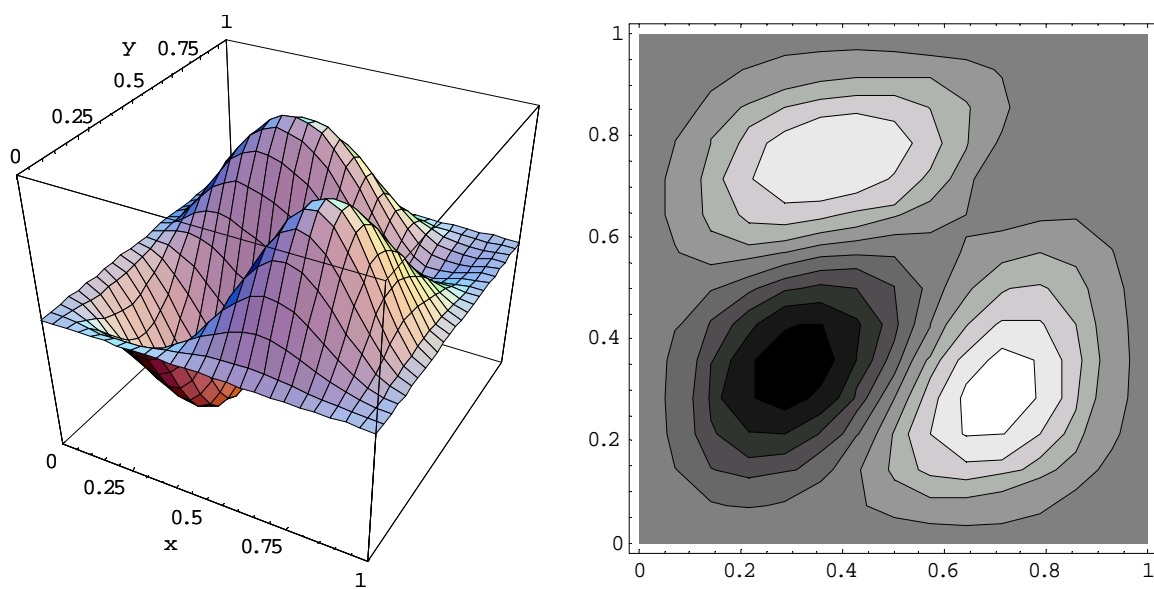


Segundo modo $\Omega_2 = 41.137$

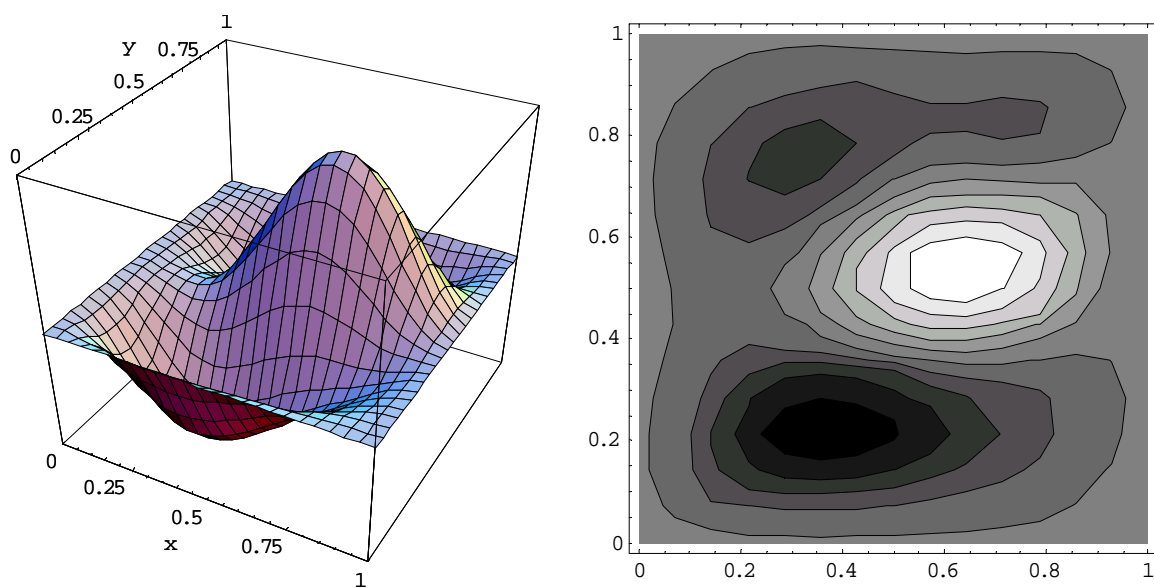


Tercer modo $\Omega_3 = 59.8832$

Figura 2: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M = 0.5$ adosada sobre la diagonal ($x_m=y_m=0.75$) (Cont.)



Cuarto modo $\Omega_4 = 86.6447$



Quinto modo $\Omega_5 = 92.2658$

Figura 2: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M = 0.5$ adosada sobre la diagonal ($x_m = y_m = 0.75$) (Cont.)

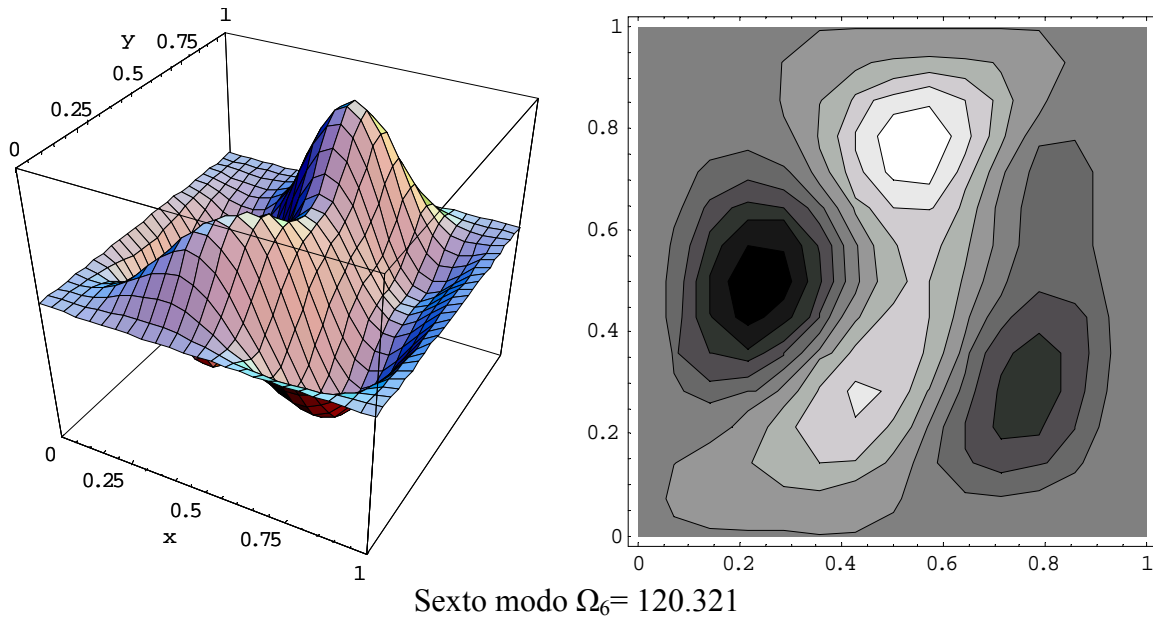


Figura 2: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada empotrada con una masa de magnitud $M = 0.5$ adosada sobre la diagonal ($x_m = y_m = 0.75$) (Cont.)

4. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Patricio A. A. Laura por sus valiosas sugerencias.

El trabajo ha sido financiado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, de la Universidad Nacional del Centro y por el CONICET.

5. REFERENCIAS

- [1] H.A. Larrondo, D.R. Avalos and P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of simply supported anisotropic rectangular plates carrying an elastically mounted concentrated mass", *Journal of Sound and Vibration* **215**(5), 1195-1202 (1998)
- [2] D.R. Avalos, H.A. Larrondo, and P.A.A. Laura, "Análisis of vibrating rectangular anisotropic plates with free-edge holes", *Journal of Sound and Vibration* **222**(4), 691-695 (1999)
- [3] D.R. Avalos, H.A. Larrondo, and P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of simply supported orthotropic rectangular plates with rectangular and circular cut-outs carrying an elastically mounted concentrated mass", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol 7(5) 503-512 (1999)

- [4] P.M. Ciancio, C.A. Rossit y D.V. Bambill, “Vibraciones transversales de placas rectangulares, con inclusiones anisótropas como refuerzos de masas concentradas”. *Mecánica Computacional XXII (CD)*, 733-742, (2003)
- [5] D. Young y R.P. Felgar Jr., *Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam*. The University of Texas Publications, N° 4913.(1949).
- [6] S.G. Lekhnitskii, *Anisotropic plates*, Gordon and Breach Sciences Publishers, N.Y. (1968)
- [7] P.M. Ciancio y C.A. Rossit “Vibraciones libres de placas rectangulares de material anisótropo y bordes apoyados, empotrados o libres”. Resumen aceptado – Mecom 2005
- [8] D.H. Felix, *Vibraciones de placas ortótropas con diversas condiciones de vínculo y orificios de borde libre*. Tesis doctoral. Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur. (2004)