

EVALUACIÓN DE MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS PARA LA SIMULACIÓN DE TURBULENCIA HOMOGÉNEA ISOTRÓPICA

Pablo F. Mueller*, Gustavo C. Buscaglia*†y Enzo A. Dari*†

*Instituto Balseiro
Av. Bustillo 9500, San Carlos de Bariloche, Argentina
e-mail: muellerp@ib.cnea.gov.ar

†Centro Atómico Bariloche
Av. Bustillo 9500, San Carlos de Bariloche, Argentina
e-mail: gustavo@cab.cnea.gov.ar, darie@cab.cnea.gov.ar

Palabras Clave: Turbulencia Isotrópica, Large Eddy Simulation, LES, Elementos Finitos, Turbulencia Homogénea, Turbulencia, Smagorinsky, Direct Numerical Simulation, DNS.

Abstract. *En este trabajo se ensayan métodos de elementos finitos estabilizados para simular flujos turbulentos resolviendo los vórtices de gran tamaño (LES). Para ello se resolvió el decaimiento de turbulencia homogénea e isotrópica en dos y en tres dimensiones. Se comprobó el establecimiento espontáneo de un espectro turbulento a partir de diversas condiciones iniciales. Se utilizaron soluciones DNS (Direct Numerical Simulation) como referencia, para estudiar los efectos de disminuir la cantidad de nodos (LES), aumentar el paso de tiempo y cambiar los parámetros numéricos de estabilización. También se demostró la conveniencia de un método numérico modificado, y se estudió el efecto que tiene la utilización del modelo de sub-escala de Smagorinsky, que mostró efectos positivos en el caso tridimensional, pero no en el caso bidimensional. Las soluciones LES que se obtuvieron mostraron muy buena concordancia con las simulaciones DNS propias y con datos DNS tomados de la bibliografía.*

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años en nuestro grupo se hicieron varias simulaciones de flujos turbulentos para aplicaciones tecnológicas. Algunos ejemplos son: El flujo en el tanque de decaimiento, en el tanque reflector, dentro de la chimenea, y en la fuente fría de neutrones⁸ del reactor nuclear para investigación que construye la empresa Argentina INVAP en Australia.

Estas simulaciones se hicieron resolviendo numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes con el método de elementos finitos implementado en el código FEMCO. Quedando demostrada la utilidad y las perspectivas que tienen este tipo de simulaciones surge la necesidad de hacer un estudio en detalle del alcance de las mismas. En especial, analizar la validez y precisión de simulaciones de flujos turbulentos donde se resuelven únicamente los vórtices de gran tamaño. Esta técnica recibe el nombre LES (Large Eddy Simulation). El interés proviene de la escasez de datos cuantitativos sobre el comportamiento de esquemas de elementos finitos estabilizados de bajo orden (como los que utiliza el FEMCO) para hacer LES.

Surge así la necesidad de estudiar un flujo turbulento del que exista suficiente información en la bibliografía. Por este motivo se eligió el decaimiento de turbulencia homogénea e isotrópica. Cabe mencionar además que las escalas pequeñas de todos los flujos turbulentos tienden a ser isotrópicas. El objetivo de este trabajo es probar el método de elementos finitos implementado en el código FEMCO para hacer simulaciones LES, y así optimizar los parámetros numéricos y encontrar características de las soluciones que puedan servir para predecir la confiabilidad de los resultados.

2. TEORÍA

2.1. Presentación del problema

Se resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en un dominio cuadrado en dos dimensiones ($\Omega = [0, L]^2$) y cúbico ($\Omega = [0, L]^3$) en tres dimensiones. Se utilizan condiciones de borde periódicas para no introducir anisotropía.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u - \operatorname{div} (2\mu \nabla^s u) + \nabla p = f \quad , \quad \operatorname{div} u = 0 \quad (1)$$

donde u es el campo de velocidades, ρ la densidad, μ la viscosidad dinámica, ∇^s el operador gradiente simétrico ($(\nabla^s u)_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$), p la presión, y f la fuerza volumétrica. En todas las simulaciones se utilizaron los siguientes valores: $L = 1m$, $f = 0$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\nu = \mu/\rho = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$. En este trabajo los espectros energéticos y de disipación se presentan siempre en unidades del modo fundamental. Esto significa unidades de k/k_0 donde $k_0 = \frac{2\pi}{L}$.

El problema planteado tiene todos sus parámetros fijos salvo la condición inicial. A esta se la caracterizará por dos aspectos: La energía cinética inicial y la forma del espectro energético. Como se utilizan siempre campos de velocidades con velocidad media nula, la

energía inicial se relaciona directamente con la velocidad media cuadrática inicial $V_{rms0} = \sqrt{2 E_0}$.

2.2. Esquemas numéricos

Presentamos los métodos en un caso general (sin hipótesis de periodicidad). Se asume que las ecuaciones (1) se cumplen en un dominio acotado Ω , con condiciones iniciales u_0 en Ω , velocidades impuestas en la frontera de Dirichlet Γ_D , y tracciones impuestas en la frontera de Neumann Γ_N ($\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N} = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$).

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \quad , \quad u(x, t) = g(x, t) \quad x \in \Gamma_D \quad (2)$$

$$(-p \mathbf{1} + 2\mu \nabla^s u) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{F} \quad x \in \Gamma_N \quad (3)$$

Sea \mathcal{T}_h una partición de elementos finitos de Ω , y sea $V_h \subset H^1(\Omega)^{n_{sd}}$ el espacio de elementos finitos asociado para aproximar el campo de velocidades, donde n_{sd} es el número de dimensiones espaciales. Se asume que V_h consiste en campos vectoriales lineales, bilineales o trilineales por trozos. Se define, como es usual,

$$V_{hD} = \{v_h \in V_h, v_h = g \text{ on } \Gamma_D\} \quad , \quad V_{h0} = \{v_h \in V_h, v_h = 0 \text{ on } \Gamma_D\} \quad (4)$$

y sea $Q_h \subset L^2(\Omega)$ un espacio de elementos finitos para la presión. En este trabajo los interpolantes para la presión coinciden con los usados para cada componente del campo de velocidades. Finalmente, sea G_h otro espacio vectorial de elementos finitos, que se tomará en general coincidente con V_h (sin condiciones de borde impuestas).

2.2.1. Formulación acoplada

Método de Galerkin linealizado: *Encontrar $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V_{hD} \times Q_h$ tal que*

$$\mathcal{G}_1 = \rho \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + (u_h^* \cdot \nabla) u_h^{n+\theta}, v_h \right) + a(u_h^{n+\theta}, v_h) - (p_h^{n+1}, \text{div } v_h) - (f^{n+\theta}, v_h) - \int_{\Gamma_N} \mathcal{F}^{n+\theta} \cdot v_h \, d\Gamma = 0 \quad (5)$$

$$\mathcal{G}_2 = (q_h, \text{div } u_h^{n+1}) = 0 \quad (6)$$

para todo $(v_h, q_h) \in V_{h0} \times Q_h$. En (5), $a(u_h^{n+\theta}, v_h) = \int_{\Omega} 2\mu \nabla^s u_h^{n+\theta} : \nabla^s v_h \, d\Omega$ es la forma bilineal viscosa, $u_h^* = u_h^n$, y (\cdot, \cdot) es el producto escalar L^2 .

La formulación de Galerkin sufre de modos espúreos de presión, y comportamientos oscilatorios (*wiggles*) a altos Re , por lo que hay que introducir términos de estabilización. Se define

$$\mathcal{R}(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) = \rho \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + (u_h^* \cdot \nabla) u_h^{n+\theta} \right) + \nabla p_h^{n+1} - f^{n+\theta} \quad (7)$$

$$\mathcal{P}(v_h) = \rho(u_h^* \cdot \nabla) v_h + \alpha_1 \rho \text{div } (u_h^*) v_h \quad (8)$$

y sea $\Pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow G_h$ la proyección ortogonal en G_h . Poniendo $g_h^n = \Pi_h(\nabla p_h^n)$, la formulación estabilizada queda

$$\mathcal{G}_1 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\frac{\tau_1}{\rho} \mathcal{R}(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \cdot \mathcal{P}(v_h) + \delta \operatorname{div} u_h^{n+1} \operatorname{div} v_h \right) d\Omega = 0 \quad \forall v_h \in V_{h0} \quad (9)$$

$$\mathcal{G}_2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\frac{\tau_2}{\rho} \mathcal{R}(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) + \frac{\tau_3}{\rho} (\nabla p_h^{n+1} - g_h^n) \right) \cdot \nabla q_h d\Omega = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (10)$$

que todavía requiere definir τ_1 , τ_2 , τ_3 y δ . Siguiendo a Codina⁴ se usa $\tau_0 = \left(\frac{4\mu}{\rho h^2} + \frac{2|u^*|}{h} \right)^{-1}$; $\delta_0 = 4\mu + 2\rho|u^*|h$, donde h es el tamaño del elemento en la dirección del flujo. Usando $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, $\delta = \delta_0$ y $\tau_3 = \alpha_1 = 0$ obtenemos la formulación GLS. Por otro lado, si $\tau_2 = \delta = \alpha_1 = 0$ y $\tau_1 = \tau_3 = \tau_0$ obtenemos la formulación SPGP de Codina y Blasco.⁵

2.2.2. Formulación de pasos fraccionados

Los métodos de pasos fraccionados permiten desacoplar las incógnitas de velocidad de las incógnitas de presión y son por esta razón muy populares en CFD. La formulación de pasos fraccionados para los esquemas estabilizados introducidos en la subsección anterior es:

Primer sub-paso: Momento

$$\left(\rho \frac{\hat{u}_h^{n+1} - \hat{u}_h^n}{\Delta t} + \rho(u^* \cdot \nabla) \hat{u}_h^{n+\theta} + (1 + \gamma) \nabla p_h^n - \gamma \nabla p_h^{n-1} - f, v_h + \tau_1 (u^* \cdot \nabla) v_h \right) + a(\hat{u}_h^{n+\theta}, v_h) = 0 \quad (11)$$

Segundo sub-paso: Incompresibilidad

$$(\operatorname{div} \hat{u}_h^{n+1}, q_h) + \frac{\Delta t}{\rho} (\nabla(p_h^{n+1} - \gamma p_h^n), \nabla q_h) + \frac{\tau_3}{\rho} (\nabla p_h^{n+1} - g_h^n, \nabla q_h) = 0 \quad (12)$$

2.3. Definición de los métodos utilizados

En esta sección se definen los tres métodos numéricos que se utilizaron en las simulaciones. A cada uno de ellos se le dio un nombre para poder referenciarlos con facilidad. En la discretización temporal se utilizó siempre el esquema de Crank-Nicolson ($\theta = \frac{1}{2}$). En todas las simulaciones se utilizó una discretización uniforme de cuadrados bilineales o cubos trilineales (Q1).

Método “normal”: Este nombre se le da a la formulación (9)-(10) con los valores: $\beta = \alpha_1 = \tau_3 = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\delta = \delta_0$, $\tau_1 = \tau_0 * upwf$, $\tau_2 = \tau_0 * upwf * estab1$. Este es un esquema clásico estabilizado.

Método “mn1”: Es igual al método *normal* salvo que en (5) y (7) se introduce el término³

$$\frac{\rho}{2} \operatorname{div}(u^*) u^{n+\theta} \quad (13)$$

para disminuir la disipación numérica. De esta manera quedan:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 = & \rho \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + (u_h^* \cdot \nabla) u_h^{n+\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(u^*) u^{n+\theta}, v_h \right) + a(u_h^{n+\theta}, v_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) \\ & - (f^{n+\theta}, v_h) - \int_{\Gamma_N} \mathcal{F}^{n+\theta} \cdot v_h \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathcal{R}(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) = \rho \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + (u_h^* \cdot \nabla) u_h^{n+\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(u^*) u^{n+\theta} \right) + \nabla p_h^{n+1} - f^{n+\theta} \quad (15)$$

Con esta nueva definición de \mathcal{G}_1 y $\mathcal{R}(u_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ la formulación queda definida igual que el método *normal* y utilizando los mismos parámetros numéricos.

Método BS: El método BS utiliza la formulación de pasos fraccionados presentada en la sección 2.2.2, salvo que, al igual que en el método *mn1*, se le introduce el término (13) en el primer sub-paso. Los parámetros numéricos de este método son: $\beta = \alpha_1 = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $\tau_1 = \tau_0 * upwf$, $\tau_3 = \tau_0 * upwf * estab2$.

2.4. Formula analítica de la disipación

A partir de la formulación variacional se puede deducir la expresión exacta de la disipación numérica del problema discreto. Esta disipación se dividirá en distintos términos para estudiar su comportamiento e importancia relativa en las simulaciones.

El procedimiento matemático para la deducción consiste en elegir $v_h = u^{n+\theta}$ y reemplazar en (9). Haciendo un poco de álgebra se obtiene la expresión de la disipación discreta exacta para el método normal:

$$\frac{\rho}{2\Delta t} \left(\int_{\Omega} (u_h^{n+1})^2 - \int_{\Omega} (u_h^n)^2 \right) = \quad (16)$$

$$- \int_{\Omega} 2 \mu_L |\nabla^s u_h^{n+\theta}|^2 \quad (17)$$

$$- \int_{\Omega} 2 \mu_T |\nabla^s u_h^{n+\theta}|^2 \quad (18)$$

$$+ \int_{\Omega} p_h^{n+1} \operatorname{div} u_h^{n+\theta} \quad (19)$$

$$- \rho \int_{\Omega} (u_h^n \cdot \nabla u_h^{n+\theta}) u_h^{n+\theta} \quad (20)$$

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\frac{\tau_1}{\rho} \mathcal{R}(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \cdot \mathcal{P}(u_h^{n+\theta}) + \delta \operatorname{div} u_h^{n+1} \operatorname{div} u_h^{n+\theta} \right) \, d\Omega \quad (21)$$

Se dividió $\mu = \mu_L + \mu_T$, donde μ_L es la viscosidad dinámica (real) y μ_T es la viscosidad turbulenta que se introduce al utilizar el modelo de Smagorinsky ($\mu_T = \rho(C_S h)^2 |\nabla^s \vec{u}|$ con $C_S = 0,15$). Si no se utiliza modelo entonces $\mu = \mu_L$.

Observar que el término 16 es la derivada discreta de la energía cinética $\left(\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} \right)$. A los términos del segundo miembro se los llamará: Disipación laminar = - ecuación (17),

Término de disipación de Smagorinsky = - ecuación (18), Término de disipación 1 = + ecuación (19), Término de disipación 2 = - ecuación (20), Término de estabilización = - ecuación (21).

La disipación discreta exacta en el método *mn1* es igual a la recién explicada salvo que no posee el Término 2. Éste se cancela con el término (13) multiplicado por $u_h^{n+\theta}$.

3. SIMULACIONES 2D

3.1. Desestabilización de una condición inicial ordenada

La condición inicial que se presenta corresponde a un campo de velocidades isotrópico con velocidad media cuadrática $V_{rms0} = 10$ mm/seg donde toda la energía cinética está concentrada en un solo modo de Fourier correspondiente a 8 veces el modo fundamental $k = 8k_0$. Definiendo una escala integral de longitud con el tamaño de los vórtices de la condición inicial, el número de Reynolds inicial es $Re = 1250$. Aquí no se utiliza el Re definido con L ($Re_L = \frac{V_{rms} L}{\nu}$) porque no representa el tamaño típico de los vórtices. La expresión del campo inicial es $\vec{u}_0(x, y) = 0,01(\cos(16\pi y), -\cos(16\pi x))$. Se utilizó una malla de $N = 100^2$. En la Fig. 1 (izquierda) se graficó la energía cinética de la velocidad en X y la de la velocidad en Y multiplicadas por dos para comparar fácilmente con la energía cinética total. Se ve claramente el momento en que se desestabiliza la solución ordenada.

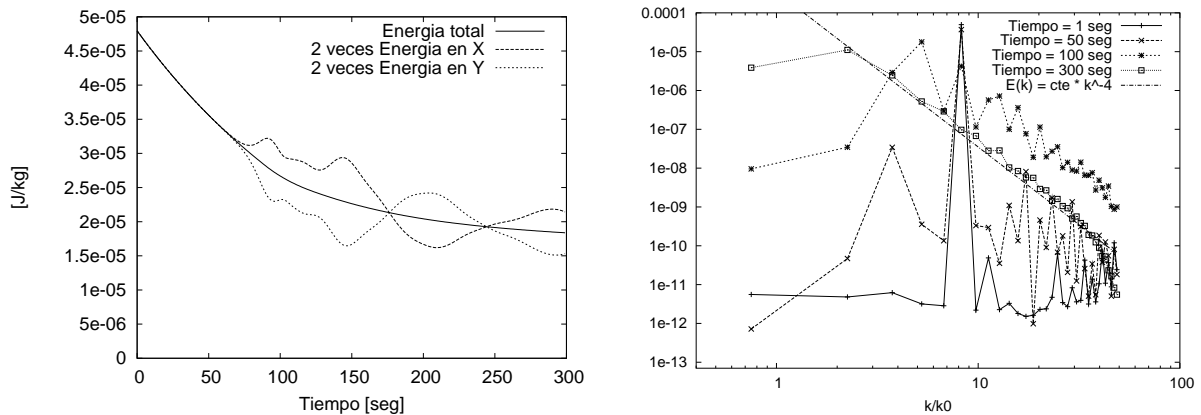


Figura 1: Izquierda: Energía cinética en función del tiempo. El momento de la desestabilización se produce cuando las componentes de la velocidad comienzan a fluctuar. Derecha: Espectros energéticos. A partir de un pico de energía se forma un espectro turbulento.

En la Fig. 1 (derecha) se ve como se activan las distintas componentes de Fourier, hasta formar el espectro turbulento. El algoritmo pasa de una solución ordenada a una caótica de manera espontánea. La turbulencia bidimensional isotrópica tiene un espectro teórico, en el rango inercial, cuando Re tiende a infinito. En ese caso $E(k)$ es proporcional a k^{-3} . En nuestro problema Re es relativamente bajo y el espectro cae con más pendiente, aproximadamente como k^{-4} . Esto concuerda con simulaciones previas.¹

3.2. Decaimiento de una condición inicial con un pico de energía disperso

En esta sección se mostrarán aspectos generales de una simulación hecha con una malla de $N = 100^2$ nodos. Esta simulación tiene una velocidad media cuadrática inicial $V_{rms0} = 1\text{mm/seg}$, con el espectro de Fig. 2. El Re inicial es $Re_L = 1000$. Nuevamente el espectro converge al espectro turbulento.

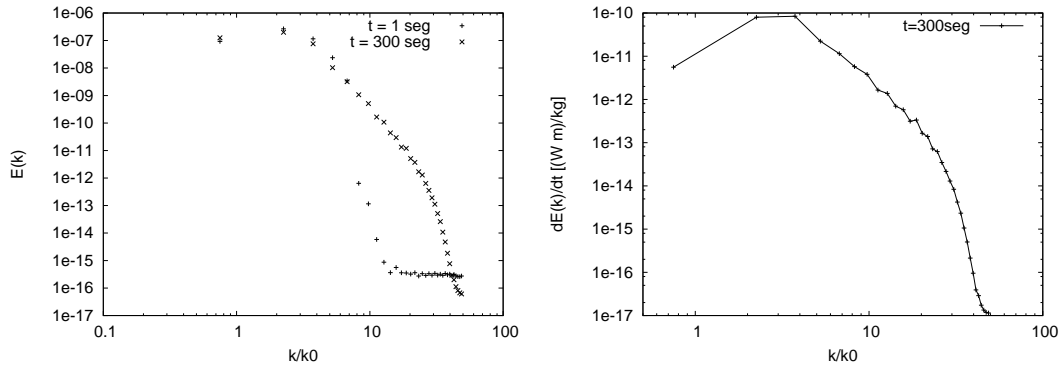


Figura 2: Izquierda: Espectro energético inicial y a $t=300$ seg de la simulación. Derecha: Espectro de disipación a $t=300$ seg.

Se observaron también estructuras coherentes típicas de turbulencia bidimensional. En la Fig. 3 se puede ver al campo de velocidades a $t = 250$ segundos en la corrida de $N = 100^2$ nodos. Abajo hay un apareamiento (*pairing*), a la derecha hay un dipolo. El sentido de los vórtices se deduce del sentido de los vectores de velocidad.

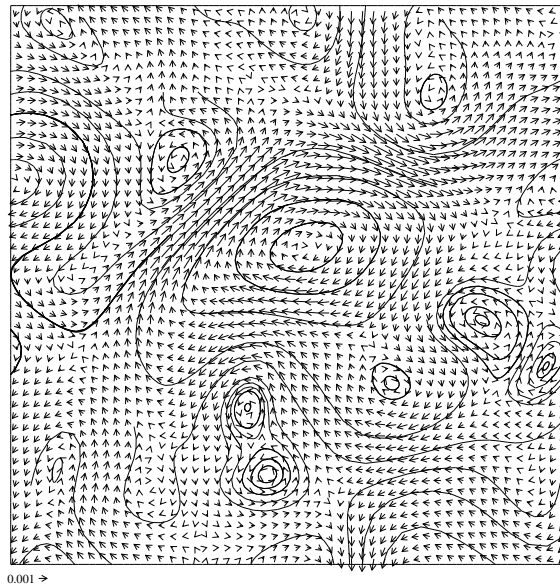


Figura 3: Estructuras coherentes: Abajo se observa un apareamiento, a la derecha un dipolo.

3.3. Parámetros Numéricos

3.3.1. Efectos de la discretización

La discretización temporal se escogió con $\Delta t = 1$. Diversos ensayos mostraron que para $\Delta t < 2$ el resultado es independiente del paso temporal.

En cuanto a la discretización espacial, en la Fig. 4 se puede ver que la solución es independiente de la malla si $N \geq 100^2$. En una malla con $N = 25^2$ nodos, en cambio, la disipación numérica es apreciable. Para estudiar la disipación numérica se compara la derivada discreta de la energía $\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t}$ con la disipación laminar, que corresponde a $\epsilon = 2\nu |\nabla^s \vec{u}|^2$. La diferencia entre estas dos es la disipación numérica. En las mallas con $N = 100^2$, $N = 200^2$ y $N = 250^2$ este valor es insignificante. Recordando (16)-(21) tenemos, esquemáticamente:

$$-\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = \epsilon + \text{Termino1} + \text{Termino2} + \text{Estabilización} \quad (22)$$

En la Fig. 4 también se muestran las contribuciones de cada término para la malla de $N = 25^2$. Aquí el término de estabilización es pequeño y los otros dos aproximadamente iguales. El método numérico *mn1* disminuye la disipación numérica puesto que no posee el Término 2.

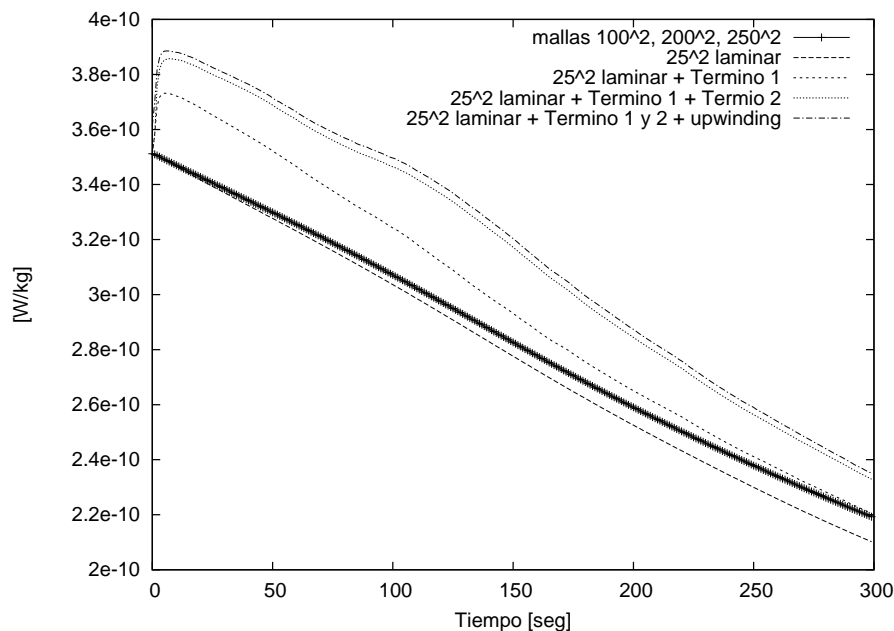


Figura 4: Contribuciones a la disipación (malla 25^2). Las mallas de 100^2 , 200^2 y 250^2 no poseen disipación numérica apreciable (línea gruesa).

En la Fig. 5 se presentan los espectros energéticos de cuatro simulaciones hechas con

mallas de 25^2 , 50^2 , 100^2 y 250^2 nodos, todos ellos a $t = 200$ seg. Se ve que los espectros son iguales en el rango de números de onda que captura cada malla.

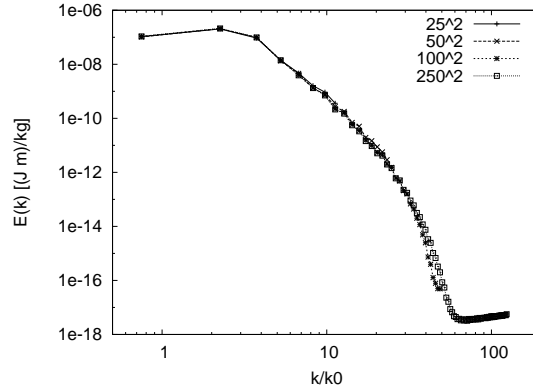


Figura 5: Espectros energéticos para distintas mallas.

3.3.2. Efectos de los parámetros de estabilización

Los parámetros de estabilización son el $upwf$ y el $estab$. Cuando la discretización es suficientemente buena estos parámetros no introducen efectos en los resultados y pueden variarse en un rango grande. Este fue el caso observado con las mallas de más de $N = 100^2$ nodos. Para las mallas más gruesas el $upwf$ introduce difusividad numérica y conviene usar un valor pequeño. La experiencia acumulada mostró que valores $< 5 \times 10^{-2}$ funcionan bien. El producto $estab \times upwf$ no se puede variar tanto como el $upwf$ porque se desestabiliza el algoritmo. Para este producto se recomiendan valores entre 0,5 y 0,05. Para el método BS fueron necesarios valores más cercanos a $estab \times upwf = 0,5$ en cambio para los métodos *normal* y *mn1* se utilizaron valores más cercanos a $estab \times upwf = 0,05$.

3.4. Modelo de Smagorinsky en turbulencia 2D

Se hicieron corridas con mallas LES utilizando el modelo de Smagorinsky. Los resultados en este caso demostraron ser más disipativos que si no utilizáramos el modelo (ver figura 6). El modelo de Smagorinsky agrega una viscosidad turbulenta para modelar la disipación de las escalas no resueltas. Pero en este caso si bien esta disipación estabiliza más el algoritmo, da resultados peores que si no lo utilizáramos.

Este efecto negativo del modelo se debe a que, a diferencia de la turbulencia 3D, en la turbulencia bidimensional la disipación de las escalas pequeñas es menos importante que la de las escalas grandes. Esto hace que no sea tan importante la disipación que falta debido a no estar resolviendo las escalas pequeñas. Más aún considerando que el algoritmo tiende a ser sobredifusivo al disminuir la cantidad de nodos. Para comparar la forma de los espectros de disipación de un flujo turbulento de dos y de tres dimensiones ver figuras 2 y 13.

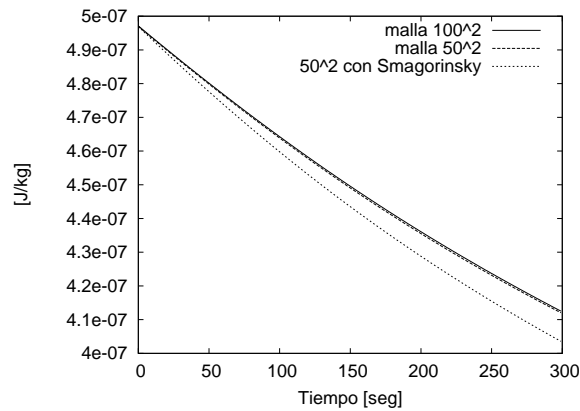


Figura 6: Evolución de la energía, con y sin modelo de Smagorinsky.

3.5. Prueba del método *mn1*

El método *mn1* está pensado para introducir menos difusividad numérica. Esto se comprueba comparándolo con el método *normal*. En la Fig. 7 se puede ver que este último introduce aproximadamente el doble de disipación numérica. La mejora se logra introduciendo el término de compensación en la formulación variacional que cancela exactamente el Término 2 de la disipación.

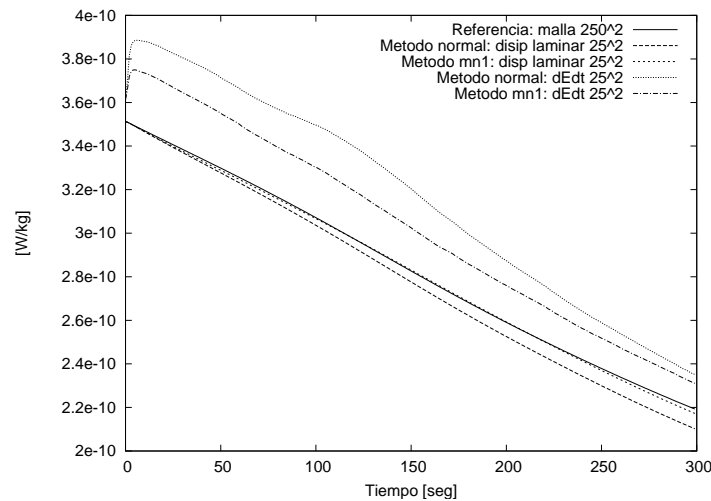


Figura 7: Composición de la disipación en los métodos *mn1* y *normal*. La línea continua es solución DNS 250^2 . El método *mn1* introduce aproximadamente la mitad de disipación numérica que el *normal*.

3.6. Prueba del método de resolución por bloques

Se comparó el método de resolución por bloques BS, con el método acoplado *mn1*. Para ello se hizo una corrida con $N = 100^2$ nodos. Se comprobó que los resultados concuerdan

perfectamente. Además el BS utiliza menos memoria y es más rápido. Se observó sin embargo que es algo menos robusto, y que anula menos la divergencia de la velocidad. En conclusión el método dio buenos resultados, y fue fundamental para realizar corridas tridimensionales dada la limitación de memoria del cluster de computadoras disponible para el presente trabajo.

4. SIMULACIONES 3D

4.1. Desestabilización de una condición inicial ordenada

Al igual que en la sección 3, se comenzará mostrando que se establece un flujo turbulento a partir de una condición inicial ordenada. Para ello se partió de un campo de velocidades con un solo modo de Fourier en $k = \sqrt{3}k_0$ en la dirección $(1, 1, -1)$ (ecuación 23). Este campo tiene divergencia nula pero a diferencia de la desestabilización presentada antes, es no isotrópico. Se mostrará que una vez que se desestabiliza el flujo la energía se distribuye isotrópicamente en todo el espectro.

$$\vec{u}_0 = \left(\frac{\cos[2\pi(x+y-z)]}{20\sqrt{3}}, \frac{\cos[2\pi(x+y-z)]}{20\sqrt{3}}, \frac{\cos[2\pi(x+y-z)]}{10\sqrt{3}} \right) \quad (23)$$

La energía inicial y la disipación inicial se pueden calcular analíticamente y valen: $E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{u}_0^2 = 0,00125 \frac{J}{kg}$, $\epsilon = 2\nu \int_{\Omega} |\nabla^s \vec{u}_0|^2 = 0,296 \times 10^{-6} \frac{W}{kg}$. Estos valores se mantienen hasta que el sistema se desestabiliza. A partir de allí aparece toda una gama de vórtices más pequeños (Fig. 9) que producen un gran incremento en la disipación (Fig. 8). Si se observa la evolución de las tres componentes de la energía, se ve que el desbalance inicial se equipara y el flujo tiende a hacerse isotrópico. En la Tabla 1 se muestra este efecto cuantitativamente, comparando la energía en los diferentes octantes del espacio de Fourier.

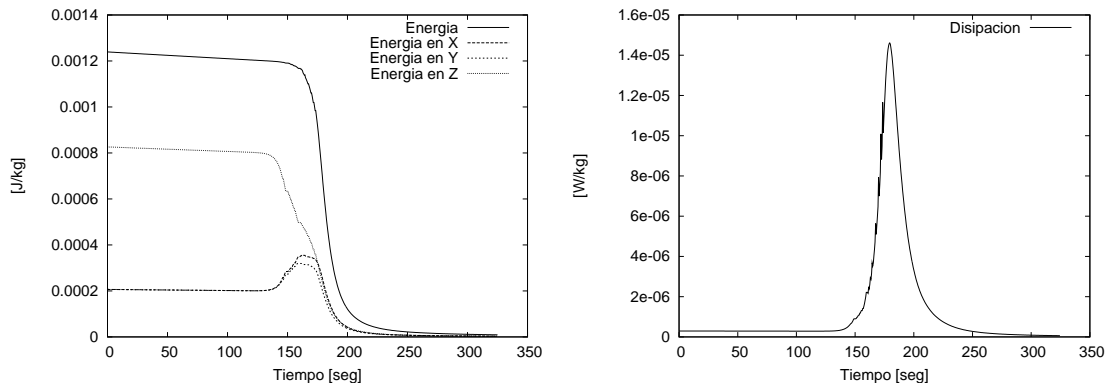


Figura 8: Izquierda: Energía en función del tiempo. Derecha: Disipación en función del tiempo.

En esta corrida se produce el conocido fenómeno de acumulación de energía en las escalas resueltas más pequeñas, por ser la malla demasiado gruesa. A la derecha de la

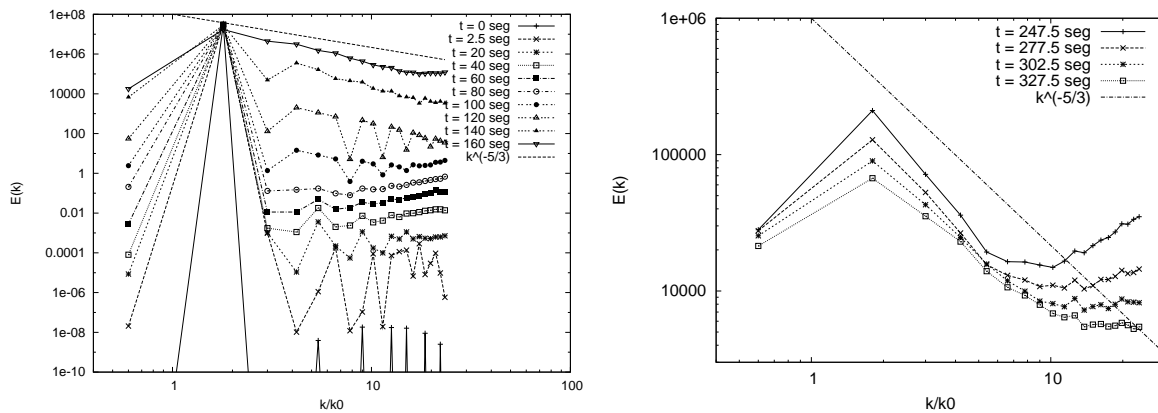


Figura 9: Evolución de los espectros. Izquierda: Primera mitad del tiempo, donde se forma el espectro turbulento. Derecha: Segunda mitad, donde decae la energía.

Fig. 9 se ve que el apilamiento se corrige a medida que la energía disminuye. Esto es posible corregirlo con el modelo de Smagorinsky, pero cabe mencionarlo pues contradice la creencia de que los métodos estabilizados son “sobredifusivos”.

	Octante 1	Octante 2	Octante 3	Octante 4
Tiempo inicial	0	0	0	1
$t = 150$ seg	.02	.05	.04	.89
$t = 175$ seg	.20	.23	.20	.37
$t = 200$ seg	.25	.25	.24	.26
$t = 250$ seg	.25	.26	.25	.24

Cuadro 1: Energía relativa en cada octante.

4.2. Simulación con 64^3 nodos

Aquí se presentan varios aspectos de una simulación de decaimiento de turbulencia isotrópica 3D. Se utilizó un campo de velocidades inicial con un espectro turbulento isotrópico, proveniente de otra corrida, multiplicado por una constante para fijar su velocidad media cuadrática a $V_{rms} \simeq 7mm/seg$ ($Re_L = 7000$). La Fig. 10 muestra el Re basado en la microescala de Taylor (Re_λ) durante el curso de la simulación. Se utilizó un paso temporal de $\Delta t = 0,5seg$, una malla de $N = 64^3$ nodos. Se usó el modelo de Smagorinsky.

La Fig. 11 muestra la evolución de las escalas de Kolmogorov y de Taylor, que como es natural crecen con el tiempo. En la Fig. 12 se grafica la velocidad media por componente dentro de un cubo de $15,625 cm^3$. Las fluctuaciones turbulentas son cada vez más suaves debido al decaimiento de la energía.

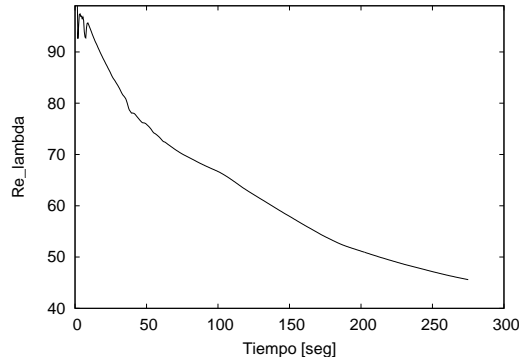


Figura 10: Evolución de Re_λ durante la simulación.

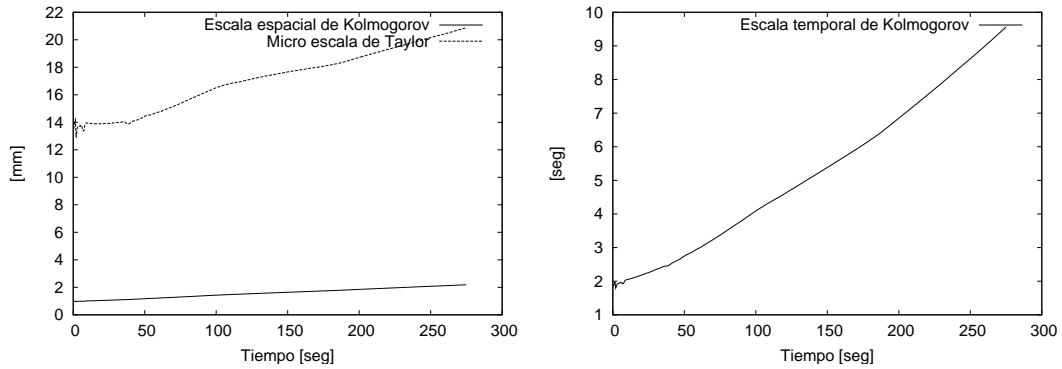


Figura 11: Evolución de las escalas de Kolmogorov y de Taylor.

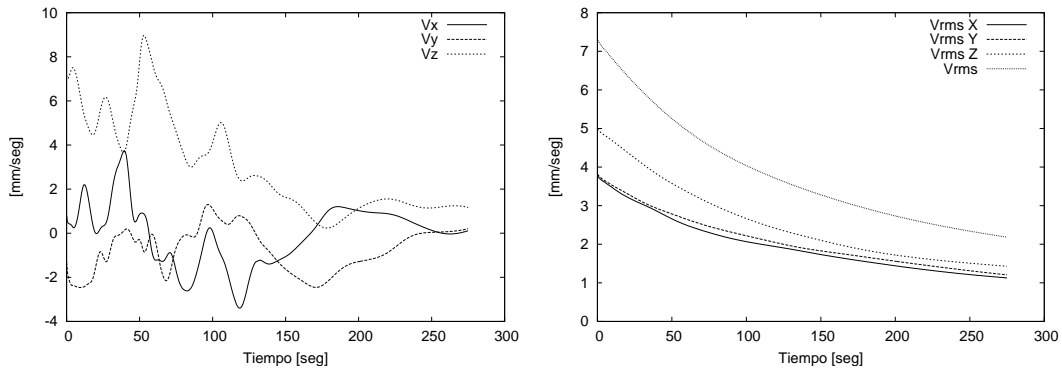


Figura 12: Izquierda: Velocidad media en un pequeño cubo de $15,625 \text{ cm}^3$. Derecha: Velocidad media cuadrática.

Los espectros energéticos y de disipación de los campos de la Fig. 14 (entre otros) se encuentran en la Fig. 13. Se observa que al evolucionar adquieren una pendiente cada vez mayor, por la disminución de Re_L . Los espectros de disipación, a diferencia del caso 2D,

tienen el máximo en un número de onda grande, mostrando que las escalas pequeñas son las que más disipan. Notar además cómo el modelo de Smagorinsky disipa rápidamente energía en las escalas pequeñas y el espectro adquiere el aspecto correcto.

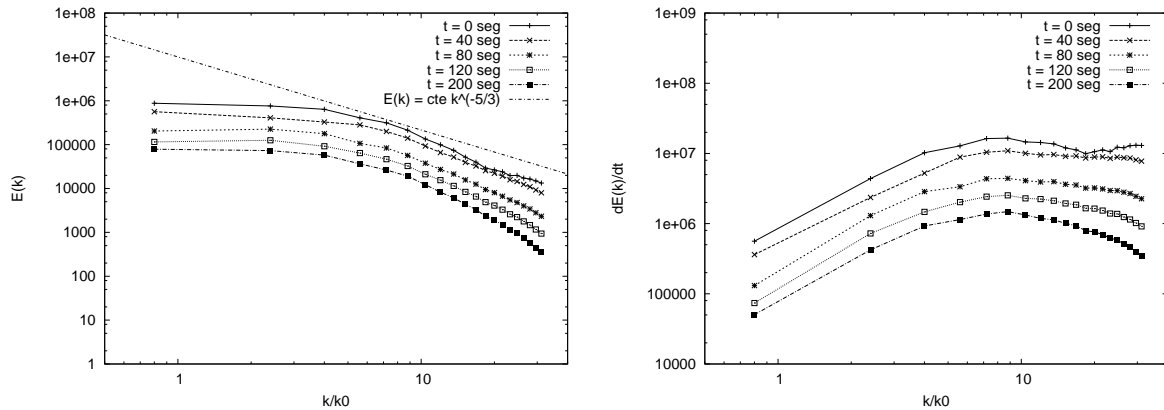


Figura 13: Izquierda: Espectros de energía. Derecha: Espectros de disipación. En la turbulencia 3D la disipación de las escalas pequeñas es más importante que en 2D.

4.3. Comparación con datos DNS 256^3

En esta sección se comparan simulaciones LES, con el modelo de subescala de Smagorinsky y sin modelo, contra datos DNS tomados de una publicación de Hughes *et al.*² Las simulaciones LES se realizaron con $N_{LES} = 64^3$. La simulación DNS fue realizada con un método espectral con $N_{DNS} = 256^3$.

Se reescalaron los datos DNS de manera que tengan las mismas unidades que las corridas LES. Las corridas LES parten de la misma condición inicial. Los campos de velocidades DNS poseen un espectro energético similar a los campos LES si los miramos en unidades de k_0 . Si se hace la suposición que en la condición inicial son iguales y que sólo difieren en una constante multiplicativa, entonces los únicos parámetros de los que depende el problema periódico exacto son L , ν y V_{rms} . Se definió el tiempo $t = 0$ de cada corrida como el momento en que todas tienen el mismo valor $Re_L = 6800$.

Las curvas de evolución de la energía (Fig. 15) son muy similares para las tres corridas (DNS, LES sin modelo, LES-Smagorinsky). En la Fig. 16 observamos que la disipación laminar LES es menor que la de los datos DNS, por no contener las escalas pequeñas.

La disipación *total* tiene en ambos casos (con y sin modelo) un valor parecido al de DNS. En la corrida sin modelo la disipación laminar es más parecida a la de DNS y la numérica proviene del llamado Término 1 y del *upwinding* (ver Fig. 20). Con el modelo de Smagorinsky la mayor parte de la disipación es introducida por el término de viscosidad turbulenta. Esto podría parecer una ventaja de no usar modelo, pero en realidad la mejora es fortuita y un análisis más detallado muestra que la corrida sin modelo tiene más error. En efecto, la primera parte de la corrida sin modelo tiene un comportamiento transitorio

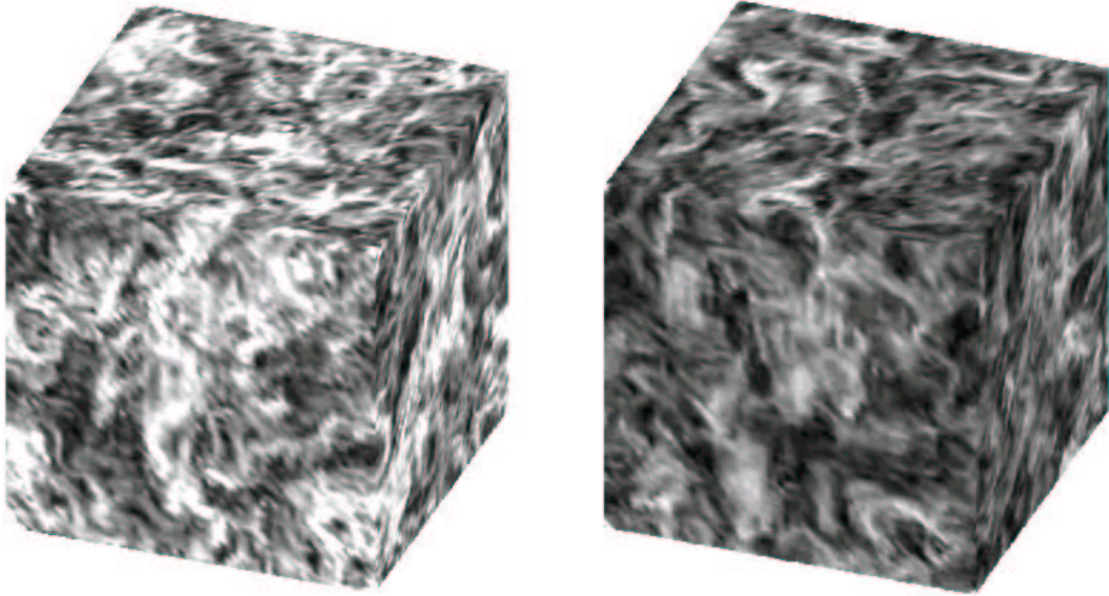


Figura 14: Módulo de la velocidad para una malla de 64^3 nodos. El color blanco es velocidad mayor a 9 mm/seg, el negro es velocidad cero. La primera figura es a tiempo $t = 40$ seg y la segunda a $t = 120$ seg.

erróneo donde la disipación no disminuye con el tiempo. Esto se debe al fenómeno de apilamiento de energía en las escalas pequeñas (ver en Fig. 17 cómo se levanta al comienzo la parte final del espectro). En las corridas 3D, al contrario de las 2D, el modelo de Smagorinsky tiene así efectos positivos.

4.4. Simulaciones con mallas de 48^3 y 32^3 nodos

Ahora se estudiará el efecto que tiene la discretización espacial en las simulaciones con y sin modelo de Smagorinsky. Para ambas se realizan corridas en mallas de 32^3 , 48^3 y 64^3 nodos. En todas ellas se utilizó $\Delta t = 0,5 \text{ seg}$.

En la Fig. 18 se comparan los espectros a $t = 40$ seg en unidades de energía por unidad de número de onda, en vez de histogramas, para poder compararlos entre sí. A la izquierda (sin modelo) se puede ver que cuanto menos nodos se utilizan, el efecto de apilamiento de energía al final del espectro es cada vez mayor. En cambio si utilizamos el modelo de Smagorinsky los espectros son correctos. En la Fig. 19 se graficó la evolución de la energía para los seis casos comentados. A pesar de que el modelo de Smagorinsky introduce disipación adicional las simulaciones con modelo son menos disipativas.

También se compararon las distintas contribuciones a la disipación. En la Fig. 20 se graficaron los distintos términos para una corrida con $N = 32^3$. Es notable que la disipación numérica del esquema sin modelo es del mismo orden y aproximadamente igual a la disipación que introduce el modelo de Smagorinsky a través de la viscosidad turbulenta. Se observó además que las simulaciones realizadas utilizando el modelo de

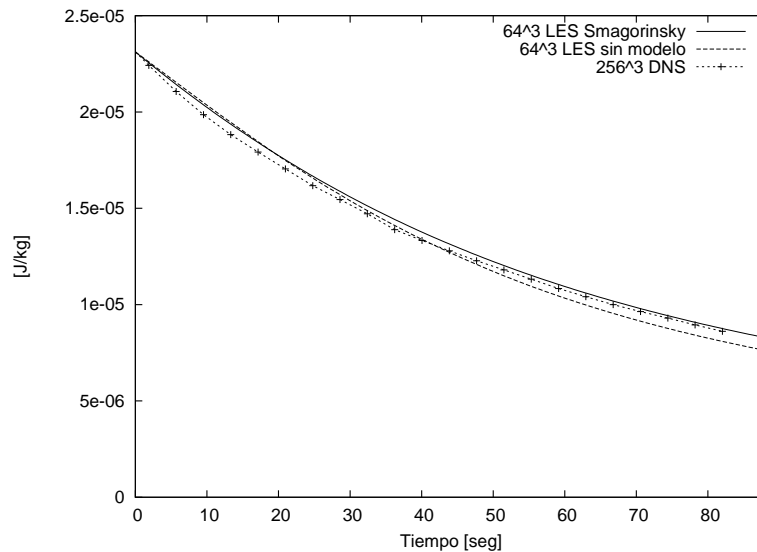


Figura 15: Energía en función del tiempo.

Smagorinsky tienen menos divergencia (en norma L^2).

En esta sección se mostraron resultados de simulaciones LES de 32^3 nodos. Si comparamos esta cantidad con los requeridos si hubiéramos hecho DNS se aprecia la importancia del LES. Para la simulación DNS se requirieron 256^3 nodos. Esto es 512 veces superior en cantidad de ecuaciones a resolver.

5. CONCLUSIONES

Se presentaron simulaciones del decaimiento de turbulencia homogénea e isotrópica en dos dimensiones y tres dimensiones, utilizando métodos de elementos finitos estabilizados. Se obtuvieron soluciones LES que mostraron muy buena concordancia con simulaciones DNS.

Se comprobó el establecimiento espontáneo de un espectro turbulento a partir de diversas condiciones iniciales.

Estudiando las distintas contribuciones a la disipación, se demostró la conveniencia de un esquema numérico modificado propuesto por Simo y Armero³ debido a su mejor comportamiento dinámico.

En el caso 2D se mostró que el *upwinding* es particularmente perjudicial, y que incorporar el modelo de Smagorinsky no tiene efectos positivos. Resulta claro que los métodos estudiados tienden a ser sobredifusivos, pero esto puede evitarse utilizándolos cuidadosamente.

En el caso 3D se mostró que el modelo de Smagorinsky introduce aproximadamente la disipación necesaria para un LES exitoso. Por otro lado es notable que la disipación numérica que introduce el método sin modelo es aproximadamente la misma. El problema de simular sin modelo de subescalas es que se produce un apilamiento de energía en las

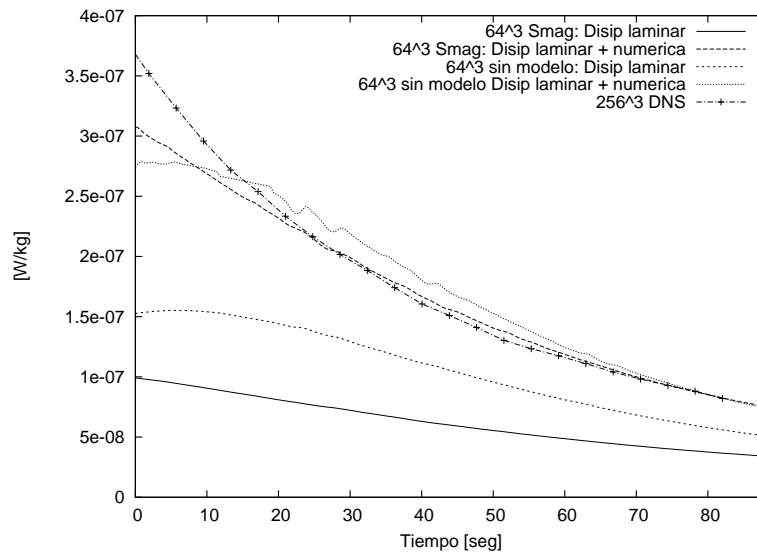


Figura 16: Disipación en función del tiempo.

escalas pequeñas que introduce comportamientos erróneos en ciertos casos.

Este trabajo fue financiado parcialmente por ANPCyT a través de los PICT 12-6337 y 12-09848.

REFERENCIAS

- [1] Marcel Lesieur, “*Turbulence in Fluids, Third Revised and Enlarged Edition*”, Kluwer Academic Pub., (1997).
- [2] T. J. R. Hughes, L. Mazzei, A. A. Oberai, y A. A. Wray, “The multiscale formulation of large eddy simulation: Decay of homogeneous isotropic turbulence”, *Physics of Fluids*, **13**, 505 (2001).
- [3] J. C. Simo and F. Armero, “Unconditional stability and long-term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes and Euler equations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **111**, 111-154 (1994).
- [4] R. Codina, “A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **190**, 2681-2706 (2001).
- [5] R. Codina and J. Blasco, “Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **182**, 277-300 (2000).
- [6] Stephen B. Pope, “*Turbulent Flows*”, Cambridge Univ. Press (2000).
- [7] David C. Wilcox, “*Turbulence Modeling for CFD*”, DCW Industries, (1998).
- [8] G. C. Buscaglia, E. A. Dari, J. E. Martín, D. L. Arnica y F. J. Bonetto, “Finite element modeling of liquid deuterium flow and heat transfer in a cold-neutron source”, *Int. J. Computational Fluid Dynamics*, in press, (2003).

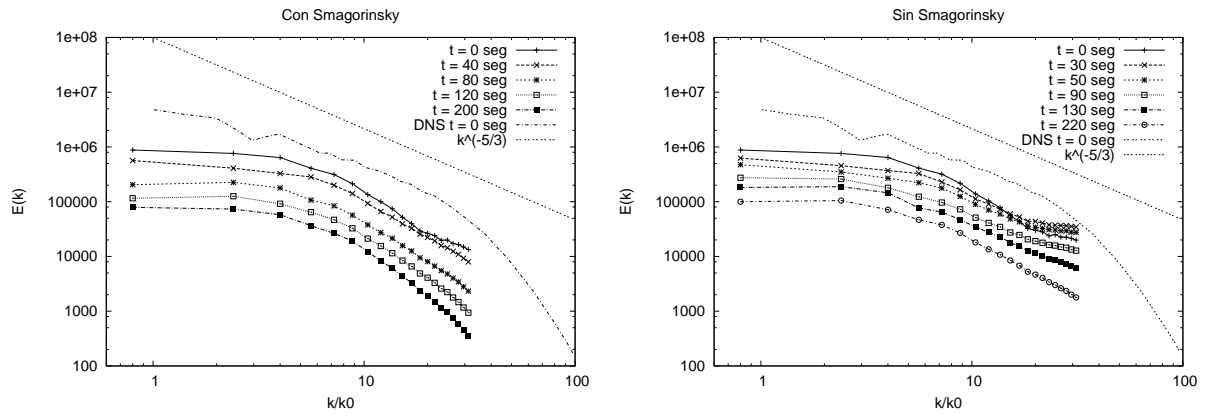


Figura 17: Espectros con y sin modelo de Smagorinsky respectivamente. Se incluyó un espectro DNS como referencia. Notar que en el caso con modelo el apilamiento inicial desaparece, en cambio en el caso sin modelo el apilamiento primero se amplifica y después tiende a desaparecer.

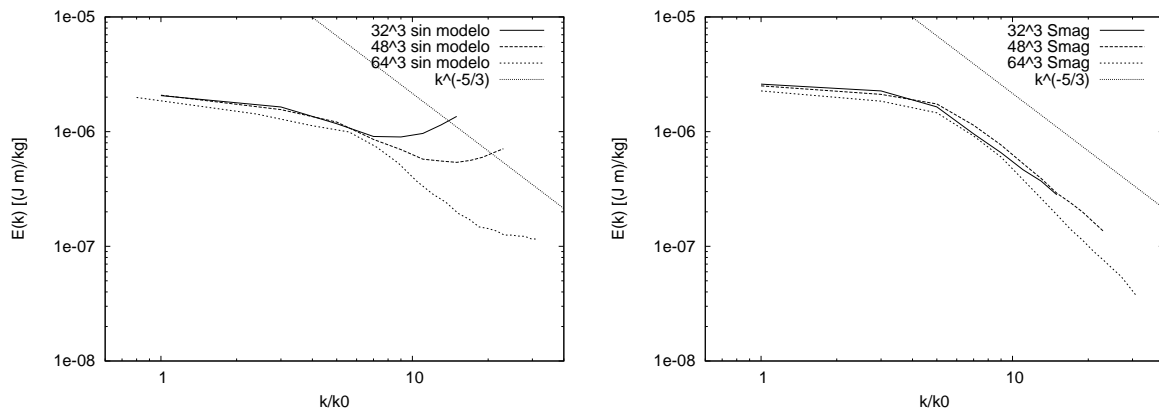


Figura 18: Espectros en función del número de nodos.

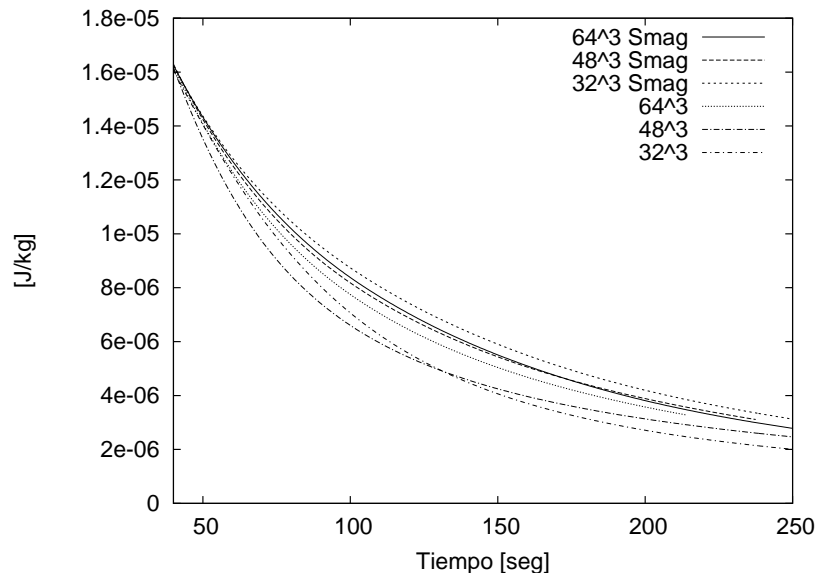


Figura 19: Evolución de la energía para distintas mallas.

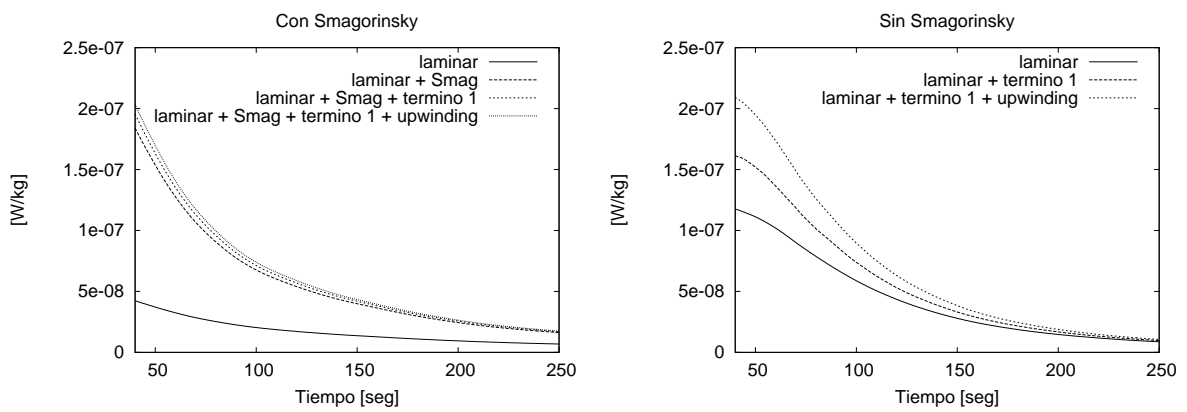


Figura 20: Contribuciones a la disipación término por término.