

UN MÉTODO DE RED DE VÓRTICES INESTACIONARIO MODIFICADO UTILIZANDO PARTÍCULAS VORTICOSAS PARA SIMULACIONES AERODINÁMICAS. PARTE I: FORMULACIÓN MATEMÁTICA.

A MODIFIED UNSTEADY VORTEX LATTICE METHOD USING VORTEX PARTICLES FOR AERODYNAMIC SIMULATIONS. PART I: MATHEMATICAL FORMULATION.

**Santiago Ribero^a, Martín E. Pérez Segura^{a, b}, Agustina C. Aichino^a, Emmanuel
Beltramo^{a, b}, Bruno A. Rocca^d y Sergio Preidikman^{a, b, c}**

^a*Inst. de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina*

^b*Dpto. de Estructuras, Facultad de Cs. Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de
Córdoba, Argentina*

^c*Department of Mechanical Engineering, University of Puerto Rico at Mayagüez, Puerto Rico*

^d*Geophysical Institute (GFI) and Bergen Offshore Wind Centre (BOW), University of Bergen, Norway*

Palabras clave: Método de Red de Vórtices, Método de Partículas Vorticosas, Aerodinámica Inestacionaria.

Resumen. En este trabajo se presenta la formulación matemática y los aspectos más importantes de la implementación numérica de una extensión del método de red de vórtices inestacionario (UVLM) utilizando un método de partículas vorticosas (VPM). En la técnica propuesta, los paneles vorticosos clásicos del UVLM que componen la representación de la estela son "transformados", en cada instante de tiempo, en paneles vorticosos híbridos formados por un segmento vorticoso y un par de partículas vorticosas. La evolución temporal del sistema de partículas resulta de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma de velocidad-vorticidad. Este método híbrido (UVLM-VPM) permite estudiar convenientemente los fenómenos de interacción aerodinámica mutua entre cuerpos sumergidos y sus estelas.

Keywords: Vortex Lattice Method, Vortex Particle Method, Unsteady Aerodynamics.

Abstract. This work presents the mathematical formulation and the most important aspects of the numerical implementation of an extension of the Unsteady Vortex Lattice Method (UVLM) using a Vortex Particle Method (VPM). In the proposed technique, the classical vortex panels of the UVLM that represent the wake representation are "transformed", at each time step, into hybrid vortex panels formed by a vortex segment and a pair of vortex particles. The temporal evolution of the particle system results from solving the Navier-Stokes equations in their velocity-vorticity form. This hybrid method (UVLM-VPM) conveniently allows for the study of mutual aerodynamic interaction phenomena between immersed bodies and their wakes.

1. INTRODUCCIÓN

El modelado y la simulación del campo de movimiento de un fluido representa un verdadero desafío a la hora de describir la física subyacente en aplicaciones denominadas de interacción aerodinámica compleja (IAC). Los problemas de IAC abarcan desde la perturbación global del campo de movimiento por el efecto de las estelas provenientes de otros cuerpos inmersos en la corriente libre hasta fenómenos de interacción local entre las estelas sobre el propio cuerpo o entre las estelas, el cuerpo y alguna superficie cercana. Como ejemplos, se pueden citar el impacto de las estelas entre molinos en una granja eólica, la alteración del campo de movimiento alrededor de una formación en tándem de vehículos aéreos o el flujo alrededor de un helicóptero y la aerodinámica del rotor por efecto del suelo al momento del despegue (Alvarez y Ning, 2022), entre otros. La Fig. 1 muestra, de modo esquemático, un resumen parcial de los ejemplos citados de IAC.



Figura 1: Casos de aplicación de interacción aerodinámica compleja

Los modelos de estelas libres en aerodinámica subsónica, por lo general, son resueltos mediante el método de red de vórtices inestacionario (UVLM, por sus siglas es inglés). El UVLM es un método basado en una red de filamentos vorticosos, permite determinar las cargas aerodinámicas actuantes sobre las superficies sustentadoras y modelar las estelas libres que se convectan desde los bordes de fuga de estas superficies con buena precisión y a un bajo costo computacional. Desde el punto de vista de la formulación, el UVLM presenta algunas limitaciones en el modelado de las estelas libres cuando dichas estelas impactan entre ellas o sobre otras superficies inmersas en la corriente fluida, como ocurre en los problemas de IAC. Una alternativa que encontraron los investigadores a estas limitaciones fue el desarrollo de una técnica híbrida para el estudio de IAC. Esta técnica se basa en la *transformación* de los filamentos vorticosos en partículas vorticosas.

En el método de partículas vorticosas (VPM, por sus siglas es inglés), las estelas libres son modeladas por regiones compactas de vorticidad. El VPM permite extender al UVLM, ya que las partículas que se convectan, conservan su estructura vorticosa como puntos materiales (comportamiento *Lagrangiano*). Además de su capacidad de representar sistemas físicamente complejos, se asegura la convergencia numérica de la solución, precisión, eficiencia y buen rendimiento computacional (Mimeau y Mortazavi, 2021).

En este trabajo, el primero de una serie de dos trabajos, se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma de velocidad-vorticidad, seguidas de una breve discusión acerca

de las ventajas y desventajas de los métodos vorticosos basados en filamentos y partículas. Posteriormente, se presenta una propuesta para la generación de un panel vorticoso híbrido, partiendo de un panel vorticoso clásico, que es extendido a múltiples paneles. Se incluyen las ecuaciones temporales que describen el cambio de posición y vorticidad de cada partícula. Finalmente, se introduce una técnica de relajación del campo de vorticidad, que permite llevar a cabo simulaciones de largos períodos de tiempo.

2. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En un flujo newtoniano, incompresible y de viscosidad constante, la cantidad de movimiento de un elemento fluido diferencial está gobernado por la Ecuación de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de velocidad y $p = p(\mathbf{r}, t)$ es el campo de presión, ambos en la posición \mathbf{r} y en el tiempo t , ρ y ν son la densidad y la viscosidad cinemática del fluido, respectivamente. Tomando el rotor sobre la Ec. (1) se elimina la dependencia del campo de presión. Esto es,

$$\frac{D}{Dt} \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

donde $\frac{D}{Dt}(\cdot)$ representa el operador derivada material, $\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\cdot)$, y, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u}$ es el campo de vorticidad. La Ec. (2) es la forma vorticoso de la ecuación de cantidad de movimiento de Navier-Stokes y es conocida como la ecuación de vorticidad. Esta ecuación depende solo de $\boldsymbol{\omega}$, ya que \mathbf{u} puede ser calculada a través de la ley de Biot-Savart, como sigue:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} d\mathbf{r}_0. \quad (3)$$

Típicamente, los modelos de aerodinámica subsónica permiten, con un buen nivel de aproximación, modelar el campo de vorticidad, contenido en las capas límites de los cuerpos sumergidos y en las estelas que de ellos se desprenden, como sábanas vorticosas. Una sábana vorticoso representa una discontinuidad en el campo de velocidad tangencial a ella, es decir, la dimensión de la integral de la Ec. (3) es reducida de un volumen a una superficie. Por extensión, la dimensión de la integral puede ser reducida nuevamente de una superficie a una curva (*filamento vorticoso*) e, incluso, de una curva a un punto (*partícula vorticoso*), dando origen a diversos métodos basados en singularidades del campo de vorticidad.

2.1. Breve discusión sobre los métodos de filamentos y de partículas

La necesidad de discutir los métodos basados en filamentos y los métodos basados en partículas yace en la naturaleza de la ecuación de vorticidad, Ec. (2), y el rol que ella desempeña en cada método.

En flujos tridimensionales, la ecuación de vorticidad está definida por la difusión viscosa y por el término de *stretching* o estiramiento. La existencia de este término modifica la dinámica del fluido y es, en efecto, el responsable de gobernar los mecanismos de intensificación y de reorientación del campo de vorticidad. A instancia de este trabajo, la viscosidad es despreciable o nula ($\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$), idealmente.

La conservación espacial de la circulación dada por el teorema de Kelvin explica la robustez de las técnicas basadas en filamentos vorticosos. El campo de vorticidad, modelado por la

sábana vorticiosa, se discretiza espacialmente mediante un conjunto de curvas que se unen en determinados puntos para dar origen a una red o malla de anillos. La solución temporal de la ecuación de vorticidad no es necesaria, ya que el término de *stretching* queda implícitamente definido por la configuración de la red en cada instante de tiempo. En una implementación efectiva de un método de filamentos es necesario rastrear un número finito de puntos materiales, llamados *nodos*. Los nodos deben vincularse entre sí, de modo que, mediante algún procedimiento de interpolación, se logren reconstruir las líneas vorticosas del campo de vorticidad.

Los métodos basados en partículas se muestran más flexibles en aplicaciones en las que el campo de movimiento se vuelve complejo. El campo de vorticidad, nuevamente representado por una sábana vorticiosa o por una colección de ellas, se discretiza espacialmente mediante un conjunto de partículas vorticosas, cuya vorticidad es modelada por una función de soporte compacto. La solución de la ecuación de vorticidad es explícita y, por lo tanto, la vorticidad de cada partícula es resultado del efecto del *stretching*. El grado de libertad de cada partícula permite que los obstáculos sean sorteados con mayor facilidad, lo cual constituye su principal ventaja sobre los métodos de filamentos. No obstante, es necesario cuidar de algunos aspectos formales, ya que estas técnicas requieren de ajustes para simulaciones de largos períodos de tiempo.

3. PANEL VORTICOSO HÍBRIDO

El UVLM es un método que se basa en la discretización de las sábanas vorticosas utilizando segmentos vorticosos rectos de longitud finita. Este enfoque crea una estructura compuesta por una serie de elementos cuadriláteros conocidos como "paneles vorticosos". En la implementación del UVLM (Pérez Segura, 2018), se resuelve un sistema de ecuaciones lineales dado por la condición de no penetración aplicada en cada panel en cada paso de tiempo. Las incógnitas de este sistema son los valores de circulación en cada uno de los paneles de la malla que representa la superficie sustentadora. Posteriormente, los segmentos ubicados en las líneas de desprendimiento son convectados al seno del campo de fluido, siguiendo la velocidad local de cada nodo, y se incorporan a la formación de la estela.

El panel vorticoso híbrido propuesto surge de una transformación sencilla en la que un par de partículas se generan a partir de tres de los cuatro segmentos que componen al panel vorticoso clásico, ubicándolas en los nodos correspondientes, como se muestra en la Fig. 2. Esta elección de los nodos como puntos para colocar las partículas resulta ser una idea natural, basada en el hecho de que son puntos geométricos conocidos desde los cuales se reconstruyen las líneas de vorticidad en el UVLM. La transformación del panel no implica que todos los segmentos desaparezcan. Esto tiene su razón y es que el segmento que no es transformado en partículas sigue formando parte de la red de vórtices. De esta forma, se logra mantener una red de vórtices para modelar superficies sustentadoras y un conjunto de partículas para modelar estelas libres.

Un panel vorticoso híbrido es, por lo tanto, el resultado de una combinación de un segmento vorticoso y de dos partículas vorticosas, en donde cada partícula p_i tendrá una identidad única dada por su posición $\mathbf{r}_{p_i}(t)$ y por su vector intensidad de vorticidad $\boldsymbol{\alpha}_{p_i}(t)$. La magnitud, dirección y sentido de este vector, será función de la intensidad de los segmentos concurrentes a la posición de cada partícula. Esto es,

$$\mathbf{r}_{p_i} = \mathbf{r}_{i+1}, \quad \boldsymbol{\alpha}_i = \Gamma_i \mathbf{L}_i + \frac{\Gamma_{i+1}}{2} \mathbf{L}_{i+1}, \quad i = 1, \quad (4a)$$

$$\mathbf{r}_{p_i} = \mathbf{r}_{i+1}, \quad \boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\Gamma_i}{2} \mathbf{L}_i + \Gamma_{i+1} \mathbf{L}_{i+1}, \quad i = 2, \quad (4b)$$

en donde, $\mathbf{r}_{i+1}(t)$ es la posición del nodo $i+1$, Γ_i es la circulación del segmento i , $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$, es el vector que define al segmento i . En la Fig. 2 se muestra un esquema de generación de un panel vorticoso híbrido a partir de un panel vorticoso clásico. En primer lugar, se muestra un panel vorticoso con circulación, Γ . En segundo lugar, se muestran los cuatro segmentos y los cuatro nodos que conforman el panel. En tercer lugar, se muestra la dirección de la condensación de los segmentos sobre las partículas. Y por último, en cuarto lugar, se muestra el panel vorticoso híbrido.

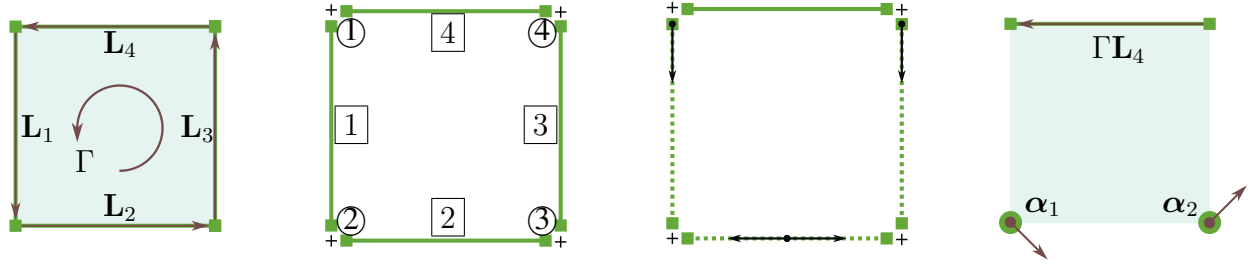


Figura 2: Panel vorticoso híbrido: secuencia de transformación

3.1. Extensión a una red de paneles

La extensión a más de un panel es trivial. En la Fig. 3 se muestra un esquema de una red de paneles híbridos. Matemáticamente, se puede generalizar la transformación de los segmentos a n partículas como:

$$\mathbf{r}_{p_1} = \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \Gamma_1 \left(\mathbf{L}_n + \frac{1}{2} \mathbf{L}_1 \right), \quad (5a)$$

$$\mathbf{r}_{p_i} = \mathbf{r}_i, \quad \boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\Gamma_{i-1}}{2} \mathbf{L}_{i-1} + (\Gamma_i - \Gamma_{i-1}) \mathbf{L}_{n-1+i} + \frac{\Gamma_i}{2} \mathbf{L}_i, \quad i = 2, n-1, \quad (5b)$$

$$\mathbf{r}_{p_n} = \mathbf{r}_n, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \Gamma_{n-1} \left(\mathbf{L}_{2n-1} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_{n-1} \right). \quad (5c)$$

4. ECUACIONES DE VELOCIDAD Y VORTICIDAD DE LOS SEGMENTOS Y DE LAS PARTÍCULAS

El campo de velocidad, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, es aproximado por un campo de velocidad discreto, $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$, que deriva del modelo de vorticidad discreta, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_\infty + \left[\sum_{s=1}^{n_s} \tilde{\mathbf{u}}_\delta^s + \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p \right], \quad (6a)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u} \approx \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}, t) = \left[\sum_{s=1}^{n_s} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\delta^s + \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p \right], \quad (6b)$$

donde, \mathbf{u}_∞ es la velocidad de la corriente libre, $\tilde{\mathbf{u}}_\delta^s(\mathbf{r}, t)$ es la velocidad asociada al segmento s , $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\delta^s(\mathbf{r}, t)$ es la vorticidad del segmento s , n_s es el número de segmentos, $\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p(\mathbf{r}, t)$ es la velocidad asociada a la partícula p , $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p(\mathbf{r}, t)$ es la vorticidad de la partícula p , y n_p es el número de partículas.

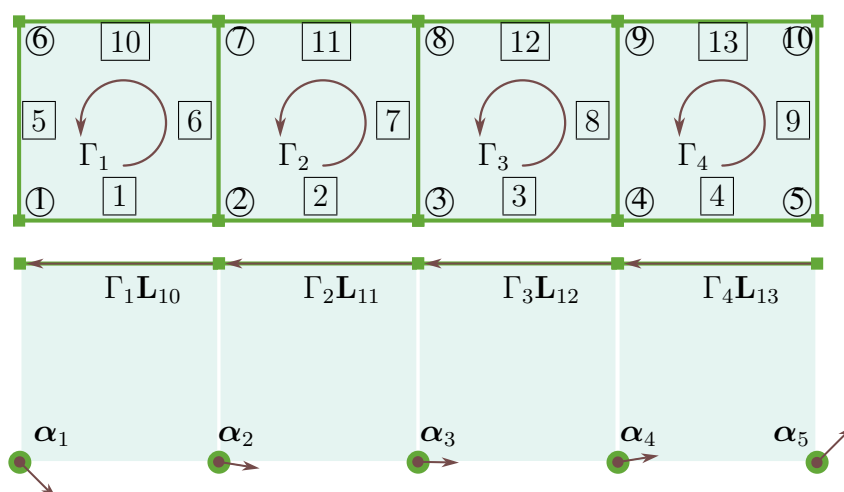


Figura 3: Red de paneles clásicos e híbridos

4.1. Segmento vorticoso recto de longitud finita

Un segmento vorticoso recto, de longitud finita y circulación constante, es la forma de filamento vorticoso que se utiliza en el método de red de vórtices inestacionario (UVLM). La ley de Biot-Savart especializada para un segmento vorticoso de longitud finita está dada por (Preidikman, 1998)

$$\tilde{\mathbf{u}}^s(\mathbf{r}, t) = \frac{\Gamma^s}{4\pi} \frac{\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s}{\|\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s\|_2} \mathbf{L}^s \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1^s - \hat{\mathbf{e}}_2^s), \quad (7)$$

donde, Γ^s es la circulación del segmento s , $\|\cdot\|_2$ es la norma 2 de un vector, $\hat{\mathbf{e}}_1^s(\mathbf{r}, t)$ es el versor del vector posición \mathbf{r}_1^s , $\hat{\mathbf{e}}_2^s(\mathbf{r}, t)$ es el versor del vector posición \mathbf{r}_2^s , $\mathbf{r}_1^s = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i^s$ es el vector posición entre el punto de evaluación \mathbf{r} , y el vector posición del origen del segmento \mathbf{r}_i^s , y $\mathbf{r}_2^s = \mathbf{r} - \mathbf{r}_f^s$ es el vector posición entre el punto de evaluación, \mathbf{r} , y el vector posición del final del segmento, \mathbf{r}_f^s , y $\mathbf{L}^s = \mathbf{r}_1^s - \mathbf{r}_2^s$ es el segmento de recta vectorial que define al segmento vorticoso. En la Fig. 4 se muestra un esquema con todas las definiciones geométricas enumeradas. La Ec. 7 es singular cuando el vector \mathbf{L} y \mathbf{r}_1 son paralelos. Por ello, se recurre a utilizar una versión no singular de la ley de Biot-Savart para los segmentos,

$$\tilde{\mathbf{u}}_\delta^s(\mathbf{r}, t) = \frac{\Gamma^s}{4\pi} \frac{\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s}{\|\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s\|_2^2 + \|\delta \mathbf{L}^s\|_2^2} \mathbf{L}^s \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1^s - \hat{\mathbf{e}}_2^s), \quad (8)$$

donde δ es el parámetro de suavizado.

4.2. Partícula vorticosas con núcleo regularizado

Una partícula vorticosas con núcleo regularizado es un tipo de partícula en el que la singularidad ha sido removida por alguna función de regularizado o suavizado. En este trabajo se utiliza un regularizado de alto orden (Winckelmans y Leonard, 1993). La ley de Biot-Savart especializada para una partícula de este tipo, está dada por

$$\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \frac{5}{2}\sigma_p^2}{(\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \sigma_p^2)^{5/2}} \boldsymbol{\alpha}_p \times \mathbf{r}_1^p, \quad (9)$$

donde, $\mathbf{r}_1^p(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_p$, es el vector posición entre el punto de evaluación \mathbf{r} , y la posición de la partícula $\mathbf{r}_p(t)$, $\boldsymbol{\alpha}_p(t)$ es el vector intensidad de la partícula, y σ_p es el radio de la burbuja

de suavizado. A fin de asegurar la convergencia del método, σ_p debe contener al menos a una partícula vecina, es decir, si d es la distancia mínima entre dos partículas vecinas, se debe cumplir la relación $\sigma_p/d > 1$. En la Fig. 4 se muestra un esquema con todas las definiciones geométricas enumeradas.

El campo de vorticidad, $\bar{\omega}_\sigma^p$, modelado por una partícula vorticiosa, está dado por

$$\bar{\omega}_\sigma^p(\mathbf{r}, t) = -\nabla^2 \tilde{\psi}_\sigma^p = \alpha_p \zeta_\sigma^p, \quad \zeta_\sigma^p(\mathbf{r}, \sigma_p) = \frac{15}{8\pi} \frac{\sigma_p^4}{(\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \sigma_p^2)^{7/2}}, \quad (10)$$

donde, $\tilde{\psi}_\sigma^p$, es el potencial vectorial de la partícula, $\zeta_\sigma^p(\mathbf{r}, \sigma_p)$, es la función de suavizado algebraico de alto orden. El campo de vorticidad que se reconstruye a partir del campo de velocidad muestra la siguiente discrepancia

$$\tilde{\omega}_\sigma^p - \bar{\omega}_\sigma^p = \nabla \left[\nabla \cdot \tilde{\psi}_\sigma^p \right]. \quad (11)$$

Un resultado de la primera y segunda ley de Helmholtz de la vorticidad (Cottet y Koumoutsakos, 2000) indica que, independientemente de la forma en la que evoluciona, un filamento en un flujo no viscoso e incompresible siempre debe formar una curva cerrada sobre sí mismo (anillo) o debe tener sus extremos en la superficie que limita al dominio. El término de lado derecho de la Ec. (11) se puede interpretar como el aporte de vorticidad necesario para que se cumplan las leyes de Helmholtz. Este término no contribuye a la ley de Biot-Savart por ser resultado del gradiente de un campo escalar. Matemáticamente, se expresa como

$$\nabla \left[\nabla \cdot \tilde{\psi}_\sigma^p \right] = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \frac{21}{2}\sigma_p^2}{(\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \sigma_p^2)^{7/2}} (\mathbf{r}_p^1 \cdot \alpha_p) \mathbf{r}_p^1 - \frac{\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \frac{5}{2}\sigma_p^2}{(\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \sigma_p^2)^{5/2}} \alpha_p \right). \quad (12)$$

El campo de vorticidad, $\tilde{\omega}_\sigma^p$, derivado del rotor del campo de velocidad, tiene la siguiente expresión

$$\tilde{\omega}_\sigma^p = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \frac{21}{2}\sigma_p^2}{(\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \sigma_p^2)^{7/2}} (\mathbf{r}_p^1 \cdot \alpha_p) \mathbf{r}_p^1 - \frac{\|\mathbf{r}_p^1\|_2^4 + \frac{7}{2}\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2\sigma_p^2 - 5\sigma_p^4}{(\|\mathbf{r}_p^1\|_2^2 + \sigma_p^2)^{7/2}} \alpha_p \right]. \quad (13)$$

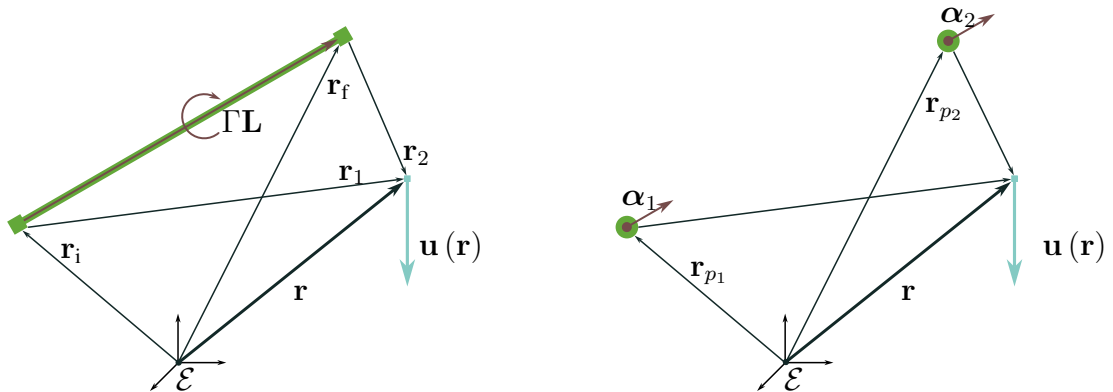


Figura 4: Definiciones geométricas. Segmento vorticioso (izquierda) y partículas vorticiosas (derecha)

5. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN

El cambio de posición y de vorticidad de cada partícula está dado por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_p(t) = \tilde{\mathbf{u}}|_{\mathbf{r}_p} \quad (14a)$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\alpha}_p(t) = \left[\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}|_{\mathbf{r}_p} \right] \boldsymbol{\alpha}_p, \quad (14b)$$

El *esquema transpuesto* (∇^t) del campo de velocidad es matemáticamente análogo al *esquema clásico* (∇). Incluso, un *esquema mixto* del gradiente de velocidades puede ser formulado ($\nabla + \nabla^t$). Esto se muestra sencillamente a partir de la identidad $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\omega} = [\nabla \mathbf{u} - \nabla^t \mathbf{u}] \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. La validez de esta identidad, extendida al modelo discreto, es resultado directo de que el campo de vorticidad (discreto) se mantenga cercano al rotor del campo de velocidad (discreto), es decir, está limitada a que la Ec. (11) se mantenga cercana a cero.

El esquema transpuesto se prefiere en el modelado de flujo no viscoso por tener la propiedad de conservar la vorticidad total de las partículas y se recomienda el uso del gradiente de velocidad clásico cuando el modelo incorpora algún esquema de difusión viscosa (Cottet y Koumoutsakos, 2000).

5.1. Esquema transpuesto del gradiente de velocidad

La expresión generalizada del gradiente de velocidad transpuesto, $\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}$, se escribe como

$$\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}|_{\mathbf{r}_p} = \sum_{s=1}^{n_s} \nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\delta^s + \sum_{p=1}^{n_p} \nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p, \quad (15)$$

donde, $\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\delta^s$ es el gradiente de velocidad transpuesto del segmento s y $\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p$ es el gradiente de velocidad transpuesto de la partícula p , ambos evaluados en \mathbf{r}_p . En cada caso, el gradiente del campo de velocidad se obtiene de aplicar el operador gradiente a la Ec. (8) y a la Ec. (9), respectivamente. De forma simplificada se pueden escribir como

$$\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\delta^s = \nabla^t (k_s A_s B_s \mathbf{C}_s), \quad (16a)$$

$$\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p = \nabla^t (k_p A_p \mathbf{B}_p), \quad (16b)$$

donde los escalares k_s , A_s , B_s , k_p y A_p y los vectores \mathbf{C}_s y \mathbf{B}_p tienen la siguiente expresión

$$k_s = \frac{\Gamma^s}{4\pi}, \quad k_p = \frac{1}{4\pi}, \quad (17a)$$

$$A_s = \frac{1}{\|\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s\|_2^2 + \|\delta \mathbf{L}^s\|_2^2}, \quad A_p = \frac{\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \frac{5}{2}\sigma_p^2}{(\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \sigma_p^2)^{5/2}}, \quad (17b)$$

$$B_s = \mathbf{L}^s \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1^s - \hat{\mathbf{e}}_2^s), \quad \mathbf{B}_p = \boldsymbol{\alpha}_p \times \mathbf{r}_1^p, \quad (17c)$$

$$\mathbf{C}_s = \mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s. \quad (17d)$$

Luego de operar algebraicamente sobre la Ec. (16a) y la Ec. (16b), se llega a siguientes expresiones simbólicas

$$\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\delta^s = k_s ((A_s \nabla B_s + B_s \nabla A_s) \otimes \mathbf{C}_s + A_s B_s \nabla^t \mathbf{C}_s), \quad (18a)$$

$$\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p = k (\nabla A_p \otimes \mathbf{B}_p + A_p \nabla^t \mathbf{B}_p), \quad (18b)$$

donde los vectores ∇A_s , ∇B_s y ∇A_p y los tensores ∇C_s y ∇B_p se expresan como

$$\nabla A_s = \frac{2 [\mathbf{L}^s \times (\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s)]}{(\|\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s\|_2^2 + \|\delta \mathbf{L}^s\|_2^2)^2}, \quad \nabla A_p = \left[13 \frac{(\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \frac{7}{2} \sigma_p^2)}{(\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \sigma_p^2)^{7/2}} \right] \mathbf{r}_1^p, \quad (19a)$$

$$\nabla B_s = \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}_1^s\|_2} - \frac{1}{\|\mathbf{r}_2^s\|_2} \right) \mathbf{L}^s - \left(\frac{\mathbf{r}_1^s \otimes \mathbf{r}_1^s}{\|\mathbf{r}_1^s\|_2^3} - \frac{\mathbf{r}_2^s \otimes \mathbf{r}_2^s}{\|\mathbf{r}_2^s\|_2^3} \right) \mathbf{L}^s, \quad \nabla B_p^t = -\boldsymbol{\alpha}_p \times (\cdot) \quad (19b)$$

$$\nabla^t C_s = [\tilde{\mathbf{L}}^s]^t = -\mathbf{L}^s \times (\cdot). \quad (19c)$$

5.2. Relajación de la divergencia del campo de vorticidad de las partículas

Un esquema de relajación de la divergencia del campo de vorticidad de las partículas ($\nabla \cdot \bar{\omega}_\sigma$) consiste en permitir que el vector intensidad de la partícula cambie de dirección y de módulo con el fin de aproximar el campo de vorticidad $\bar{\omega}_\sigma$ al campo de vorticidad $\tilde{\omega}$. El *método de filtrado de divergencia* es un esquema de relajación propuesto por Pedrizzetti (Pedrizzetti, 1991). Este método ha mostrado resultados satisfactorios, aunque no está demostrada su consistencia con la física del problema. En cada paso de tiempo, la intensidad de vorticidad de la partícula es modificada utilizando el filtro lineal,

$$\boldsymbol{\alpha}_p^n = (1 - f \Delta t) \boldsymbol{\alpha}_p + f \Delta t \|\boldsymbol{\alpha}_p\|_2 \hat{\mathbf{e}}_{\tilde{\omega}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_{\tilde{\omega}}(\mathbf{r}_p) = \frac{\tilde{\omega}}{\|\tilde{\omega}\|} \Big|_{\mathbf{r}_p}, \quad (20)$$

donde, $\boldsymbol{\alpha}_p^n$, es el vector intensidad de la partícula p luego de aplicar el filtrado, $\tilde{\omega} = \sum_{s=1}^{n_s} \tilde{\omega}_\delta^s + \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\omega}_\sigma^p$, f es un factor de frecuencia que se sintoniza con respecto a la escala de tiempo del fenómeno físico en estudio y $\hat{\mathbf{e}}_{\tilde{\omega}}$ es el versor local del campo de vorticidad libre de divergencia. En la Figura (5) se muestra un esquema del filtro de Pedrizzetti en la que se muestra el mecanismo de reorientación y re-intensificación de vector $\boldsymbol{\alpha}_p$ en función del factor $f \Delta t$, siendo $\boldsymbol{\alpha}_p^n = \|\boldsymbol{\alpha}_p\| \hat{\mathbf{e}}_\alpha$ si $f \Delta t = 0$ y $\boldsymbol{\alpha}_p^n = \|\boldsymbol{\alpha}_p\| \hat{\mathbf{e}}_{\tilde{\omega}}$ si $f \Delta t = 1$.

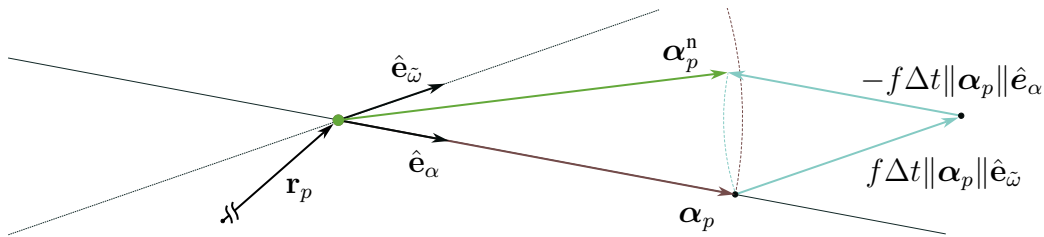


Figura 5: Filtro lineal de Pedrizzetti

6. CONCLUSIONES

En resumen, este trabajo ha introducido un enfoque novedoso y efectivo para la generación de paneles vorticosos híbridos que combinan segmentos y partículas. Estos paneles se componen de segmentos vorticosos rectos y de longitud finita, que son clásicos en el método de red de vórtices inestacionario (UVLM). La técnica propuesta se basa en la conservación de la intensidad del segmento vorticoso al transformarlo en partículas, lo que brinda una manera sencilla de extender el UVLM mediante el método de partículas vorticosas (VPM).

Además de presentar la formulación matemática completa para la implementación de paneles vorticosos híbridos, este trabajo también ha demostrado cómo se puede lograr un acoplamiento efectivo entre el UVLM y VPM. Las ecuaciones desarrolladas para describir la cinemática de las partículas y el esquema de relajación del campo de vorticidad proporcionan las bases necesarias para realizar simulaciones aerodinámicas a lo largo de períodos extensos.

En última instancia, este enfoque híbrido tiene el potencial de ampliar significativamente las capacidades de resolución en problemas aerodinámicos complejos, al combinar la solidez de los métodos de segmentos con la versatilidad de los métodos de partículas, lo cual podría llevar a avances importantes en la simulación y comprensión de fenómenos aerodinámicos.

REFERENCIAS

- Alvarez E.J. y Ning A. Reviving the vortex particle method: A stable formulation for meshless large eddy simulation. *Arxiv*, 2206.03658, 2022.
- Cottet G.H. y Koumoutsakos P.D. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2000.
- Mimeau C. y Mortazavi I. A review of vortex methods and their applications: From creation to recent advances. *Fluids*, 2021. doi:10.3390/fluids6020068.
- Pedrizzetti G. Insight into singular vortex flows. *Fluid Dynamics Research*, 10:101–115, 1991.
- Preidikman S. Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems. *Virginia Tech*, 1998.
- Pérez Segura M.E. *Implementación Computacional del Método de Red de Vórtices Inestacionario: Una Versión Basada en los Paradigmas de Programación Orientada a Objetos y Co-Simulación*. Universidad Nacional de Córdoba, 2018.
- Winckelmans G.S. y Leonard A. Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows. *Journal of computational physics*, 109:247–273, 1993.