

DINAMICA NO-LINEAL DE VIGAS FLEXIBLES CURVAS CON GRANDES DEFORMACIONES

Juan C. Figueroa B.¹, Gabriel Barrientos R.², Roberto Riquelme S.³ y Rubens Sampaio⁴

¹Departamento de Ingeniería Mecánica - Universidad del Bío-Bío
Av. Collao 1202 – Casilla 5-C – Concepción – CHILE
e-mail : jfiguero@ubiobio.cl

²Departamento de Ingeniería Mecánica - Universidad de Concepción
Casilla 160-C – Concepción – CHILE
e-mail : gbarrien@udec.cl

³Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Concepción
Casilla 160-C – Concepción – CHILE
e-mail : rriquelm@ing-mat.udec.cl

⁴Departamento do Engenharia Mecânica - Universidade Católica do Rio de Janeiro
Marquês de Sao Vicente 225, Gávea, RJ, Brasil.
CEP:22453-900
e-mail : rsampaio@mec.puc-rio.br

Palabras Clave: Vigas Curvas, No-linealidades geométricas, Elementos Finitos.

Resumen. *Se presenta un modelo de vigas curvas no-lineal el cual es una generalización de la teoría de vigas propuesta por los hermanos E. y F. Cosserat y popularizada por J.C. Simo, para el estudio del comportamiento dinámico de estructuras. Se implementa un programa computacional escrito en ambiente Matlab el cual permite simular la dinámica de elementos flexibles de vigas curvas en el espacio considerando grandes desplazamientos (y/o grandes rotaciones) y grandes deformaciones. Se analizan los resultados obtenidos en simulaciones de ejemplos estáticos, los cuales permiten realizar la validación del programa. Se desarrollan problemas dinámicos que involucren no-linealidades de tipo geométrico y que permiten considerar la inercia rotacional. Las rotaciones finitas se parametrizan usando el álgebra de los cuaterniones. Se usa una discretización espacial basada en los elementos finitos lineales y una discretización temporal usando el algoritmo de Newmark asociado al esquema de integración de Newton-Raphson. Las comparaciones realizadas en las simulaciones permiten asegurar que los resultados obtenidos presentan una buena exactitud.*

1 INTRODUCCION

En la sociedad contemporánea existe una gran demanda por eficiencia y calidad. Por producir más, mejor y a menor costo. Estas demandas traducidas en términos de la ingeniería mecánica implican la utilización de estructuras más esbeltas en condiciones dinámicas donde la inercia y las variaciones de geometría no se pueden despreciar. Las teorías clásicas de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko resuelven bien problemas típicos de ingeniería, pero no entregan buenas previsiones para situaciones donde se producen grandes desplazamientos (y/o grandes rotaciones) y grandes deformaciones. En este trabajo se presenta una formulación de vigas con curvatura inicial donde son considerados los grandes desplazamientos y las grandes deformaciones. La viga se describe como una curva de centroides y por una familia de secciones planas que son descritas por una base de vectores ortonormales. La deformación de la viga es medida comparando una configuración con otra tomada como referencia. El modelo es no-lineal ya que considera la variación de la geometría lo que es necesario cuando trabajamos con cuerpos flexibles. El comportamiento no-lineal se puede deber al comportamiento material o geométrico, o debido a vínculos. Las no-linealidades de tipo material se deben a no-linealidades elásticas, plásticas, viscoelásticas, daño o fragilidad del comportamiento de la estructura. Las no-linealidades geométricas ocurren cuando las deflexiones son grandes y producen cambios significativos en la geometría de la estructura, de manera que las ecuaciones de equilibrio se deben formular para la configuración deformada. La presencia de vínculos como fricción, barreras, huelgos, introducen no-linealidades complejas.

Muchos autores han trabajado en problemas de vigas. Los hermanos Cosserat ¹ fueron los primeros en dar una forma adecuada a la teoría a comienzos del siglo pasado. Después, con el desarrollo de la mecánica de medios continuos, surgieron varios trabajos intentando construir una teoría simple y adecuada a la descripción de estos fenómenos. Existen trabajos fundamentales de Truesdell y Ericksen ², Green y Naghdi ³, Whitman y Da Silva ⁴, Cohen ⁵, Antman ⁶, siendo este último el que dispone de una variada cantidad de referencias sobre el tema. Los primeros trabajos fueron teóricos y sólo con el estudio de ejemplos simples fue posible construir una teoría adecuada. Una vez construida la teoría básica, se descartan algunas generalizaciones que no se muestran útiles, y así fue posible pasar a la simulación numérica de la teoría y su comparación con los hechos. Esto se dio a finales de los 80 y aún existen algunas controversias. La escuela francesa tuvo buenas contribuciones siendo válido resaltar los trabajos de Glowinski y Le-Tellec ⁷, pero fue J.C. Simo ^{8,9,10} en USA quien tuvo el mérito de haber sido uno de los primeros en hacer, y sobretodo, divulgar trabajos explotando aspectos numéricos que atrajeron la atención de los investigadores para esta área. Es por eso que en el desarrollo de este trabajo se adopta la nomenclatura usada por Simo.

Fue Kane ¹¹ uno de los primeros autores en notar que las soluciones sugeridas en las teorías clásicas fallaban, ya que no consideraban los efectos de la rigidez geométrica en sus formulaciones. Uno de los principales problemas de estos métodos es el tratamiento de las rotaciones finitas cuya principal dificultad radica en su naturaleza no conmutativa. Los trabajos de Sharf ¹² y Boutaghou y Erman ¹³ ofrecen una buena visión crítica de los principales modelos que consideran estos efectos geométricos. Los trabajos realizados por Barrientos y Sampaio ^{15, 16, 17, 18}, son considerados como base para el desarrollo de este

trabajo, estos investigadores programaron en plataforma Matlab los modelos presentados por SIMO ^{8, 9, 10} logrando buenos resultados en las simulaciones de problemas de interés con configuraciones rectas.

2 MODELO NO LINEAL DE VIGAS

La configuración de una viga es descrita por una curva denominada curva de centroides y por una familia de secciones planas que es descrita por una tríada de vectores ortonormales, que ofrecen una descripción redundante, pero muy conveniente, de las secciones transversales de la viga. La deformación de la viga es medida comparando una configuración deformada con otra tomada como referencia. El modelo es no lineal, pues considera la variación geométrica de la viga, lo que es necesario cuando se trabaja con cuerpos flexibles. Al ser este un modelo no lineal, son permitidas las grandes deformaciones y son considerados los efectos por corte, por lo tanto, las secciones transversales no se mantienen perpendiculares a la línea de centroides. En este modelo las secciones transversales pueden ser cizalladas y torcidas, pero no cambian su forma.

Se define la curva de centroides Φ_0 como $(S, \tau) \in I \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \Phi_0(S, \tau) \in \mathcal{R}^3$ (1) donde de el parámetro S en $I = [0, L]$ representa la longitud de la línea de centroides en la configuración de referencia y τ es el tiempo $\in \mathcal{R}^+$.

Se define el vector unitario normal $\mathbf{t}_3(S, \tau) \in \mathcal{R}^3$, como el vector normal a la sección transversal de la viga que pasa por $\Phi_0(S, \tau)$.

La familia de planos que pasan por $\Phi_0(S, \tau) \in \mathcal{R}^3$, normales a $\mathbf{t}_3(S, \tau)$ definen las secciones transversales de la viga.

Para cada punto $\Phi_0(S, \tau)$ se puede definir un sistema ortonormal $\{\mathbf{t}_1(S, \tau), \mathbf{t}_2(S, \tau), \mathbf{t}_3(S, \tau)\}$ llamado sistema móvil o intrínseco, tal que (Ver figura 1):

$$\mathbf{t}_3(S, \tau) = \mathbf{t}_1(S, \tau) \times \mathbf{t}_2(S, \tau), \quad (S, \tau) \in I \times \mathcal{R}^+ \quad (2)$$

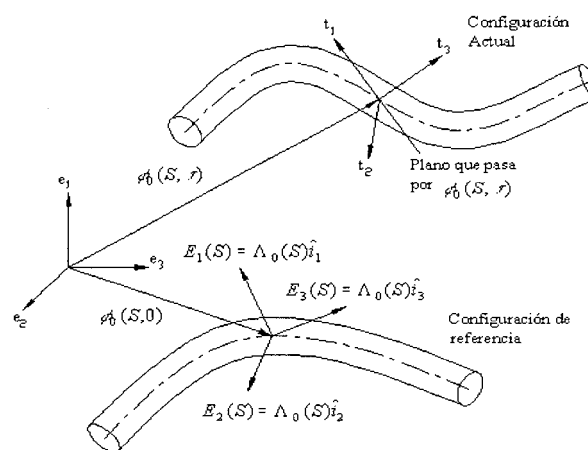


Fig.1 Configuración de la viga

A cada $S \in I$ se le asocia una base fija de referencia que denotaremos por $\{\mathbf{E}_I(S)\}_{I=1,2,3}$, usualmente se considerara $\mathbf{E}_I(S) = \mathbf{t}_I(S, 0)$, $I = 1, 2, 3$.

Es conveniente introducir también una base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$ fija en el espacio inercial. Tenemos por lo tanto, que en cada punto de la curva de centroides existe una superficie que es una sección transversal de la viga. La relación entre las bases $\{\mathbf{E}_I(S)\}_{I=1,2,3}$ y $\{\mathbf{t}_I(S, \tau)\}_{I=1,2,3}$, para cada S fijo está dada por la matriz ortogonal $\mathbf{\Lambda}$ que mide el cambio de orientación de la sección.

$$\mathbf{\Lambda}(S, \tau) = \lambda_{ij}(S, \tau) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j, \quad (S, \tau) \in I \times \mathfrak{R}^+ \quad (3)$$

tal que para todo $(S, \tau) \in I \times \mathfrak{R}^+$

$$\mathbf{t}_I(S, \tau) = \mathbf{\Lambda}(S, \tau) \mathbf{E}_I(S), \quad I = 1, 2, 3 \quad (4)$$

$$\mathbf{t}_I(S, \tau) = \mathbf{\Lambda}_{iI}(S, \tau) \mathbf{e}_i(S), \quad I = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Es bueno notar que el vector $\mathbf{t}_3(S, \tau)$ no es necesariamente tangente a la curva de centroides $\Phi_0(S, \tau)$.

2.1 Derivada de la base móvil

De (4) y (5) tenemos que, para todo $(S, \tau) \in I \times \mathfrak{R}^+$

$$\frac{d}{dS} \mathbf{t}_I(S, \tau) = \tilde{\mathbf{\Omega}}(S, \tau) \mathbf{t}_I(S, \tau) \quad (6)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}(S, \tau) = \left[\frac{d}{dS} \mathbf{\Lambda}(S, \tau) \right] \mathbf{\Lambda}'(S, \tau). \quad (7)$$

Como $\mathbf{\Lambda} \in S0(3)$, donde $S0(3) = \{\mathbf{\Lambda} \in M_{3 \times 3}(\mathfrak{R}) \mid \mathbf{\Lambda}' \mathbf{\Lambda} = \mathbf{1}; \text{ y } \det \mathbf{\Lambda} = 1\}$ es el grupo de Lie no conmutativo de transformaciones ortogonales.

Notemos que $\tilde{\mathbf{\Omega}}(S, \tau)$ es un tensor antisimétrico, es decir, $\tilde{\mathbf{\Omega}}(S, \tau) + \tilde{\mathbf{\Omega}}'(S, \tau) = 0$. Como $\tilde{\mathbf{\Omega}}(S, \tau)$ es un tensor espacial, sus componentes deben ser dadas relativas a la base móvil $\{\mathbf{t}_I(S, \tau)\}_{I=1,2,3}$, lo que expresado en forma matricial es :

$$\left[\tilde{\mathbf{\Omega}}(S, \tau) \right] = - \begin{bmatrix} 0 & k_3(S, \tau) & -k_2(S, \tau) \\ -k_3(S, \tau) & 0 & k_1(S, \tau) \\ k_2(S, \tau) & -k_1(S, \tau) & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

El vector $\boldsymbol{\Omega}(S, \tau) \in \mathfrak{R}^3$ es llamado vector axial de la matriz $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(S, \tau)$, de esta forma se obtiene la siguiente representación relativa al sistema móvil

$$\boldsymbol{\Omega}(S, \tau) = k_1(S, \tau)\mathbf{t}_1(S, \tau) + k_2(S, \tau)\mathbf{t}_2(S, \tau) + k_3(S, \tau)\mathbf{t}_3(S, \tau). \quad (9)$$

Usando (9) podemos escribir (6) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dS}\mathbf{t}_I(S, \tau) = \boldsymbol{\Omega}(S, \tau) \times \mathbf{t}_I(S, \tau), \quad I = 1, 2, 3 \quad (10)$$

2.2 Derivada temporal de la base móvil

La base móvil $\{\mathbf{t}_I(S, \tau)\}_{I=1,2,3}$, definida en (2), dependiente del tiempo, tiene derivada con respecto al tiempo igual a :

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{t}_I(S, \tau) = \dot{\mathbf{t}}_I(S, \tau) = \tilde{\mathbf{W}}(S, \tau) \mathbf{t}_I(S, \tau), \quad I = 1, 2, 3 \quad (11)$$

donde $\tilde{\mathbf{W}}(S, \tau) = \dot{\boldsymbol{\Lambda}}(S, \tau) \boldsymbol{\Lambda}^t(S, \tau)$, $\forall (S, \tau) \in I \times \mathfrak{R}^+$ es un tensor antisimétrico que define la rotación instantánea de la tríada móvil. El vector axial asociado $\mathbf{W}(S, \tau)$ representa la vorticidad del sistema móvil, tal que $\dot{\mathbf{t}}_I(S, \tau) = \mathbf{W}(S, \tau) \times \mathbf{t}_I(S, \tau)$.

Si la línea de centroides en la configuración de referencia es una curva arbitraria, no necesariamente una línea recta y denotando por $\{\hat{\mathbf{i}}_I\}_{I=1,2,3}$ la base canónica en \mathfrak{R}^3 , y debido a que $\{\mathbf{E}_I(S)\}_{I=1,2,3}$ es ortonormal se puede escribir : $\mathbf{E}_I(S) = \boldsymbol{\Lambda}_0(S) \hat{\mathbf{i}}_I$ (12)

Notemos que $\boldsymbol{\Lambda}_0(S) \in S0(3)$, es decir, $\boldsymbol{\Lambda}_0(S) \boldsymbol{\Lambda}_0^t(S) = \mathbf{1}$. De las ecuaciones (4) y (12) se tiene:

$$\mathbf{t}_I(S, \tau) = \boldsymbol{\Lambda}(S, \tau) \boldsymbol{\Lambda}_0(S) \hat{\mathbf{i}}_I \Rightarrow \hat{\mathbf{i}}_I = \boldsymbol{\Lambda}_0^t(S) \boldsymbol{\Lambda}^t(S, \tau) \mathbf{t}_I(S, \tau) \quad (13)$$

Derivando con respecto a S

$$\frac{d\mathbf{t}_I(S, \tau)}{dS} = \left\{ \left[\frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S, \tau) \right] \boldsymbol{\Lambda}_0(S) + \boldsymbol{\Lambda}(S, \tau) \left[\frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}_0(S) \right] \right\} \hat{\mathbf{i}}_I, \text{ y reemplazando } \hat{\mathbf{i}}_I \text{ se}$$

obtiene

$$\frac{d\mathbf{t}_I(S, \tau)}{dS} = \left\{ \left[\frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S, \tau) \right] \boldsymbol{\Lambda}^t(S, \tau) + \boldsymbol{\Lambda}(S, \tau) \left[\frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}_0(S) \right] \boldsymbol{\Lambda}_0^t(S) \boldsymbol{\Lambda}^t(S, \tau) \right\} \mathbf{t}_I(S, \tau).$$

Usando la relación (7) se tiene

$$\frac{d\mathbf{t}_I(S, \tau)}{dS} = \{ \tilde{\mathbf{\Omega}}(S, \tau) + \mathbf{\Lambda}(S, \tau) \tilde{\mathbf{\Omega}}_0(S) \mathbf{\Lambda}'(S, \tau) \} \mathbf{t}_I(S, \tau) \quad (14)$$

donde $\tilde{\mathbf{\Omega}}_0 = \left[\frac{d}{dS} \mathbf{\Lambda}_0(S) \right] \mathbf{\Lambda}'_0(S)$. (15)

Por lo tanto, al considerar una curvatura inicial en la viga, la ecuación (6) toma la forma (14), introduciendo el segundo término en la definición de $\tilde{\mathbf{\Omega}}$. Se tiene que $\bar{\mathbf{\Omega}} = \tilde{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{\Omega}}_0 \mathbf{\Lambda}'$ es una matriz antisimétrica.

Considerando que el movimiento de la viga es una curva de configuración parametrizada por el tiempo, es decir :

$$\Phi_\tau(X, S) := \Phi_0(S, \tau) + \sum_{\Gamma=1}^2 X_\Gamma \mathbf{t}_\Gamma(S, \tau) \quad , \quad \tau \in \mathfrak{R}^+ \text{ es el tiempo}$$

y al igual que en (4) y utilizando (12) se tiene :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_I(S, \tau) &= \mathbf{\Lambda}(S, \tau) \mathbf{E}_I(S), \quad I = 1, 2, 3 \\ \mathbf{t}_I(S, \tau) &= \mathbf{\Lambda}(S, \tau) \mathbf{\Lambda}_0(S) \hat{\mathbf{i}}_I \end{aligned}$$

derivando con respecto al tiempo y reemplazando $\hat{\mathbf{i}}_I$

$$\dot{\mathbf{t}}_I(S, \tau) = \tilde{\mathbf{W}}(S, \tau) \mathbf{t}_I(S, \tau) \quad (15)$$

donde $\tilde{\mathbf{W}}(S, \tau) = \left[\dot{\mathbf{\Lambda}}(S, \tau) \mathbf{\Lambda}'(S, \tau) \right]$ (16)

$\tilde{\mathbf{W}}(S, \tau)$ es un tensor espacial antisimétrico que define el giro de la configuración móvil.

2.3 Ecuaciones del movimiento y potencia interna

Las ecuaciones de equilibrio para el momento lineal y angular tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{n}(S, \tau)}{\partial S} + \bar{\mathbf{n}}(S, \tau) = \dot{\mathbf{L}}_\tau := A_\rho \ddot{\Phi}_0(S, \tau) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}(S, \tau)}{\partial S} + \frac{\partial \Phi_0(S, \tau)}{\partial S} \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}(S, \tau) = \dot{\mathbf{H}}_\tau := \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \times \mathbf{H}_\tau \quad (18)$$

donde \mathbf{n} y \mathbf{m} son las cargas y momentos internos respectivamente en su versión espacial; A_ρ representa la masa por unidad de longitud de la viga; $\ddot{\Phi}_0$ es la aceleración lineal del centroide de la sección, \mathbf{I}_ρ es el tensor de inercia de la sección; \mathbf{W} es el vector de velocidad angular de la sección; $\dot{\mathbf{W}}$ es la aceleración angular de la sección; $\bar{\mathbf{n}}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ son las fuerzas y torques aplicados distribuidos por unidad de longitud. Ambas ecuaciones representan el balance de cantidad de movimiento lineal y angular respectivamente. Aplicando el Principio de las Potencias Virtuales se obtiene la expresión para la potencia de los esfuerzos internos que permiten separar los tipos de deformaciones presentes en este modelo.

$$\Pi = \int_0^L [\mathbf{N} \cdot \dot{\Gamma} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}}] dS \quad (19)$$

donde $\dot{\Gamma}$ representa el vector deformación en su configuración material que contiene las componentes de tracción (dirección \mathbf{t}_3) y corte (direcciones \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2); $\dot{\mathbf{K}}$ representa el vector deformación material que contiene las componentes de torsión (dirección \mathbf{t}_3) y flexión (direcciones \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2); \mathbf{N} representa las fuerzas internas materiales en la sección y \mathbf{M} los momentos internos materiales.

Denotando a la variación admisible de Φ como $\boldsymbol{\eta}(S, \tau) := (\boldsymbol{\eta}_0(S, \tau), \Theta(S, \tau)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, y representando al conjunto de estas variaciones admisibles por:

$$T_\Phi C = \left\{ \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_0, \Theta) \mid \boldsymbol{\eta}_0|_{S \in \{0, L\}} = \Theta|_{S \in \{0, L\}} = 0 \right\}.$$

Se tiene que al multiplicar $\boldsymbol{\eta}(S, \tau)$ por las ecuaciones de balance se obtiene la formulación débil, la cual escrita en forma material es:

$$G_{din}(\Phi, \boldsymbol{\eta}) = - \int_0^L \left\{ A_\rho \ddot{\Phi}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 + \Lambda \left[\mathbf{J}_\rho \Lambda^t \dot{\mathbf{W}} + \Lambda^t \dot{\mathbf{W}} \times (\mathbf{J}_\rho \Lambda^t \mathbf{W}) \right] \cdot \Theta \right\} dS + G(\Phi, \boldsymbol{\eta}) = 0$$

Con:

$$G(\Phi, \boldsymbol{\eta}) = \int_0^L \left\{ \mathbf{N} \cdot \Lambda^t \left[\frac{d\boldsymbol{\eta}_0}{dS} - \Theta \times \frac{d\Phi_0}{dS} \right] + \mathbf{M} \cdot \Lambda^t \frac{d\Theta}{dS} \right\} dS - \int_0^L (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \Theta) dS. \quad (20)$$

La forma débil obtenida es altamente no lineal, por lo que debe ser linealizada para poder resolver el problema en forma numérica. Para obtener la forma débil linealizada de la ecuación de balance se utilizan procedimientos de linealización consistentes, haciendo uso de las derivadas direccionales.¹⁰

La discretización espacial de la versión temporal discreta de la formulación débil se realiza usando el método de los elementos finitos. Ello conduce a la siguiente versión espacial discreta linealizada de la formulación débil, lo que permite obtener las matrices de rigidez y el vector de carga asociados al esquema de los elementos finitos.

$$LG_{din.(n+1)}^{(i)} \approx \sum_{I,J=1}^N \eta_I \cdot \left[\mathbf{P}_I(\Phi_{n+1}^{(i)}) + \mathbf{K}_{IJ}(\Lambda_n, \Phi_{n+1}^{(i)}) \Delta \Phi_{n+1,J}^{(i)} \right] = 0 \quad (21)$$

donde L representa la parte lineal del funcional $G_{din.(n+1)}$; $\mathbf{P}_I(\Phi_{n+1}^{(i)})$ representa el vector de fuerzas residuales en la iteración del esquema de integración de Newton-Raphson, $\mathbf{K}_{IJ}(\Lambda_n, \Phi_{n+1}^{(i)})$ es la matriz de rigidez tangente dinámica acoplando los grados de libertad correspondientes a los nodos I y J de la discretización espacial, esta matriz está formada por $\mathbf{M}_{IJ}(\Lambda_n, \Phi_{n+1}^{(i)})$ que es la matriz de inercia tangente, $\mathbf{S}_{IJ}(\Phi_{n+1}^{(i)})$ es la matriz de rigidez tangente material, $\mathbf{G}_{IJ}(\Lambda_{n+1})$ es la matriz de rigidez tangente geométrica y $\Delta \Phi_{n+1,J}^{(i)}$ corresponde al desplazamiento y rotación incremental del nodo J .

La discretización temporal se realiza usando el esquema de integración de Newton-Raphson asociado al algoritmo implícito de la familia de Newmark. Con respecto a la parametrización de las rotaciones existen varias formas de representarlas. Entre ellas se destacan : Los ángulos de Euler, el álgebra de los Cuaterniones y La transformación de Cayley. Actualmente el programa utiliza el álgebra de los Cuaterniones para lo cual se implemento el algoritmo de Spurrier.¹⁴

3. SIMULACIONES NUMÉRICAS DEL MODELO NO LINEAL DE VIGAS

En el presente trabajo se generaliza la teoría de vigas no lineal y se amplían las potencialidades del código programado por los investigadores Barrientos y Sampaio^{15, 16, 17, 18} quienes lograron buenos resultados en las simulaciones de problemas con configuraciones rectas, a un nuevo código que permita simular vigas con configuraciones iniciales curvas. En esta sección se presenta un ejemplo de parametrización de una viga curva y a través de la comparación de resultados obtenidos en las simulaciones numéricas, con valores existentes en la literatura y resultados entregados por el modulo de Simulación de Eventos Mecánicos del software Algor CAE, se verifican las potencialidades que ofrece el nuevo código.

3.1 Viga circular empotrada con carga concentrada en el extremo libre

Se simulara el comportamiento de una viga circular de acero ASTM-A36, empotrada en un extremo y con una carga concentrada P aplicada en el extremo libre. Si la carga P posee una magnitud pequeña, la respuesta es de tipo estático, donde las deformaciones y desplazamientos son pequeños y por lo tanto los resultados obtenidos en la simulación pueden ser comparados con las respuestas del modelo de viga Euler-Bernouilli.

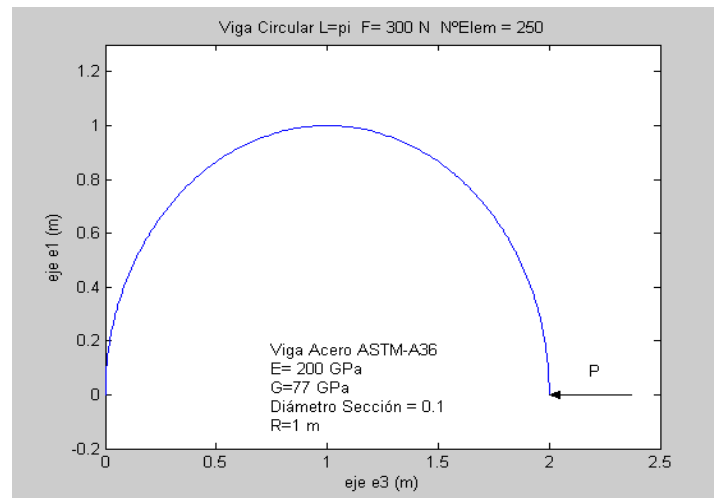


Figura 2: Viga Circular

En primer lugar se presenta la parametrización realizada en base a la longitud de arco (S) de la viga mostrada en la figura 2, la cual tiene un largo $L = \pi$ metros .

La curva de centroides que define la posición es $\Phi_0 : [0, L] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathfrak{R}^3$, donde $\Phi_0(S, 0) = (\sin(S), 0, 1 - \cos(S))$ con $S \in [0, \pi]$, la cual cumple con la condición $\|\Phi'_0(S)\| = 1, \forall S \in [0, L]$.

$$\text{Haciendo } \mathbf{t}_3(S) = \frac{\frac{\partial \Phi_0(S, 0)}{\partial S}}{\left\| \frac{\partial \Phi_0(S, 0)}{\partial S} \right\|} = (\cos(S), 0, \sin(S)) \text{ y } \mathbf{t}_2(S) = (0, 1, 0).$$

Y debido a que $\mathbf{t}_1(S) = \mathbf{t}_2(S) \times \mathbf{t}_3(S)$, obtenemos como resultado $\mathbf{t}_1(S) = (\sin(S), 0, -\cos(S))$

$$\text{Lo anterior nos permite obtener la matriz } \mathbf{\Lambda}_0 = \begin{bmatrix} \sin(S) & 0 & \cos(S) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(S) & 0 & \sin(S) \end{bmatrix}$$

La viga circular de acero ASTM-A36 de longitud π m, mostrada en la figura 2, posee las siguientes características geométricas y mecánicas:

Módulo de Elasticidad	200	Gpa
Módulo de Rigidez	77	Gpa
Densidad	7860	Kg/m ³
Diámetro de la sección	0.1	M
Área	7.854x10 ⁻³	m ²
Momento Polar Inercia (e ₃)	9.817x10 ⁻⁶	m ⁴
Momento de Inercia (e ₁)	4.908x10 ⁻⁶	m ⁴
Momento de Inercia (e ₂)	4.908x10 ⁻⁶	m ⁴
Densidad x área	61.261	Kg/m

El Teorema de Castigliano^{19, 20} nos permite calcular el desplazamiento vertical y horizontal del extremo libre de la viga, utilizando las siguientes expresiones:

$$x_{j\text{vertical}} = \frac{2PR^3}{EI} \quad \text{y} \quad x_{j\text{Horizontal}} = \frac{\pi PR^3}{2EI}$$

Los resultados entregados por la simulación, para un tiempo final de 3 seg., con un paso de tiempo de 0.01 seg., y una carga de 300 N , aplicada en forma gradual, se muestran en la siguiente tabla :

Desplazamiento máximo nodo extremo	Programa Matlab (m)	Castigliano (m)	Discrepancia (%)
Vertical (eje e1)	0.0006	0.00061	1.8
Horizontal (eje e3)	0.00046	0.00048	4

Como se observa los resultados son bastante próximos, además en el figura 3, se muestran los momentos internos entregado por la simulación y el calculado en forma analítica, los cuales presentan gran similitud . De lo anterior podemos afirmar que el programa obtenido en Matlab, entrega valores bastante exactos para la simulación de problemas estáticos, donde los desplazamientos y deformaciones son pequeños, lo cual nos permite concluir que el programa presenta un muy buen comportamiento para este tipo de análisis estático.

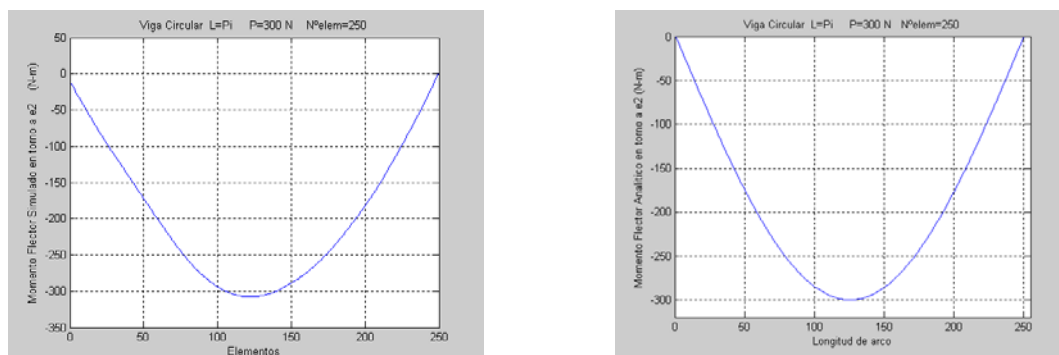


Figura 3: Diagramas de Momento Simulado y Analítico.

3.2 Viga semicircular empotrada con carga concentrada en la extremidad libre y grandes deformaciones.

Si a la viga semicircular mostrada en la figura 4, se le aplica una carga concentrada de valores muy altos, las deflexiones comienzan a crecer de manera que la viga sufre grandes deformaciones. La teoría lineal de vigas en estos casos no entrega buenas previsiones, pues se producen no linealidades de tipo geométrico. Para verificar las potencialidades del programa propuesto, utilizaremos una viga semicircular de Aluminio 1100-H14, con un 99% de Aluminio, esto con el fin de disminuir la rigidez y utilizar una viga más flexible. La viga posee las siguientes características:

Modulo de Elasticidad	70	Gpa
Modulo de Rigidez	26	Gpa
Densidad	2710	Kg/m ³
Diámetro de la sección	0.1	m
Área	7.854x10 ⁻³	m ²
Momento Polar Inercia (e ₃)	9.817x10 ⁻⁶	m ⁴
Momento de Inercia (e ₁)	4.908x10 ⁻⁶	m ⁴
Momento de Inercia (e ₂)	4.908x10 ⁻⁶	m ⁴
Densidad por área	21.28	Kg/m

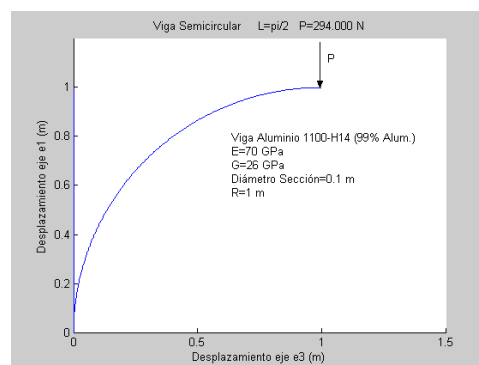


Figura 4: Viga semicircular empotrada con carga concentrada de 294.000 N.

Los resultados entregados por la simulación, para un tiempo de 1 seg. y una carga concentrada de 294.000 N, aplicada en forma gradual, serán comparados con los resultados entregados por el modulo de Simulación de Eventos Mecánicos (MES) del software ALGOR CAE, el cual permite simular la dinámica de estructuras considerando no linealidades de tipo materiales y geométricas.²¹

Desplazamiento máximo nodo extremo	Programa Matlab (m)	MES de Algor CAE (m)	Discrepancia (%)
Vertical (eje e1)	0.79	0.794	0.5
Horizontal (eje e3)	0.18	0.188	4.2

La tabla anterior muestra el buen comportamiento presentado por el programa, el cual muestra pequeñas discrepancias con respecto al software Algor CAE. También se muestran las graficas obtenidas de los desplazamientos del nodo del extremo libre de la viga, usando Matlab y Algor. Se observa la gran similitud en los resultados. La figura 10 muestra una simulación del movimiento de la viga.

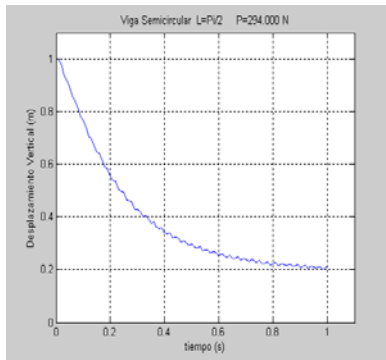


Figura 5 : Desplazamiento vertical

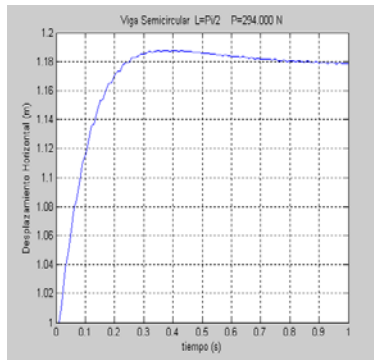


Figura 6 : Desplazamiento horizontal

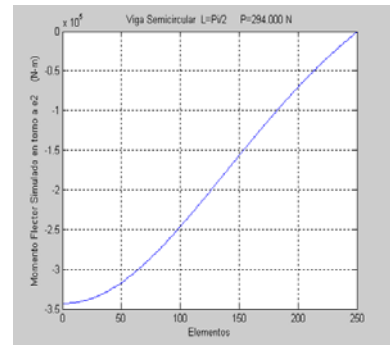


Figura 7 : Momento flector Simulado en Matlab

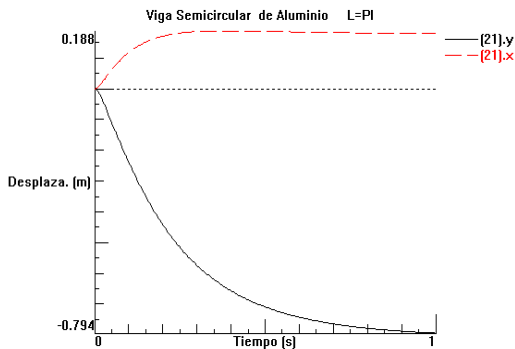


Figura 8 : Desplazamientos nodo extremo

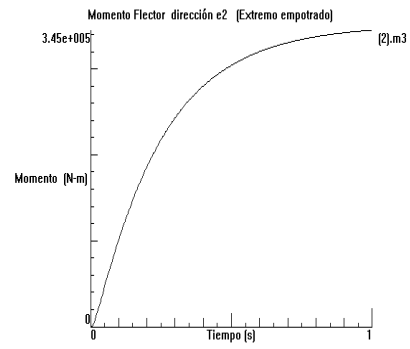


Figura 9 : Momento flector Algor CAE en la zona del empotramiento

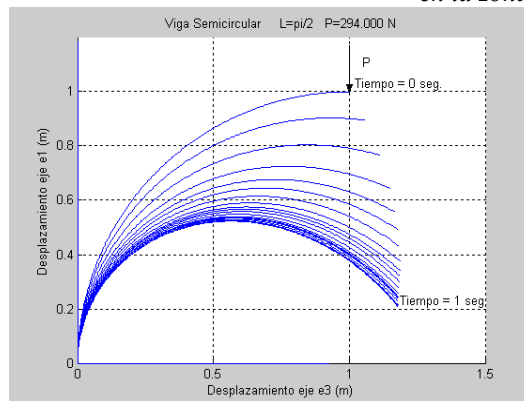


Figura 10: Configuración final de la viga sometida a grandes deformaciones

3.3 Viga semicircular empotrada con carga variable de tipo senoidal en el extremo libre.

El siguiente ejemplo permite estudiar el comportamiento de la viga de aluminio 1100-H14 sometida a una carga dinámicas. Se simula la misma viga semicircular del ejemplo 3.2, con una carga variable en el tiempo, aplicada en forma puntual en el extremo libre. La carga es de tipo senoidal igual a $150.000 * \text{SENO}(2\tau)$ N, aplicada durante $\tau = 10$ seg. Esto permitirá simular el comportamiento dinámico de la viga sometida a grandes deformaciones y a la presencia de no-linealidades geométricas. Los resultados serán comparados con los entregados por la simulación realizada con MES de ALGOR CAE. Los resultados obtenidos son los siguientes:

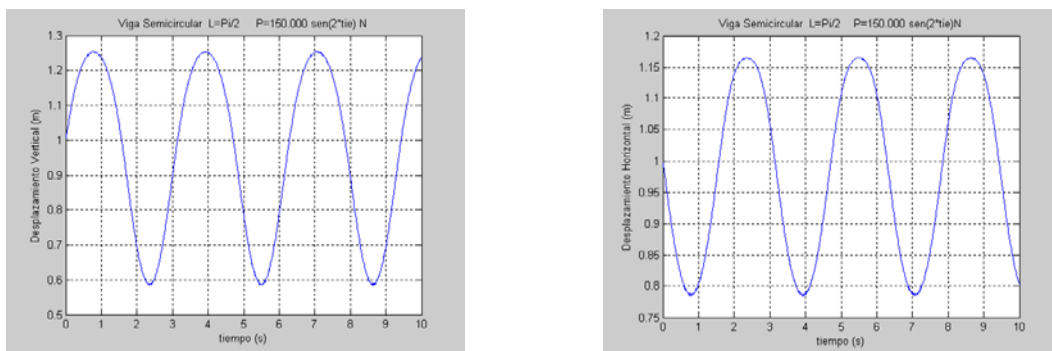


Figura 11: Desplazamientos vertical y horizontal del nodo extremo

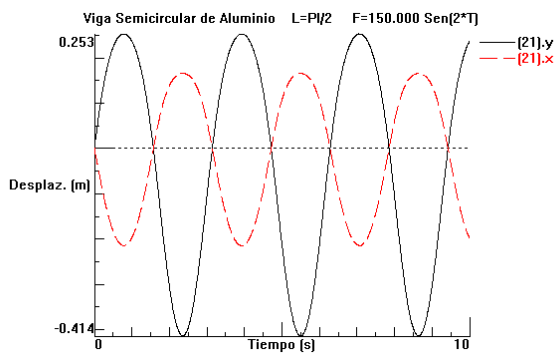


Figura 12: Desplazamiento nodo extremo Algor CAE

El comportamiento del extremo libre de la viga es el esperado, desplazándose a la misma frecuencia angular de la fuerza excitadora, de 2 (rad/seg), lo que implica un período de la vibración igual a π seg., tal como muestran las figuras 11 y 12.

La amplitud máxima en la dirección positiva del eje e_1 es de 0.25 metros y en la dirección negativa del eje es de 0.41 metros. En las figuras se observa la gran similitud en los resultados entregados por la simulación en Matlab y el software Algor CAE.

El programa propuesto permite determinar fuerzas y momentos a lo largo de la viga. Se comparara el valor del momento flector en el instante $\tau = 10$ s. Se observa que el valor máximo según la simulación en matlab se produce en la zona del empotramiento, alcanzando un intensidad igual a 1.15×10^5 N-m y el obtenido usando el software Algor CAE es 1.17×10^5 N-m, presentando una discrepancia de 1.7% .

La figura 13 muestra una simulación del desplazamiento de la viga de aluminio.

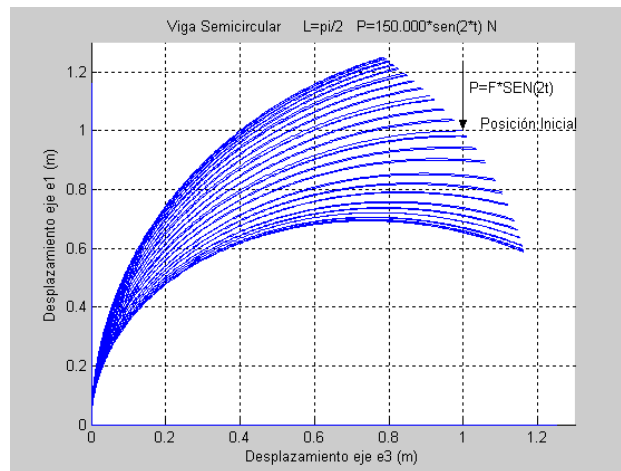


Figura 13 : Configuración final de la viga de aluminio

CONCLUSIONES:

Se dispone de un programa computacional que incorpora el efecto de la curvatura inicial de la viga. Este permite simular problemas estáticos y dinámicos que involucren no-linealidades de tipo geométrico y que consideren la inercia rotacional de la viga. Las comparaciones realizadas en las aplicaciones simuladas permiten asegurar que los resultados obtenidos son los esperados y presentan una muy buena exactitud. Se observan pequeñas fluctuaciones en los resultados de las simulaciones. Estas tienen su causa en el cálculo de las derivadas de las funciones de forma utilizadas en las aproximaciones al inicio, las cuales son funciones lineales y están siendo utilizadas para aproximar configuraciones curvas. El efecto anterior se ve disminuido al utilizar un número alto de elementos en la discretización espacial. Queda a futuro evaluar nuevos métodos de integración e incorporar el uso de elementos finitos de tres nodos en las aproximaciones, con el fin de disminuir las inestabilidades en los resultados, permitiendo disminuir de esta forma el número de elementos a utilizar en la discretización espacial.

AGRADECIMIENTOS:

¹ Proyecto interno N° 031811 3/I , Dirección de Investigación Universidad del Bío-Bío.

³ Proyecto interno UdeC. 201.013.019-1.0

Grupo Interdisciplinario de Investigación de Matemática Aplicada (GI²MA) UdeC.

REFERENCIAS

[1] Cosserat E., Cosserat F. (1907). Sur la statique de la ligne deformable, C.R. Acad. Sci. Paris Vol.145 pp1409-1412.

- [2] Ericksen J.L., Truesdell C. (1958). Exact theory of stress and strain in rods and shells, Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 1, pp. 295-323.
- [3] Green A.E. and Naghdi P.M. and Wexler M.L. (1974). On the theory of Rods. I. Derivations from the Three-dimensional equations. Poceeding of Royal Society of London. Vol.A.337, pp. 483-541.
- [4] Whitman A.B. , Da Silva C.N. , Wong K.K. (1974). An exact solution in a nonlinear theory of rods, Journal of Elasticity, Vol. 4,pp. 256-280.
- [5] Cohen H. (1966). A non-linear theory of elastic directed curves. International Journal Eng. Sci. Vol.4,pp.511-524.
- [6] Antman S.S. (1985). Nonlinear problems of Elasticity, Springer-Verlag.
- [7] Glowinski R. And Le Tallec P. (1982). Numerical Solution of problems in incompressible finite elasticity by aumented lagrangian methods. SIAM, Journal of Applied Mathematics, Vol.42, N.1,pp.400-429.
- [8] Simo J.C., (1985). A finite strain beam formulation. The three-dimensional problem. Part I, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.49,pp55-70
- [9] Simo J.C., Vu-Quoc L. (1986.a). On the dynamics of flexible beams under large overall motions –The plane case: Part II, Journal of Applied Mechanics, Vol.53, pp. 855-863.
- [10] Simo J.C., Vu-Quoc L. (1988). On The dynamics in space of rods under-going large motions - A geometrically exact approach, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 66, pp.125-161.
- [11] T.R. Kane and R.R. Ryan and A.K. Banerjee (1987). Dynamics of a Cantilever beam attached to a moving base, Journal Guiance, Vol.10 , N.2,pp.139 – 151.
- [12] Sharf I. (1996). A survey of geometrics stiffening in multibody dynamics formulations. Weve Motions, Intelligent structures and Nolinear Mechanics. Series on Stability, Vibrations and Control of Structures. Vol.1, pp.237-279.
- [13] Boutaghou Z.E. and Erman A.G. (1993). On various non-linear rod theories for the dynamic analysis of multy-body systems, Part I: Formulations. Journal of Sound and Vibration, Vol.164, N.2, pp.207-223.
- [14] Spurrier R.A., (1978), Comments on singularity-free extraction of a quaternion from a director-cosine matrix, Journal of Spacecraft. Vol.15, pp.225.
- [15] Barrientos G. Dinámica No-Lineal de Estructuras Flexibles en Grandes Deformaciones. *Tesis de Doctorado*, PUC-Rio de Janeiro, Brasil, Diciembre1997
- [16] Barrientos G., Sampaio R., (1977), Simulación de estructuras no-lineales usando Matlab. Mecánica Computacional , Vol.1, pp. 725-734.
- [17] Barrientos G., Sampaio R., (1978), Flexible systems: Three-dimensional Theory in Matlab, 4 World Congress on Computational Mechanics, CD ROM, B. Aires, Argentina.
- [18] Barrientos G., Sampaio R., (1999), Dynamics of flexible multibodies an approach using Matlab, PACAM-DINAME, CD ROM, Río, Brasil.
- [19] Beer F.,Johnston R., (1998), Mecanica de Materiales, McGRAW-HILL.
- [20] Timoshenko S., Goodier J., (1951), Theory of Elasticity, McGRAW-HILL.
- [21] ALGOR, Inc. Product Information