

TRANSMISSÃO DA ONDA SONORA EM DUTOS DE AR CONDICIONADO USANDO UMA BASE MODAL DE APROXIMAÇÃO

Rejane Pergher[†], Júlio Claeysen[‡]

[†] UFRGS - PROMEC - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Porto Alegre,
RS - Brasil

UNILASALLE - Centro Universitário La Salle - Canoas, RS

UCS - CCET/DEME - Departamento de Matemática e Estatística - Caxias do Sul, RS

E-mail: pergher@ucs.br

[‡] UFRGS - PROMEC - Instituto de Matemática

91500-900, Porto Alegre, RS - Brasil

E-mail: julio@mat.ufrgs.br.

Palavras chave: Base dinâmica, placa, base modal.

Resumo. Neste trabalho, é apresentada a solução da equação de Kirchhoff para uma placa retangular, fina e com condições de contorno não clássicas e cargas externas. Ela é caracterizada em termos da base dinâmica do sistema, gerada pela resposta impulso, a qual é uma resposta livre sujeita a condições impulsivas. Isto permite uma formulação evolutiva bastante geral para incluir dados iniciais, bem como caracterizar respostas forçadas através da convolução da ação de cargas externas. Para uma análise espectral, os modos são calculados de maneira matricial com o uso de respostas fundamentais, convenientemente centradas, em cada direção espacial. A matriz do sistema inclui os coeficientes das condições de contorno homogêneas e valores da base dinâmica espacial em pontos do contorno. Uma base de aproximação de Galerkin é apresentada para o estudo de um problema de controle na transmissão do som e na simulação de dutos de ar condicionado, onde são combinadas condições de contorno de molas translacionais e rotacionais e placas lateralmente apoiadas. O cálculo aproximado da resposta da placa, diante uma onda sonora plana incidente, é obtida, através da análise modal e a matriz de transferência.

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é obter a resposta dinâmica de uma placa retangular, fina e com condições de contorno não-clássicas, excitada por forças pontuais harmônicas. Os modos de vibração são calculados de maneira matricial com o uso da base dinâmica, convenientemente centrada, em cada direção espacial. A equação da placa é baseada no modelo de Kirchhoff para placas finas e é discretizada espacialmente com o uso do método de Galerkin. A resposta da placa para uma onda plana incidente é obtida através da resposta frequência na forma modal.

2. Nomenclatura

a, b	dimensões da placa [m]
\mathcal{B}	matriz das condições de contorno
\mathbf{c}	vetor dos coeficientes
C_0	velocidade do som [m/s]
D	rigidez flexural [N·m]
E	módulo de Young [N/m ²]
F_p	vetor das forças externas [N]
h	espessura da placa [m]
$h(x)$	solução dinâmica ou resposta impulso [m]
$i = \sqrt{-1}$	unidade imaginária
\mathbf{I}	matriz identidade
k	número de onda acústica [rad/m]
\mathbf{k}	vetor propagação da onda [m]
\mathbf{K}	matriz de rigidez [N/m]
k_m	rigidez translacional da mola
k_r	rigidez rotacional da mola
L	operador diferencial
m, n	parâmetros inteiros e variáveis das funções $X(x)$ e $Y(y)$
\mathbf{M}_1	matriz de massa [kg]
p_e	força externa [N]
P_{in}	onda plana incidente [dB]
\mathbf{r}	vetor posição no espaço [m]
$S(x, y)$	base de aproximação espacial
t	tempo [s]
T	superíndice que denota a transposta de uma matriz
\mathcal{U}	matriz das autofunções associadas
u_k	vetor modal normalizado
$w(t, x, y)$	deslocamento da placa [m]
$W_p(t)$	matriz de amplitude modal

$X(x), Y(y)$	autofunções ou funções formas modais
x, y, z	variáveis espaciais [m]
β_n	autovalores
ν	razão de Poisson
ρ_s	densidade da placa [kg/m ³]
θ, ϕ	ângulos da onda incidente na placa [rad]
ω	freqüência característica [rad/s]
Φ	matriz das autofunções ou funções de base
Ω^2	matriz diagonal espectral

3. Modelagem

O deslocamento de uma placa fina é governado pela equação

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w(t, x, y) = p_e(t, x, y), \quad (3.1)$$

com $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Para dutos de ar condicionado, supõe-se que a placa tenha como condições de contorno:

1. Uma restrição elástica translacional que corresponde a uma força de reação da mola igual à força de cisalhamento¹.

$$k_m w + D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{em } x = -\frac{a}{2} \quad (3.2)$$

$$k_m w - D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{em } x = \frac{a}{2} \quad (3.3)$$

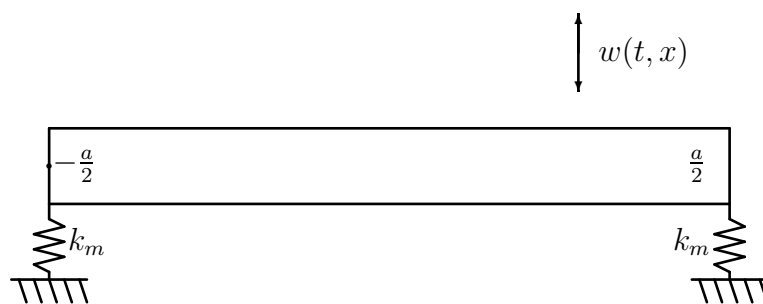


Figura 1: Modelo de condições de contorno de molas translacionais

2. Uma restrição elástica rotacional que corresponde a um momento de reação da mola igual ao momento fletor.

$$k_r \frac{\partial w}{\partial y} - D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } y = -\frac{b}{2} \quad (3.4)$$

$$k_r \frac{\partial w}{\partial y} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } y = \frac{b}{2} \quad (3.5)$$

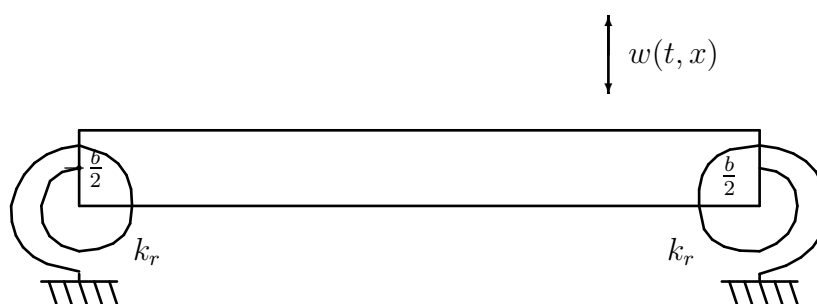


Figura 2: Modelo de condições de contorno de molas rotacionais

4. Freqüências e Modos de Vibração

Se nenhuma força externa é aplicada, segue que as vibrações livres são geradas pela equação

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w(t, x, y) = 0. \quad (4.1)$$

Na análise modal, a procura de soluções do tipo oscilatório, numa variável espacial, de (4.1),

$$w = e^{\gamma t} X(x) \quad e \quad w = e^{\gamma t} Y(y), \quad \text{com } \gamma = i\omega,$$

implica, por substituição, a resolução de um problema de autovalor generalizado

$$Lw = \lambda w, \quad \text{com } \lambda = -\frac{\gamma^2 \rho_s h}{D}$$

ou ainda, $\lambda = \beta^4 = \frac{\rho_s h}{D} \omega^2$ e $L = \frac{d^4}{dx^4}$, sujeito às condições de contorno nos extremos espaciais

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (4.2)$$

e, analogamente, para $Y(y)$. Sob a hipótese de que $X(x)$ e $Y(y)$ satisfazem tais condições de contorno, o valor ω será referido como frequência característica, dado por

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{D}{\rho_s h}}.$$

Para a obtenção dos modos é utilizada a base dinâmica^{2,3}, obtida a partir de uma solução com condições iniciais impulsivas. A solução de (4.2) pode ser escrita em termos dessa base como

$$X(x) = c_1 h\left(x + \frac{a}{2}\right) + c_2 h'\left(x + \frac{a}{2}\right) + c_3 h''\left(x + \frac{a}{2}\right) + c_4 h'''\left(x + \frac{a}{2}\right) = \Phi \mathbf{c},$$

onde $\Phi = [h, h', h'', h''']$, com $h(x)$ satisfazendo

$$h^{(iv)}(x) - \beta^4 h(x) = 0 \quad \text{e} \quad h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, h'''(0) = 1.$$

Para as condições de contorno em x , admite-se duas molas, uma rotacional e outra translacional, em cada extremo

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \tag{4.3}$$

$$k_m X\left(-\frac{a}{2}\right) + DX'''\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_r X'\left(-\frac{a}{2}\right) - DX''\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_m X\left(\frac{a}{2}\right) - DX'''\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_r X'\left(\frac{a}{2}\right) + DX''\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

e, em y , admite-se uma mola rotacional e uma condição de contorno apoiada, em cada extremo

$$Y^{(iv)}(y) - \beta^4 Y(y) = 0 \tag{4.4}$$

$$Y\left(-\frac{b}{2}\right) = Y\left(\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$k_r Y'\left(-\frac{b}{2}\right) - DY''\left(-\frac{b}{2}\right) = 0.$$

$$k_r Y'\left(\frac{b}{2}\right) + DY''\left(\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Para as condições de contorno do problema (4.3), na variável x , utilizando a base dinâmica,

$$\begin{bmatrix} k_m & 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & -D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_m & 0 & 0 & -D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_r & D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(-a/2) \\ \Phi'(-a/2) \\ \Phi''(-a/2) \\ \Phi'''(-a/2) \\ \Phi(a/2) \\ \Phi'(a/2) \\ \Phi''(a/2) \\ \Phi'''(a/2) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

De maneira compacta, tem-se $\mathcal{U}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, com $\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi$. Assim, o sistema singular a ser resolvido é

$$\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & k_m \\ 0 & -D & k_r & 0 \\ k_m h(a) - Dh'''(a) & k_m h'(a) - D\beta^4 h(a) & k_m h''(a) - D\beta^4 h'(a) & k_m h'''(a) - D\beta^4 h''(a) \\ k_r h'(a) + Dh''(a) & k_r h''(a) + Dh'''(a) & k_r h'''(a) + D\beta^4 h(a) & k_r \beta^4 h(a) + D\beta^4 h'(a) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

Para obter soluções não-nulas, deve-se ter o determinante do sistema nulo. Isso fornece

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_m}{D} \\ \frac{k_r}{D} \frac{k_m^2 h(a) + D^2 \beta^4 h''(a) - 2Dk_m h'''(a)}{Dk_m h''(a) + (k_m k_r - D^2 \beta^4) h'(a) - D\beta^4 k_r h(a)} \\ \frac{k_m^2 h(a) + D^2 \beta^4 h''(a) - 2Dk_m h'''(a)}{Dk_m h''(a) + (k_m k_r - D^2 \beta^4) h'(a) - D\beta^4 k_r h(a)} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Tem-se a equação característica

$$\Delta(\beta) = c_1 h'(a) h''(a) + c_2 h''(a) h'''(a) + c_3 h(a) h'(a) + c_4 h(a) h''(a) + c_5 h(a) h'''(a) + c_6 [h'''(a)]^2 + c_7 [h''(a)]^2 + c_8 [h'(a)]^2 + c_9 [h(a)]^2, \quad (4.8)$$

onde $c_1 = 2Dk_m(k_m k_r - D^2 \beta^4)$,
 $c_2 = 2Dk_r(k_m k_r - D^2 \beta^4)$,
 $c_3 = -2D\beta^4 k_r(k_m k_r - D^2 \beta^4)$,
 $c_4 = -(2D^2 \beta^4 k_m k_r + D^4 \beta^8 + k_m^2 k_r^2)$,
 $c_5 = -2Dk_m(k_m k_r - D^2 \beta^4)$,
 $c_6 = 4D^2 k_m k_r$,
 $c_7 = D^2(k_m^2 - \beta^4 k_r^2)$,
 $c_8 = k_m^2 k_r^2 + D^4 \beta^8 + 2k_m k_r D^4 \beta^8$
 e
 $c_9 = D^2 \beta^4 (\beta^4 k_r^2 - k_m^2)$.

Assim, obtém-se os modos de vibração em x ,

$$\boxed{X(x) = h'''(x + \frac{a}{2}) + \sigma_2 h''(x + \frac{a}{2}) + \sigma_1 h'(x + \frac{a}{2}) + \sigma_0 h(x + \frac{a}{2})}, \quad (4.9)$$

com $\sigma_2 = \frac{k_m^2 h(a) + D^2 \beta^4 h''(a) - 2Dk_m h'''(a)}{Dk_m h''(a) + (k_m k_r - D^2 \beta^4) h'(a) - D\beta^4 k_r h(a)}$, $\sigma_1 = \frac{k_r}{D} \sigma_2$ e $\sigma_0 = -\frac{k_m}{D}$.

Para o problema (4.4), na variável y , tem-se a matriz $\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi$ dada por

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ k_r h'(0) - Dh''(0) & k_r h''(0) - Dh'''(0) & k_r h'''(0) - Dh^{(iv)}(0) & k_r h^{(iv)}(0) - Dh^{(v)}(0) \\ h(b) & h'(b) & h''(b) & h'''(b) \\ k_r h'(b) + Dh''(b) & k_r h''(b) + Dh'''(b) & k_r h'''(b) + Dh^{(iv)}(b) & k_r h^{(iv)}(b) + Dh^{(v)}(b) \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Novamente, para obter soluções não-nulas, o determinante do sistema deve ser nulo, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_r h'(b) + Dh''(b)}{Dh(b)} \\ \frac{k_r}{D} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Tem-se a equação característica

$$\Delta(\beta) = 2Dk_r h(b) h'''(b) + D^2 \beta^4 [h(b)]^2 + k_r^2 h(b) h''(b) - 2Dk_r h'(b) h''(b) - k_r^2 [h'(b)]^2 - D^2 [h''(b)]^2. \quad (4.12)$$

Assim, obtém-se os modos de vibração em y ,

$$\boxed{Y(y) = h''(y + \frac{b}{2}) + \gamma_1 h'(y + \frac{b}{2}) + \gamma_0 h(y + \frac{b}{2})}, \quad (4.13)$$

onde $\gamma_0 = -\frac{k_r h'(b) + Dh''(b)}{Dh(b)}$ e $\gamma_1 = \frac{k_r}{D}$.

Deste modo, tem-se uma infinidade de raízes que fornecem os modos $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ na direção x e $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, \dots$ na direção y .

5. Cálculo Modal

Nesta seção, serão determinadas as primeiras cinco frequências e modos de vibração correspondentes com o uso do software Maple.

As equações características (4.8) e (4.12), quando $h(z)$ é escrita na base clássica de Euler

$$\sinh(\beta z), \sin(\beta z), \cosh(\beta z), \cos(\beta z),$$

ou seja, $h(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\beta z) - \sin(\beta z)}{\beta^3} \right]$, com $z = x, y$, resultam em

$$\begin{aligned} \Delta(\beta, x) = & \cos(\beta a) \cosh(\beta a) (6D^2 \beta^4 k_m k_r - D^4 \beta^8 - k_m^2 k_r^2) + 2D^2 \beta^2 \sin(\beta a) \sinh(\beta a) (k_m^2 - k_r^2 \beta^4) + \\ & 2D\beta \sin(\beta a) \cosh(\beta a) (k_m^2 k_r - D^2 \beta^4 k_m - D^2 \beta^6 k_r + \beta^2 k_m k_r^2) + \\ & 2D\beta \sinh(\beta a) \cos(\beta a) (D^2 \beta^4 k_m - k_m^2 k_r - D^2 \beta^6 k_r + \beta^2 k_m k_r^2) + k_m^2 k_r^2 + D^4 \beta^8 + 2D^2 \beta^4 k_m k_r = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

e

$$\Delta(\beta, y) = 2D^2\beta^2 \sin(\beta b) \sinh(\beta b) + 2Dk_r\beta(\sin(\beta b)\cosh(\beta b) - \sinh(\beta b)\cos(\beta b)) + k_r^2(1 - \cos(\beta b)\cosh(\beta b)) = 0. \quad (5.15)$$

As raízes das equações características, em x , equação (5.14) e, em y , equação (5.15), foram calculadas com o auxílio do software matemático Maple, apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Raízes das equações características

	Autovalores em x	Autovalores em y
β_1	2.634606249	7.893285613
β_2	11.87577339	15.72775356
β_3	19.66472403	23.57516530
β_4	27.51166283	31.42585083
β_5	35.36054065	39.27785166

Na figura 3, são visualizadas as raízes das equações características (5.14) e (5.15).

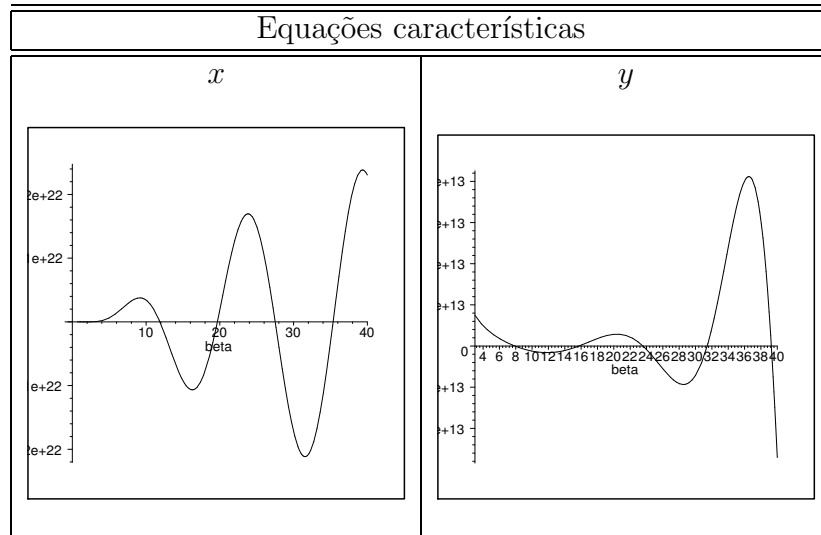


Figura 3: Equações características em x e y

Na figura 4, são apresentados os modos de vibração $X(x)$ e $Y(y)$, equações (4.9) e (4.13), para os cinco primeiros modos.

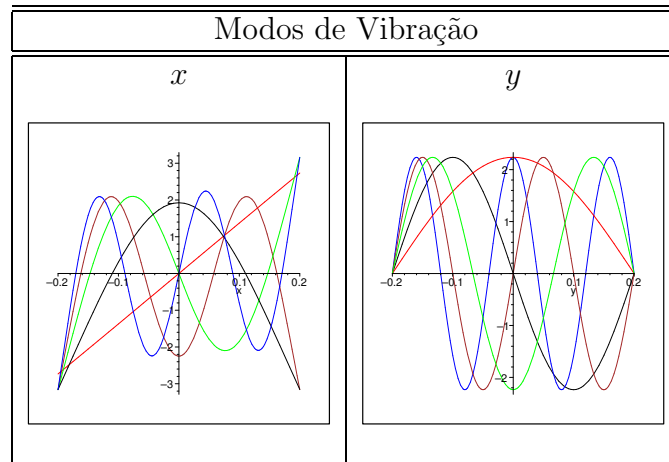


Figura 4: Os cinco primeiros modos de Vibração para a simulação de dutos de ar condicionado em x e y

6. Discretização Espacial através do Método de Galerkin

A partir das bases espaciais separadas

$$\{X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots\} \quad \text{e} \quad \{Y_1(y), Y_2(y), \dots, Y_m(y), \dots\},$$

constrói-se a base de aproximação espacial $S(x, y) = [S_1, \dots, S_l]^T$ com $l = mn$, onde S_p denota uma função forma modal genérica, isto é, $S_l = X_n(x)Y_m(y)$. Assim, tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias⁴,

$$\boxed{M_l W_p''(t) + K W_p(t) = F_p(t)}, \quad (6.16)$$

com $M_l = \rho_s h a b I$, $F_p = \int_{\sigma} p_e S_p d\sigma$ e

$$K = D \begin{bmatrix} \int_{\sigma} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) S_1^2 d\sigma & \cdots & \int_{\sigma} 2 \frac{\partial^4 S_p S_q}{\partial x^2 \partial y^2} d\sigma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{simetrica} & \cdots & \int_{\sigma} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) S_l^2 d\sigma \end{bmatrix}$$

7. Transmissão de uma Onda Plana Incidente

Para uma onda plana incidente P_{in} na placa⁵,

$$P_{in}(t, \mathbf{r}) = P \exp i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t),$$

onde $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k} = k \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + k \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + k \cos \theta \mathbf{k}$,

$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e

$k = \frac{\omega}{C_0}$ é o número de onda acústica.

Pode-se derivar a resposta forçada da placa para uma onda acústica incidente. Na equação (3.1), tem-se para p_e ,

$$p_e(t, \mathbf{r}) = P_0 e^{i\omega t} f(x, y), \quad (7.1)$$

com

$$P_0 = P e^{-ik_z z} \quad (7.2)$$

e

$$f(x, y) = e^{-i(k_x x + k_y y)}. \quad (7.3)$$

Assim,

$$F_p(t) = P_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} \int_{\sigma} f(x, y) S_1 d\sigma \\ \int_{\sigma} f(x, y) S_2 d\sigma \\ \vdots \\ \int_{\sigma} f(x, y) S_l d\sigma \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Utilizando a análise modal, procura-se solução do tipo $W_p = \tilde{f} e^{i\omega t}$. Substituindo-o em (6.16), tem-se

$$W_p(t) = (-\omega^2 M_l + K)^{-1} F_p(t).$$

Usando a matriz de transferência⁶, a solução da placa com incidência de uma onda plana será

$$w(t, x, y) = S^T(x, y) \sum_{k=1}^l \frac{u_k u_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2} F_p(t).$$

8. Base Modal de Aproximação

Na figura 5, é apresentada a base utilizada na discretização espacial pelo método de Galerkin.

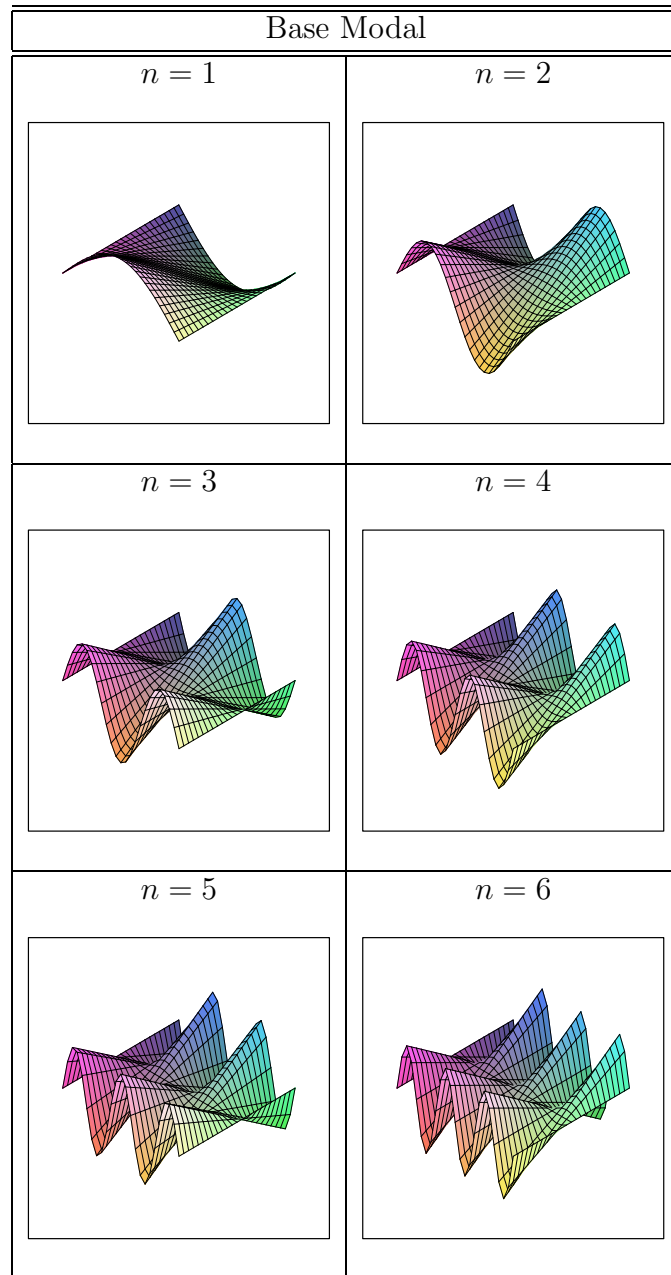


Figura 5: Base Modal de Aproximação para a simulação de dutos de ar condicionado $S[m, n]$ com $m = 1$ e $n = 1 : 6$

Referências

- [1] T. Morelato, Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições de Contorno Não-Clássicas. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS-CPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [2] J. Claeysen e R. Soder, "A dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **259** (4), 2003.
- [3] J. Claeysen, "The Matrix Impulse Response in Vibrating Systems, Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences", *ABCM-SBMAC-SIAM*, vol.2, Ed. J. Baltazhar, 1999.
- [4] C.C. Sung e C.T. Jan, "The response of and sound power radiated by a clamped rectangular plate". *Journal of Sound and Vibration* **207**(3), 301-317, 1997.
- [5] A. D. Pierce, *Acoustics: an Introduction to its Physical Principles and Applications*, McGraw-Hill, 1981.
- [6] R. Pergher, Controle de Radiação Sonora numa Placa Retangular através de Atuadores Piezoelétricos Discretos, *Exame de Qualificação*, Promec-UFRGS, Porto Alegre, 2002.